TB22

e3a concours

CONCOURS ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 2 MP

durée 3 heures

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel euclidien; on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E; pour tout endomorphisme f, f^* désigne l'adjoint de f et, pour tout sous–espace vectoriel F de E, on note p_F la projection orthogonale de E sur F : $p_F \in \mathcal{L}(E)$.

1°. Soit $f = p_F \circ g$ où F est un sous–espace vectoriel de E et $g \in \mathcal{O}(E)$.

(a) Préciser $\mathrm{Ker}\ f$ et $\mathrm{Im}\ f$ à l'aide de F et g.

(b) Montrer l'existence d'un unique sous–espace vectoriel F' de E tel que :

$$p_F \circ g = g \circ p_{F'}.$$

(c) Donner une expression simplifiée de $f \circ f^* \circ f$.

2°. Soit F un sous–espace vectoriel fixé de E, distinct de E et de $\{0\}$.

(a) Soit $g \in \mathcal{O}(E)$; établir une condition nécessaire et suffisante pour que p_F et g commutent.

(b) Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des $p_F \circ g$ tels que $p_F \circ g = g \circ p_F$ avec $g \in \mathcal{O}(E)$; montrer que $(\mathcal{G}, \circ)$ est un groupe isomorphe à un groupe connu; $\mathcal{G}$ est-il un sous-groupe du groupe linéaire de E ?

(c) Montrer que l'ensemble des $p_F \circ g$ obtenu lorsque g décrit $\mathcal{O}(E)$ n'est pas stable par l'opération de composition.

3°. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f^* \circ f = f$.

(a) Établir que $f \circ f^*$ est une projection orthogonale.

(b) Montrer que : $\forall x \in (\mathrm{Ker}\ f)^{\perp}, \quad \|f(x)\| = \|x\|$.

(c) En déduire l'existence d'un sous–espace vectoriel F de E et d'une application $g \in \mathcal{O}(E)$ tels que : $f = p_F \circ g$.

Exercice 2

1°. (a) Pour quels réels x la fonction $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle définie ?

(b) Pour $t > 0$ fixé, développer en série entière en 0 la fonction $x \mapsto \dfrac{t^x}{(1+t)^2}$.

2°. (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^n\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \dfrac{n!}{4} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leqslant n!$.

3°. (a) Établir une relation simple entre $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que la fonction f est développable en série entière en 0 et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

4°. On pose dans cette question $x = \dfrac{1}{2p}$, $\;p \in \mathbb{N}^*$ et l'on veut calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

On rappelle que pour $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ fixé, la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u-\omega}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto \ln|u-\omega| + \mathrm{i}\,\arg(u-\omega)$, où $\arg(u-\omega)$ désigne l'argument de $u-\omega$ strictement compris entre $-\pi$ et π.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{2p}}$.

(b) En précisant les éléments de l'ensemble Ω, établir la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$:

$$\frac{1}{1+u^{2p}} = -\frac{1}{2p} \sum_{\omega \in \Omega} \frac{\omega}{u-\omega}.$$

(c) Montrer qu'en calculant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{2p}}$ la partie logarithmique s'annule.

(d) En posant $\alpha = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/p}$, simplifier $(1-\alpha)\displaystyle\sum_{k=-p}^{p-1} k\,\alpha^k$ et en déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^{1/2p}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.$$

5°. Montrer que la fonction $\quad x \mapsto \pi x - f(x)\sin \pi x$ est développable en série entière en 0 et en déduire que :

$$\forall x \in]-1,+1[, \quad \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi x}{\sin \pi x}.$$

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3 et $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ une base de E que l'on ne suppose pas orthonormale; l'ensemble $\mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{a} + \mathbb{Z}\vec{b} + \mathbb{Z}\vec{c}$ des combinaisons linéaires de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ à coefficients entiers forme alors un sous-groupe de $(E, +)$ appelé *réseau* engendré par $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

1°. Soit D une *droite réticulaire* de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire une droite vectorielle de E contenant au moins un vecteur non nul de $\mathcal{R}$; établir l'existence dans $D \cap \mathcal{R}$ de $\vec{u} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b} + z\,\vec{c}$ non nul tel que $x^2 + y^2 + z^2$ soit minimum et en déduire que $D \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u}$.

2°. Notant $\Delta =$ det $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ le produit mixte de $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, on pose :

$$\vec{A} = \frac{1}{\Delta}(\vec{b} \wedge \vec{c}), \quad \vec{B} = \frac{1}{\Delta}(\vec{c} \wedge \vec{a}), \quad \vec{C} = \frac{1}{\Delta}(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

(a) Exprimer simplement le produit scalaire $\quad (x\,\vec{a} + y\,\vec{b} + z\,\vec{c} \mid \alpha\,\vec{A} + \beta\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C})$.

(b) Montrer que $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ forme une base de E.

3°. Soit P un *plan réticulaire* de $\mathcal{R}$, c'est-à-dire un plan vectoriel de E contenant au moins deux vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{R}$; montrer l'existence d'un couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs linéairement indépendants de $P \cap \mathcal{R}$ tels que $X^2 + Y^2 + Z^2$ soit minimum lorsque $\vec{u} \wedge \vec{v} = X\,\vec{A} + Y\,\vec{B} + Z\,\vec{C}$, et en déduire que $P \cap \mathcal{R} = \mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$.

4°. Dans ce qui suit, P désigne un plan réticulaire de $\mathcal{R}$, comme défini ci-dessus.

(a) Établir l'existence d'un triplet (α, β, γ) de nombres entiers relatifs premiers entre eux et tels que, pour $\vec{w} = x\,\vec{a} + y\,\vec{b} + z\,\vec{c}$, on ait :

$$[\vec{w} \in P \cap \mathcal{R}] \iff [(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \text{ et } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0].$$

(b) Étant donné un tel triplet (α, β, γ), on définit pour $k \in \mathbb{Z}$ les plans affines $\mathcal{P}_k$ d'équations $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$ dans la base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$; montrer que les $\mathcal{P}_k \cap \mathcal{R}$ définissent une partition de l'ensemble $\mathcal{R}$.

(c) Exprimer la distance entre $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ à l'aide de $\vec{N} = \alpha\,\vec{A} + \beta\,\vec{B} + \gamma\,\vec{C}$.