Exercice 1

1°.(a) La matrice cherchée est donnée ci-dessous ; elle est triangulaire supérieure.
Par chance (?), les éléments diagonaux sont bien en ordre décroissant…

$$\begin{pmatrix}
0 & -np & 2q & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
0 & -2n & -2p(n-1) & \ddots & 0 & & & \\
 & 0 & -2(2n-1) & \ddots & qk(k-1) & & & \vdots \\
 & & 0 & \ddots & -kp(n+1-k) & \ddots & 0 & \\
\vdots & & & & -k(2n+1-k) & \ddots & qn(n-1) & 0 \\
 & & & & 0 & \ddots & -np & qn(n+1) \\
 & & & & & & -n(n+1) & 0 \\
0 & 0 & 0 & & \dots & & 0 & -n(n+1)
\end{pmatrix}$$

(b) Pour $0 \le k \le n-1$, l'espace propre associé à $\lambda_k = -k(2n+1-k)$ est une droite vectorielle ; l'espace propre associé à $\lambda_n = \lambda_{n+1} = -n(n+1)$ est lui de dimension deux…Les dimensions des espaces propres sont bien égales à la multiplicité des valeurs propres correspondantes.

(c) Le système associé à la recherche des coefficients de P_k se résout en cascade à partir de la donnée du coefficient dominant pour $0 \le k \le n$. Il y a donc unicité de P_k pour $0 \le k \le n$.
Par contre, le coefficient de X^n dans P_{n+1} peut être choisi arbitrairement.

(d) L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_n) est de dimension deux puisque $A(x)$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Or l'ensemble des solutions polynomiales est également de dimension deux (d'après (b) plutôt que (c) selon moi…), par conséquent, toutes les solutions sont des fonctions polynômes.

2°. On aboutit à $A(x)P_n(x)z'' = (nA'(x)P_n(x) - 2A(x)P_n'(x))z'$, qui donne $z' = \beta \dfrac{A^n}{P_n^2}$.

3°. On peut en particulier poser $P_{n+1} = zP_n$; donc la dérivée de $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ vaut $\beta \dfrac{A^n}{P_n^2}$ pour un certain $\beta \in \mathbb{R}$…
L'examen des coefficients dominants montre que $\beta = 1$.

Exercice 2

1°.(a) Le cours assure l'existence d'une unique solution au problème de Cauchy…

(b) $F(t) = y_0(t) + \alpha ch(t) + \beta sh(t)$

2°.(a) On voit facilement que $t \mapsto y_0(-t)$ est solution, grâce à la parité de f…En outre, cette solution vérifie les mêmes conditions initiales que y_0 ; c'est donc y_0. Ainsi, $y_0(t) = y_0(-t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

(b) Il vient $\beta = 0$ dans la formule du 1°.(b)…

(c) Il vient $\beta = 0$ (car $y_0'(0) = 0$ puisque y_0 est paire) puis $\alpha = -\dfrac{y_0'(\pi)}{sh(\pi)}$…

(d) On voit facilement que $G(t) = F(t - 2\pi)$ est solution, grâce à la périodicité de f…
F étant paire, on a : $G(\pi) = F(-\pi) = F(\pi)$ et $G'(\pi) = F'(-\pi) = -F'(\pi) = 0 = F'(\pi)$;
par conséquent, $G(t) = F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, d'après l'unicité de la solution du problème de Cauchy en π.
Il n'y a pas d'autre solution 2π-périodique car l'équation homogène n'admet pas de solution 2π-périodique autre que la solution nulle.

3°.(a) La formule donnée peut s'obtenir par la méthode dite de la « variation des constantes » ; mais puisqu'elle est donnée, on peut se contenter de vérifier que ça marche…

(b) D'après la formule précédente et la question 2°.(c) on a :
$F(x) = \int_0^x sh(x-t) f(t)dt - \dfrac{ch(x)}{sh(\pi)} \int_0^\pi ch(\pi - t) f(t)dt$ …La linéarité de l'opérateur T est alors évidente.
De plus, comme F est paire et 2π-périodique, on peut se contenter de majorer $|F(x)|$ sur $[0,\pi]$…
On obtient facilement $|F(x)| \leq \pi \dfrac{ch(2\pi)}{sh(\pi)} N_\infty(f)$; ce qui assure la continuité de T pour N_∞.

4°.(a) f et F sont continues, 2π-périodiques, paires et de classe C^1 par morceaux, donc elles admettent chacune un développement pair en série de Fourier convergeant normalement sur $\mathbb{R}$…

(b) Comme F est en fait de classe C^2, on montre classiquement que $(n^2 b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ; par conséquent, on peut dériver deux fois terme à terme la série de Fourier de F puis identifier les coefficients (il y a unicité du développement en série trigonométrique lorsque les coefficients sont sommables)…On obtient ainsi : $b_n = -\dfrac{a_n}{1+n^2}$

5°.(a) Pour $x \in [0,\pi]$, on a : $F(x) = \int_0^x sh(x-t)\sin(t)dt - \dfrac{ch(x)}{sh(\pi)} \int_0^\pi ch(\pi - t)\sin(t)dt$ …
Ma calculatrice (TI 89) donne, après simplifications : $F(x) = \dfrac{sh(x)}{2} - \dfrac{\sin(x)}{2} - \dfrac{1}{2}\coth(\dfrac{\pi}{2})ch(x)$.

(b) On trouve $a_{2n} = \dfrac{-4}{\pi(4n^2 - 1)}$ donc $b_{2n} = \dfrac{4}{\pi(16n^4 - 1)}$ …tandis que les coefficients impairs sont nuls.

(c) La formule de Parseval pour $F(0)$ donne alors : $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{16n^4 - 1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi}{8}\coth(\dfrac{\pi}{2}) \approx 0.071828$.

Exercice 3

1°.(a) *Un peu perplexe devant l'énoncé, je me suis replongé dans le programme officiel…*
et me suis ainsi rendu compte que le concept de représentation polaire y était peu explicite…
Je suppose donc qu'il s'agit de considérer le repère $\left(O\,;-\vec{j},\vec{i}\,\right)$…
On a : $\overrightarrow{OM(\theta,0)} = a(1-\cos\theta)\left[(\sin\theta)\,\vec{i} - (\cos\theta)\,\vec{j}\,\right]$; d'où $\rho = a(1-\cos\theta)$ …
Les candidats étaient-ils sensés reconnaître une cardioïde ?…

(b) $\overrightarrow{\Omega_t M(\theta,t)} = a(1-\cos\theta)\left[\sin(\theta-t)\,\vec{i} - \cos(\theta-t)\,\vec{j}\,\right]$
Le changement de paramètre $\varphi = \theta - t$ donne $\rho(\varphi) = a(1-\cos(\varphi+t))$; le support de γ_t est donc obtenu à partir de celui de γ_0 par la translation de vecteur $\overrightarrow{O\Omega_t}$ suivie de la rotation d'angle $(-t)$.

2°.(a) Comme $\dfrac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}(\alpha,\alpha) + \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial t}(\alpha,\alpha)$, la relation souhaitée revient à : $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial t}(\alpha,\alpha) = 0$; or $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial t}(\theta,t) = \left[h'(t) - a(1-\cos\theta)\cos(\theta-t)\right]\vec{i} - a(1-\cos\theta)\sin(\theta-t)\,\vec{j}$, on obtient alors : $h'(t) = a(1-\cos t)$; donc $h(t) = a(t-\sin t) + b$, avec $b = 0$ puisque $h(0) = 0$.
Géométriquement, cela signifie qu'au point de contact $P(\alpha) = M(\alpha,\alpha)$ la tangente à Γ est aussi la tangente à γ_α …(comme on doit le vérifier sur la figure en 4°.(c)…)

(b) $\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial\theta}(\alpha,t) = a(1-\cos\theta)\left[\cos(\theta-t)\,\vec{i} + \sin(\theta-t)\,\vec{j}\,\right] + a(\sin\theta)\left[\sin(\theta-t)\,\vec{i} - \cos(\theta-t)\,\vec{j}\,\right]$;
par conséquent, $\dfrac{\overrightarrow{dP}}{dt}(\alpha) = a\left[1-(\cos\alpha)\right]\vec{i} - a(\sin\alpha)\,\vec{j}$ …
Par ailleurs, $\dfrac{\overrightarrow{dQ}}{d\theta}(\alpha) = a\left[1-(\cos\alpha)\right]\left[(\cos\alpha)\,\vec{i} + (\sin\alpha)\,\vec{j}\,\right] - a(\sin\alpha)\left[(-\sin\alpha)\,\vec{i} + (\cos\alpha)\,\vec{j}\,\right]$…
Ce vecteur étant l'image du précédent par la rotation d'angle α , les deux points sont simultanément réguliers et la tangente à Γ en $P(\alpha)$ se déduit de la tangente à γ_0 en $Q(\alpha)$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{Q(\alpha)P(\alpha)}$ suivie de la rotation d'angle $(-\alpha)$.

3°.(a) $\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{d\sigma}{d\theta} = a\sqrt{2(1-\cos\theta)} = 2a\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|$…

(b) La longueur de ces arcs est donc : $2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right|d\theta = 4a\int_0^{\pi}\sin(t)\,dt = 8a$

(c) $\dfrac{\overrightarrow{dP}}{d\theta} = \dfrac{ds}{d\theta}\vec{T}$, $\dfrac{\overrightarrow{dT}}{ds} = \gamma\vec{N}$, $\dfrac{\overrightarrow{d^2P}}{d\theta^2} = \dfrac{d^2s}{d\theta^2}\vec{T} + \left(\dfrac{ds}{d\theta}\right)^2\dfrac{\overrightarrow{dT}}{ds}$, d'où $R = \dfrac{\left(\dfrac{ds}{d\theta}\right)^3}{\left[\dfrac{\overrightarrow{dP}}{d\theta},\dfrac{\overrightarrow{d^2P}}{d\theta^2}\right]} = 2a\sqrt{2(1-\cos\theta)}$ …

Mais il est ici plus judicieux de suivre le programme officiel à la lettre :

$$\vec{T} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\ \vec{i} - \frac{\sin\theta}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}}\ \vec{j} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{i} - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{j} = (\cos\alpha)\ \vec{i} + (\sin\alpha)\ \vec{j}$$

avec $\alpha = \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}$ pour $\theta \in \left]0,2\pi\right[$; ce qui donne $\vec{N} = -(\sin\alpha)\ \vec{i} + (\cos\alpha)\ \vec{j} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{j}$ et, immédiatement, $\gamma = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\theta}{2ds}$ d'où $R = 2\frac{ds}{d\theta} = 4a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ pour $\theta \in \left]0,2\pi\right[$.

(d) *Si l'on se restreint encore à* $\theta \in \left]0,2\pi\right[$, on obtient :

$$\overrightarrow{OC(\theta)} = a(\theta - \sin\theta)\ \vec{i} - a(1-\cos\theta)\ \vec{j} + 4a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{j}\right] = a(\theta + \sin\theta)\ \vec{i} + a(1-\cos\theta)\ \vec{j}$$

d'où $C(\theta) = P(\theta - \pi) + a\pi\ \vec{i} + 2a\ \vec{j}$; le support de Γ_1 lorsque θ décrit $\left]0,2\pi\right[$ s'obtient donc à partir de celui de Γ lorsque θ décrit $\left]-\pi,\pi\right[$ par translation de vecteur $a\pi\ \vec{i} + 2a\ \vec{j}$.
La question suivante permet de lever la restriction sur le domaine de variation de θ …

4°. (a) Cette cycloïde est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$,
et par symétrie par rapport aux droites verticales d'équations : $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\frac{\overrightarrow{dP}}{d\theta}(0) = \vec{0}$; $\frac{\overrightarrow{d^2P}}{d\theta}(0) = \vec{j}$; $\frac{\overrightarrow{d^3P}}{d\theta}(0) = \vec{i}$; par conséquent $P(0)$ est un point singulier, plus précisément un rebroussement de deuxième espèce, où la tangente est verticale.

(c) La figure demandée ne sera pas reproduite ici…
Elle doit confirmer les résultats obtenus en 1°.(b) ; 2°.(a) ; 3°.(e) ; 4°. (a) et (b)…
Tout cela se visualise plutôt bien sur ma calculatrice…
(on « voit » la cardioïde rouler (sans glisser) sur la cycloïde)
Mais combien de candidats auront traité ces finasseries de géométrie différentielle ?