nom :

spé MP1 carnot DIJON

Erreur d'énoncé : *(Dans II il manque le (3.b) !!)*

MP1 *(Beaucoup de questions, de ce très "joli" problème avaient été traitées, (signalées par MP1 soit dans le cours, soit en TP, MP1 : Il fallait écouter et faire attention, vous n'avez qu'à vous en prendre à vous même ; Je rajoute des titres aux parties, pour bien marquer la clé des méthodes privilégiées qu'il fallait utiliser).* Voici donc à la demande de **R** qui a "bien aimé" ce très beau problème, une solution "Toute MP 1" !

Le seul ennui est que ce problème, bien dans le programme (1) ne comportait absolument aucune indication (voir par exemple III-1, que l'on traite en TP ou cours mais en aidant les élèves), ce qui en fait un bon problème pour les

10 premiers de MP (je signale ces questions par) De plus les liens entre les parties n'étaient pas transparents, ni leur but affiché.*

Comme le constatent les deux post-correcteurs (Philippe Fontaine et Benoit Richard) du contrôle à postériori de l'UPS : "cette épreuve nous semble difficile car certaines questions sont ABRUPTES et d'autres bizarres". (Les questions IV.1.d dont on ne voit pas l'intérêt, IV 1.b car on a la valeur exacte du déterminant et V.5 pour la même raison)

(Je laisse le soin à G Debeaumarché, de protester, après avoir constaté ce fait en cherchant ces questions mais sans avoir préalablement regardé mon corrigé) mais pas pour les élèves moyens de MP ; or E3A qui prétend regrouper Estp, Icare, Écrin, Ensam, Archiméde, qui étaient des concours assurant les arrières des élèves moyens, montre les limites du regroupement des concours : une fois regroupés, c'est la surenchère qui nuit aux élèves moyens ! (2) Les liens entre les parties étaient peu apparents.

Ce problème montre s'il en était encore besoin le double langage : le secondaire fait croire à la facilité, mais au moment des concours, ceux ci sont de plus en plus difficiles : moins il y a de vaches dans un pré, plus il y a d'herbe pour celles qui y sont : ceux qui font croire aux autres qu'il n'y a pas besoin d'efforts pour réussir, accroissent leur chance d'être mieux classés ! sachez que tout flatteur vit au dépend de celui qui l'écoute, cette leçon vaut bien un échec aux concours sans doute !

Partie I : Déterminant tridiagonal, polynômes de STURM

(1) A admet n valeurs propres distinctes :

Première solution

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable, **donc pour chaque valeur propre t, l'ordre de multiplité m(t) est égal à la dimension $d(t)$ du sous espace propre associé.** Or le rang de la matrice $A - tI$ est égal à $n-1$, comme on le voit avec la sous matrice d'ordre $n-1$ située en bas à gauche qui est triangulaire supérieure. Ainsi par la formule du rang la dimension de $Ker(A-tI)$ est $d(t) = 1$: toutes les racines du polynôme caractéristique de A sont simples.

Seconde solution, plus technique mais, avec l'évolution des valeurs propres avec n

La clef de cette question est l'idée MP1 , d'établir une relation de récurrence linéaire entre les $\Delta_n = \Pi_A(X) = det(XI - A)$!

On commence "Mollo" (faut pas pousser (R) dans les orties ! $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = |X| = X$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 1$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & -2 \\ 0 & -2 & X \end{vmatrix} =_{\text{Par Sarrus}} X^3 - 4X - X = X(X^2-5) ;$$

On établit une récurrence, en développant Δ_n par rapport à sa première colonne :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & X & -2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & X & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & X & 2-n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-n & X & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-n & X \end{vmatrix} = X\Delta_{n-1} - (n-1)^2\Delta_{n-2}$$; On reconnaît une relation de récurrence linéaire, à coefficients non constants mais polynomiaux en n : $\boxed{\mathbf{\Delta_n = X\Delta_{n-1} - (n-1)^2\Delta_{n-2}}}$

Trois méthodes sont à priori possibles : arriver à expliciter Δ_n, qui vérifie une équation récurrente linéaire du second ordre, mais hélas pas à coefficients constants ; Ou bien trouver l'endomorphisme u associé à la matrice A, en l'interprétant comme un endomorphisme qui opère sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; Un peu d'attention permet de voir que la j-ième colonne s'interprète par $u(X^{j-1}) = D(X^{j-1}) + projection_{\mathbb{R}_{n-1}[X]} \circ D(X^j)$, où D est l'opérateur de dérivation. P étant un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $\boxed{\mathbf{u(P) = D(P) + projection_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}(X * D(XP))}}$, et rechercher les valeurs propres revient à résoudre l'équation fonctionnelle-différentielle : $P' + projection_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}(X^2P' + XP) = \lambda P$; On peut toujours pour la résoudre poser $P = y + sX^{n-1}$ où $y \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, et l'équation s'écrit : $y' + s(n-1)X^{n-2} + X^2y' + XY = \lambda(y + sX^{n-1})$: équation du premier ordre linéaire en y, qu'on peut intégrer par la méthode usuelle de variation de la constante et chercher λ pour que la solution soit polynomiale... ou bien enfin raisonner par RÉCURRENCE, en constatant que pour n=1, n=2, n=3, la propriété annoncée est bien vérifiée.

C'est cette dernière méthode que nous allons utiliser :

■ On constate d'abord, que la propriété est bien vraie pour n=1..3.

■ Si t_0 est une valeur propre réelle (supposer exister, par hypothèse de récurrence : i=1..n-1) racine de Δ_i, alors la relation de récurrence donne $\Delta_{i+1}(t_0) = 0 - i^2\Delta_{i-1}(t_0)$;

Si $\Delta_{i+1}(t_0)$ était nul alors $\Delta_{i-1}(t_0)$ aussi, de proche en proche on aurait : $\Delta_i(t_0) = \Delta_{i-1}(t_0) = ... = \Delta_1(t_0) = \Delta_0(t_0) = 0$; Or ceci est impossible car $\Delta_0(X) = 1$; on a donc $\boxed{\mathbf{\Delta_{i+1}(t_0).\Delta_{i-1}(t_0) < 0}}$ pour i=1..n-1.

■ Ceci établi, montrons le transfert de la récurrence : soit $i \leq n-1$ et supposons que Δ_{i-1}, possède $i-1$ racines séparant celles de Δ_i (*(ce qui est bien vrai pour i=2 et 3)* (hypothèse de récurrence) et soient $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_{i-1}$ les racines de Δ_i ;

Par hypothèse de récurrence, il existe $\mu \in]\lambda_0, \lambda_1[$, tel que $\Delta_{i-1}(\mu) = 0$, μ est un zéro avec changement de signe de Δ_{i-1} car par hypothèse de récurrence, Δ_{i-1} qui est de degré $i-1$, possède $i-1$ racines réelles distinctes.

D'après le premier ■ on a

$\Delta_i(\lambda_0) = 0$, donc $\Delta_{i+1}(\lambda_0)\Delta_{i-1}(\lambda_0) < 0$

$\Delta_i(\lambda_1) = 0$, donc $\Delta_{i+1}(\lambda_1)\Delta_{i-1}(\lambda_1) < 0$.

Comme μ est le seul zéro de Δ_{i-1} sur $]\lambda_0, \lambda_1[$, on a $\Delta_{i-1}(\lambda_0).\Delta_{i-1}(\lambda_1) < 0$, donc $\Delta_{i+1}(\lambda_0).\Delta_{i+1}(\lambda_1) < 0$, donc Δ_{i+1} possède au moins un zéro dans $]\lambda_0, \lambda_1[$. Le raisonnement étant le même dans les intervalles suivants, on peut assurer que Δ_{i+1} a $i-1$ racines réelles distinctes, une dans chaque intervalle $]\lambda_j, \lambda_{j+1}[$, $j = 0...i-2$; Il en manque deux, que nous allons prouver par récurrence dans $]-\infty, \lambda_0[$ et $]\lambda_{i-1}, +\infty[$. Effectivement un raisonnement par récurrence, amorcé pour les premières valeurs, permet de constater que P_{i-1} est de signe constant dans $]-\infty, \lambda_0]$ et $[\lambda_{i-1}, +\infty[$ et que ce signe est respectivement $(-1)^{i-1}$ et $(-1)^i$; Le suivi du signe et de la relation $\Delta_{i+1}(\lambda_0)\Delta_{i-1}(\lambda_0) < 0$ (et analogue en λ_{i-1})), permet en suivant le signe de $\Delta_{i+1}(\pm\infty)$, et en utilsiant le théorème des valeurs intermédiaires de conclure positivement. (faire un tableau de signe ou de variations).

BIB : Lebœuf 132 ; Leichtnam algèbre edition 2000, p 55-57 qui généralise à une matrice tri-diagonale symétrique (et non tri-continentale...) et fait le lien avec les polynômes de STURM, préliminaires à sa méthode de séparation des racines réelles ; Voir aussi TP et cours MP1 sur les déterminants MP1. ; Durand 2 pages 152, 281, 304 ; D'après Leichtnam les polynômes de Sturm permettent de localiser les valeurs propres de matrices, d'où leur intérêt en analyse numérique et théorie de l'approximation (voir Ciarlet analyse numérique et Dieudonné calcul infinitésimal) ; De plus chaque fois qu'un système de polynômes orthogonaux (Legendre, GegenBauer, Tchebycheff, Jacobi, Laguerre,... voir le livre de topologie de Choquet), vérifie une relation de récurrence à trois termes Stürm apparaît ;

---

(2) Lien entre $\mathbf{\Pi_u}$ et P_n :

La formule annoncée est bien vérifiée pour n=1 et n=2, supposons la vraie jusqu'à l'ordre n-1 : alors $\Delta_n = X\Delta_{n-1} - (n-1)^2\Delta_{n-2} = X\big[(n-2)!\big(XP_{n-1}(X) - (n-2)P_{n-2}(X)\big)\big] - (n-1)^2(n-3)!\big(XP_{n-2}(X) - (n-3)P_{n-3}(X)\big) = (n-1)!\Big(X(XP_{n-1}\frac{1}{n-1} - \frac{n-2}{n-1}P_{n-2}) - (n-1)(XP_{n-2}\frac{1}{n-2} - \frac{n-3}{n-2}P_{n-3}\Big) = (n-1)!(XP_n - (n-1)P_{n-1})$. Il y a bien transfert de récurrence.

---

(3) Calculer det(A) : Posons pour simplifier $D_n = det(A) = (-1)^n\Pi_u(0)$; Or $\Pi_u(0) = -(n-1)(n-1)!P_{n-1}(0)$; Par conséquent $D_n = (-1)^{n+1}(n-1)(n-1)!P_{n-1}(0)$ et $P_{n-1}(0) = -\frac{n-3}{n-2}P_{n-3}(0)$ donc $D_n = -(n-1)^2D_{n-2}$: pour n impair on trouve $D_n = 0$, et pour n=2p $\begin{cases} D_{2p} = -(2p-1)^2D_{2p-2} \\ \text{............................} \\ D_2 = -(1)^2D_0 = -1 \end{cases}$ ce qui donne :

$$\boxed{\mathbf{D_{2p} = (-1)^p(1.3...(2p-1))^2 = (-1)^p\Big(\frac{1.2.3...2p}{2.4...2p}\Big)^2 = (-1)^p\frac{1}{2^{2p}}\frac{(2p!)^2}{(p!)^2}}}$$

(4.a) Co(A) commutant de A, est un espace vectoriel : Non vide (I et 0 y appartiennent), il est stable car si S et T sont deux matrices de $Co(A)$ alors pour tout réel x $(S+xT)A = SA+xTA = AS+xAT = A(S+xT)$, donc $S+xT \in Co(A)$.

(4.b) Dimension de Co(A) : *(BIB : TP VP ou br 73)*

Comme A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle a n valeurs propres réelles distinctes $t_1, ..., t_n$, il faut et il suffit (immédiat) de trouver les matrices M', qui commutent avec $D = diag(t_1, ..., t_n)$.

Or (cours) quand deux endomorphismes commutent tout espace propre de l'un est stable par l'autre. $e_1, ...e_n$ étant la base propre associée, v l'endomorphisme associé à M, on a en effet $uv(e_j) = v(u(e_j)) = v(t_je_j) = t_jv(e_j)$. $v(e_j)$ est donc $t_j - propre$ pour u. ; comme chaque espace propre de u est de dimension 1, on a $v(t_j) = k_je_j$, la base e_j est propre aussi pour v : Donc u et v sont co diagolisables : Comme on peut faire intervenir le lagrangien tel que $k_j = L(t_j)$ on a v=L(u) polynôme en u ; et de plus toute matrice diagonalisée sur la même base que u fait partie du commutant de u ; donc $\boxed{\mathbf{Dim(Co(A))=n}}$

Partie II : Série de Césaro

(1) Décomposition en carrés de la forme quadratique q :

Il suffit de développer le second membre donné, et de regrouper tous les termes semblables, on retrouve exactement tous les coefficients de la forme associés à B. (Rappellons que le coefficient $b_{i,i}$ est celui de x_i^2 tandis que $b_{i,j}$ $i \neq j$ est le demi coefficient de x_ix_j)

---

(2) Rang et signature : Les formes linéaires intervenant par leur carré, dans (1) sont échelonnées dont indépendantes, et tous les coefficients devant ces formes carrées sont > 0, par conséquent $\boxed{\textbf{rang(q)=n ; signature(q)=(n,0)}}$

(3.a) Majoration à établir : Le fait que q soit définie positive et le "2" font que "ça sent l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ" !

(BIB : Tissier Agreg Bréal p 200 ; Lebœuf p 94)

On remarque que (cela est une série des différences) $u_n = nU_n - (n-1)U_{n-1}$

Donc en multipliant les deux membres par U_n on a : $nU_n^2 - (n-1)U_{n-1}U_n = u_nU_n$

On multiplie par 2, pour avoir un double produit : $2nU_n^2 = 2(n-1)U_{n-1}U_n + 2u_nU_n \leq (n-1)[U_n^2 + U_{n-1}^2] + 2u_nU_n$ (car $2xy \leq x^2+y^2 \iff 0 \leq (x-y)^2$).

Ainsi $(n+1)U_n^2 - (n-1)U_{n-1}^2 \leq 2u_nU_n$

On pose pour simplifier $A_N = \sum_{k=1}^{N} u_k^2$ et $B_N = \sum_{k=1}^{N} U_k^2$; la relation précedente donne :

$$B_N + \sum_{k=1}^{N}(kU_k^2 - (k-1)U_{k-1}^2) \leq 2\sum_{k=1}^{N} u_kU_k \text{ (*) C.q.f.d.}$$

(3.c) *(Tiens il manque le (3.b) ;*

Reprenant la question précédente exactement à (*) on a :

$\leq_{\text{(Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète)}} 2\sqrt{A_N}\sqrt{B_N}$

Soit $B_N + nU_N^2 \leq 2\sqrt{A_N}\sqrt{B_N}$:

À fortiori $B_N + \leq 2\sqrt{A_N}\sqrt{B_N}$, et en élevant au carré et réduisant par $B_N > 0$ on a $\boxed{\mathbf{B_N \leq 4A_N \leq 4A}}$, et la série $\sum U_n^2$ (à termes positifs !) ayant ses sommes partielles majorées est convergente.

Partie III : Inégalité style Hadamard

(1) Décomposition de S en produit de triangulaires :

Cette question est classique, mais un embryon de suggestion pour guider le candidat n'aurait pas été superflu !

(BIB : Leichtnam 204 ; spm 2 p 69, 81 ; br 79 p 90 ; Andler p 132 ; S peut être considérée comme la matrice d'un produit scalaire euclidien dans la base canonique. Or par le procédé de GRAM-SCHMIDT, il existe une base

orthognormée unique pour ce produit scalaire consturie de manière échelonnée telle que $(f_i|e_i) > 0$. Dans cette nouvelle base le produit scalaire aura pour matrice I.

Soit T la matrice de passage (triangulaire à élément diagonaux > 0) associée à ce changement de base : $I =^t TST$; Ainsi $S = (^T)^{-1}T^{-1} =^H H$ en posant $H = T^{-1}$. (H est également triangulaire à éléments diagonaux strictement positifs)

---

(2) Majorer det(S) : (inégalité "voisine" de celle d'HADAMARD) Posant $H = (h_{i,j})$ on a par le produit ligne-colonne $S =^t HH$: $s_{i,i} = \sum_{j=1}^{i} h_{i,j}^2$, d'où $0 < det(S) = (det(H))^2 = \prod h_{i,i}^2 \leq \prod(s_{i,i})$.

Remarquons qu'on n'avait pas besoin de la question précédente pour conclure : En effet S étant symétrique réelle est ortho-diagonalisable. Ses valeurs propres sont en outre > 0. Il existe donc une matrice symétrique positive telle que $A^2 = S$ mais $s_{i,j} = (S(e_i)|e_j) = (A^2(e_i)|e_j) = (A(e_i)|A(e_j))$; D'après l'inégalité usuelle d'Hadamard : $det(S) = (det(A))^2 \leq \prod_{i=1}^{n}(A(e_i)|A(e_i)) = \prod_{i=1}^{n}(S(e_1)|e_i) = \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}$.

Partie IV : Série de Matrices symétriques

(1.a) Convergence vers une matrice positive : D'après le préambule U positive est automatiquement symétrique donc orthodiagonalisable sur $\mathbb{R}$, à valeurs propres réelles > 0.

Comme la convergence de la série donnée, ne dépend pas de la base (comme on le vérifie en multipliant à droite par P et à gauche par P^{-1}), la série $\sum b_k U'^k = diag(\sum b_k \alpha_1^k, ..., \sum b_k \alpha_n^k) = diag(g(\alpha_1), ..., g(\alpha_n)$, qui ayant ses éléments diagonaux strictement positifs, est associée à une forme quadratique > 0.

On a immédiatement $\boxed{\mathbf{g(U) = P\ diag(g(\alpha_1), ..., g(\alpha_n)\ {}^tP}}$

(1.b) Majorer deg(g(U)) :

Quel est l'intérêt de la question, puisqu'on a la valeur exacte ? On peut dire $det(g(u)) \leq [g(max(\alpha_i))]^n$.

(2.a) Existence de V : U étant ortho-diagonalisable, il existe une matrice orthogonale P telle que $\Delta =^t PUP$ soit $U = P\Delta^tP$; en faisant le produit ligne par colonne la matrice $V = P$ répond à la question.

(2.b) $\mathbf{0 < u_{i,i} < R}$: En effet c'est un barycentre à coefficients ≥ 0 mais pas tous nuls (car la somme des carrés dans une colonne est 1, puisque V est orthogonale), des α_i qui sont dans $]0, R[$, par hypothèse.

(2.c) Minoration :

Comme $\ln \circ g$ est convexe : $\sum_i \ln(g(u_{i,i})) \leq \sum_i \sum_k (v_{i,k}^2 \ln(g(\alpha_k)) = \sum_k \ln(g(\alpha_k)) = \ln \prod_k g(\alpha_k) = \ln(det g(U))$

Le log étant croissant on a bien l'inégalité demandée.

(2.d) Retrouver (III.d) : Il suffit de trouver une fonction g avec $\ln \circ g$ concave, pour que l'inégalité soit dans le sens inverse. Les inégalités seront en sens inverse ; de plus l'hypothèse de $b_k > 0$ est inutile, l'inégalité pouvant être large. $g(x) = x$ avec $R = +\infty$, donne le résultat.

Partie V : Exemples

(1) Spectre de U :

On a $U = (a-b)I + bK$, où la matrice K n'a que des 1 et est de rang 1. donc $(a-b)$ est valeur propre de U ; comme la dimension de l'espace propre associé est (si b non nul cas trivia) $n - rang(U - (a-b)I) = n - 1$, la multiplicité de $(a-b)$ est au moins $n-1$: il ne reste qu'une valeur propre t' que l'on va obtenir par la trace : $na = (n-1)(a-b) + t'$ donc $t' = a + (n-1)b$;

Le spectre de U est donc $\boxed{\mathbf{t = (a-b) \text{ de multiplicité au moins n-1 et } t' = a + (n-1)b}}$. Elles sont distinctes puisque $0 < b < a$.

---

2) Hypothèses à vérifier : U est symétrique réelle à valeurs propres > 0, compte tenu de $0 < b < a$; enfin $g(x)) = 2 + \sum_{1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ a bien tous ses coefficients positifs strictement. Le rayon R est infini, comme pour e^x ; Si l'on pose $F = \ln \circ g$ on a $F'(x) = \frac{e^x+1-1}{1+e^x}$ qui est bien croissante, donc F est bien convexe.

---

(3) Polynôme annulateur : Comme U symétrique est diagonalisable, son polynôme minimal est puisque $t \neq t'$ (sinon il serait de degré 1, U serait scalaire cela se verrait !) $\boxed{(X-a+b)(X-a-(n-1)b)}$

---

(4) Calculer $\mathbf{U^k}$:

On peut utiliser le polynôme annulateur précédent et la méthode de division : mis il est plus simple comme U est diagonalisable de remarquer que (voir cours) $U^k = t^kV + t'^kW$ où V et W sont des matrices constantes qu'on détermine avec $k = 0..1$; $I = V + W$ et $U = Vt + Wt'$, et comme $t' - t = nb$ les formules de Cramer ou la méthode des transformations élémentaires donnent $V = \frac{1}{nb}t'I - U$ et $W = \frac{1}{nb}U - tI$ et ainsi $\boxed{\mathbf{U^k = \frac{1}{nb}[t^k(t'I - U) + t'^k(U - tI)}}$

On peut regrouper si l'on veut !

On peut aussi procéder en remarquant que : Par une récurrence triviale $K^p = n^{p-1}K$; $p \geq 1$; Comme K et I commutent, la formule du binôme est applicable et donne (le vérifier) le même résultat.

En voyant que cette formule contient le cas $k = 0$, on a aussi $\boxed{\mathbf{\exp(U) = e^t(t'I - U) + e^{t'}(U - tI)}}$

---

(5) Encadrer det(I+exp(U)) : Quel intérêt puisqu'on a la valeur exacte $(1 + e^t)^{n-1}(1 + e^{t'})$.

---

6) Quadrique : Elle a pour équation, sur une base orthonormée propre : $(a-b)(x^2+y^2) + (a+2b)z^2 = 1$. La signature du premier membre étant $(3, 0)$ c'est un ellipsoide de révolution autour de Oz, qui n'est jamais une sphère, puisque $a - b \neq a + 2b$.

L'axe est Oz car $(a-b)$ est double, ou encore parce que l'équation s'écrit $(a-b)(x^2+y^2+z^2) + (3b)z^2 = 1$ qui a bien la forme Φ(Sphère,plan)=0.

E3A MP 3 2000