$\boxed{\textbf{E3A- Math 2 - MP}}$

Exercice 1

1. **a.** On a $f(x) = 0 \iff g(x) \in F^{\perp} \iff x \in g^{-1}(F^{\perp})$,

$$\text{donc}\, \mathrm{Ker}\, f = g^{-1}(F^{\perp}).$$

Le rang de f est donc $n - \dim(F^{\perp})$, c'est donc $\dim F$, et puisque $\mathrm{Im}\, f \subset F$,

$\boxed{\textbf{Finalement}\ \mathrm{Im}\, f = F.}$

---

b. D'après le cours, pour $h \in GL(E)$, on a $h \circ p_F \circ h^{-1} = p_{h(F)}$ (précisément, le cours décrit les espaces propres d'un conjugué); ici, on voit donc que $g^{-1} \circ p_F \circ g = p_{F'}$, avec $\boxed{\mathbf{F' = g^{-1}(F)}.}$

---

c. On calcule $f \circ f^* \circ f = p_F \circ g \circ g^* \circ p_F^* \circ p_F \circ g$; comme $g \in \mathcal{O}(E)$, on a $g \circ g^* = Id$; de plus p_F est symétrique et idempotent; il reste $\boxed{\mathbf{f \circ f^* \circ f = p_F \circ g = f}.}$

---

2. **a.** Avec les notations de 1.b., il s'agit d'écrire: $p_F \circ g = g \circ p_F$, ou $g \circ p_{F'} = g \circ p_F$, ie $p_{F'} = p_F$, la condition nécessaire et suffisante est $F' = F$, soit enfin

$$p_F \circ g = g \circ p_F \iff g^{-1}(F) = F \iff \mathbf{g(F) = F}.$$

---

b. L'ensemble $\mathcal{G}$ ne contient pas Id, car chacun de ses éléments a une image incluse dans F (d'après 1.a.).

Donc, $\mathcal{G}$ n'est pas un sous-groupe du groupe linéaire.

Soit $h \in \mathcal{G}$, donc $h = p_F \circ g$, où $g(F) = F$. On note qu'alors (puisque g est un automorphisme orthogonal), $g(F^{\perp}) = F^{\perp}$.
Si $x \in F$, $h(x) = p_F(g(x)) = g(x)$ (puisque $g(x) \in F$); ainsi, h induit sur F l'endomorphisme g_F, élément de $\mathcal{O}(F)$; et, si $x \in F^{\perp}$, $h(x) = p_F(g(x)) = 0$, car $g(x) \in F^{\perp}$.
On peut donc considérer $\Phi : \mathcal{G} \to \mathcal{O}(F), h \mapsto h_F$, et $\Psi : \mathcal{O}(F) \to \mathcal{G}$, $q \mapsto h$, où $h(x) = q(x)$ si $x \in F$, $h(x) = 0$ si $x \in F^{\perp}$. Cette deuxième application est bien à valeurs dans $\mathcal{G}$: si l'on construit g telle que $g(x) = q(x)$ si $x \in F$ et $g(x) = x$ si $x \in F^{\perp}$, on a un automorphisme orthogonal par recollement, et $p_F \circ g = h$. Pour $h \in \mathcal{G}$, on a maintenant $\Psi(\Phi(h)) = h$, et, pour $q \in \mathcal{O}(F)$, $\Phi(\Psi(q)) = q$. Enfin, $\Phi(h \circ h') = (h \circ h')_F = h_F \circ h'_F = \Phi(h) \circ \Phi(h')$.
La bijection construite permet de transporter sur $\mathcal{G}$ la structure de groupe de $\mathcal{O}(F)$, et a posteriori est un isomorphisme entre les deux groupes.

$(\mathcal{G}, \circ)$ est isomorphe à $(\mathcal{O}(F), \circ)$.

---

c. Un élément de la forme $p_F \circ g$ ne peut être nul: il faudrait que $\mathrm{Im}\, g \subset F^\perp$, ce qui est exclu puisque $\mathrm{Im}\, g = E$. En revanche, un produit $p_F \circ g \circ p_F \circ h$ peut être nul (et donc hors de l'ensemble initial, qui n'est ainsi pas stable par composition). Il suffit que $g(p_F(h(E))) \subset F^\perp$, donc que $g(p_F(E)) \subset F^\perp$, soit enfin $g(F) \subset F^\perp$. Un tel exemple est possible pourvu que $\dim F^\perp \geq \dim F$.

L'ensemble n'est pas stable par composition en général.

---

3. On établit ici la réciproque de 1.c.
a. L'endomorphisme $f \circ f^*$ est symétrique, et $f \circ f^* \circ f \circ f^* = f \circ f^*$, donc c'est aussi un idempotent, finalement c'est un projecteur orthogonal. C'est donc le projecteur sur son image, qui est $\mathrm{Im}\, f \circ f^* = \mathrm{Im}\, f$ (on a en effet clairement $\mathrm{Im}\, f \circ f^* \subset \mathrm{Im}\, f$, mais comme $f = (f \circ f^*) \circ f$, on a aussi $\mathrm{Im}\, f \circ f^* \supset \mathrm{Im}\, f$).

$f \circ f^*$ est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}\, f$.

---

b. Il s'agit de voir que $(f(x) \mid f(x)) = (x \mid x)$, ou $((f^* \circ f)(x) \mid x) = (x \mid x)$ (sachant que $x \in \mathrm{Ker}\, f^\perp$). Or on sait que $f \circ (f^* \circ f - Id) = 0$, donc $\mathrm{Im}\,(f^* \circ f - Id) \subset \mathrm{Ker}\, f$, puis $\mathrm{Ker}\, f^\perp \subset \big(\mathrm{Im}\,(f^* \circ f - Id)\big)^\perp$: ainsi, si $x \in \mathrm{Ker}\, f^\perp$, alors $\big(x \mid (f^* \circ f)(x) - x\big) = 0$, ce qu'il fallait voir.

Pour $x \in \mathrm{Ker}\, f^\perp$, $||f(x)|| = ||x||$.

---

c. On sait qu'il faut prendre $F = \mathrm{Im}\, f$. Considérons les deux sommes directes $\mathrm{Ker}\, f^\perp \oplus \mathrm{Ker}\, f = E$, $\mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f^\perp = E$; les dimensions se correspondent. On vient d'établir que la restriction de f à $\mathrm{Ker}\, f^\perp$ établit une application qui conserve la norme à valeurs dans $\mathrm{Im}\, f$, c'est donc une isométrie g_1. On choisit une quelconque isométrie g_2 entre les deux espaces vectoriels euclidiens (de même dimension) $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f^\perp$. On construit par recollement une isométrie g de E sur E. Soit $h = p_F \circ g$. Pour $x \in \mathrm{Ker}\, f^\perp$, on a $h(x) = p_F(f(x)) = f(x)$; pour $x \in \mathrm{Ker}\, f$, $h(x) = p_F(0) = 0 = f(x)$.

On a bien ainsi construit F et g tels que $f = p_F \circ g$.

Exercice 2

1. **a.** L'intégrande $t \mapsto h(t) = \dfrac{t^x}{(1+t)^2}$ est positive et continue sur $I =]0, +\infty[$, l'existence de $f(x)$ équivaut à la sommabilité de h sur I. Or

$h(t) \sim t^x$ en 0, et $h(t) \sim t^{x-2}$ en $+\infty$; la condition nécessaire et suffisante est $x > -1$ et $x < 1$, soit l'ensemble de définition:

$$\mathbf{D} =]-\mathbf{1}, \mathbf{1}[.$$

---

b. On connaît l'égalité, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathbf{t^x}}{\mathbf{(1+t)^2}} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{\mathbf{(x\ln t)^n}}{\mathbf{n!(1+t)^2}} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{+\infty} \frac{\mathbf{(\ln t)^n}}{\mathbf{n!(1+t)^2}}\mathbf{x^n}.$$

---

2. **a.** Pour $n \geq 1$, une intégration par parties donne

$$I_n = \int_0^1 1.(\ln t)^n \mathrm{d}t = \big[t(\ln t)^n\big]_0^1 - \int_0^1 n(\ln t)^{n-1}\mathrm{d}t = -nI_{n-1}.$$

Ainsi, partant de $I_0 = 1$, il vient $\boxed{\forall \mathbf{n} \in \mathbb{N},\ \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (\ln \mathbf{t})^{\mathbf{n}}\mathrm{d}\mathbf{t} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{n}}\mathbf{n}!}$

---

b. On encadre $\dfrac{1}{(1+t)^2}$ entre $\frac{1}{4}$ et 1 (pour $t \in [0, 1]$).

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ est ainsi encadrée entre $\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \mid \mathbf{I_n} \mid \text{ et } \mid \mathbf{I_n} \mid}$.

---

3. **a.** Le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ donne facilement

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{\mathbf{(\ln t)^n}}{\mathbf{(1+t)^2}}\mathrm{d}\mathbf{t} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{n}} \int_{\mathbf{1}}^{+\infty} \frac{\mathbf{(\ln t)^n}}{\mathbf{(1+t)^2}}\mathrm{d}\mathbf{t}.$$

Remarque: on retient que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t = 0$ si n est impair, et vaut $\displaystyle 2\int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ si n est pair.

---

b. On a $\displaystyle f(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x,t)\mathrm{d}t$, où $\displaystyle a_n(x,t) = \frac{x^n}{n!}\frac{(\ln t)^n}{(1+t)^2}$.

Regardons $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mid a_n(x,t) \mid \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|^n}{n!}\left(\int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t\right)$.

La parenthèse peut être majorée par $2n!$, d'après 2b. et 3a. On peut donc majorer le tout par $\displaystyle 2\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$, quantité donc finie si $|x| < 1$. Dans ces

conditions, le théorème d'intégration terme à terme peut être appliqué, et il légitime l'échange des symboles, fournissant (pour $x \in]-1,1[$): $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}(\int_0^{+\infty} \frac{\ln t^n}{(1+t)^2}\mathrm{d}t) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(\int_0^1 \frac{(\ln t)^{2n}}{(1+t)^2}\mathrm{d}t)$.
La minoration obtenue au 2b. permet de voir que le rayon de la série entière obtenue est au plus 1, finalement:

Le rayon de la série entière obtenue est 1, et sa somme coïncide avec f sur $\mathbf{D} =]-1,1[$.

---

4. **a.** On pose $t = u^{2p}$, ce qui donne pour valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2pu^{2p}}{(1+u^{2p})^2}\mathrm{d}u$. On effectue une intégration par parties, en écrivant $\int_0^{+\infty} u\frac{2pu^{2p-1}}{(1+u^{2p})^2}\mathrm{d}u = [\frac{-u}{1+u^{2p}}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{2p}}$.

$$\text{Finalement } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{t}^{1/2\mathbf{p}}}{(1+\mathbf{t})^2}\mathrm{d}\mathbf{t} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{1+\mathbf{u}^{2\mathbf{p}}}}.$$

---

b. Soit Ω l'ensemble des racines $2p$-ièmes de -1, qui sont les $\exp(i\theta)$, où $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2p}, -p \leq k \leq p-1$. On sait qu'il existe une décomposition $\frac{1}{1+u^{2p}} = \sum_{\omega\in\Omega} \frac{a_\omega}{u-\omega}$; et on calcule $a_\omega = \frac{1}{2p\omega^{2p-1}} = \frac{\omega}{2p\omega^{2p}} = -\frac{\omega}{2p}$.
Finalement: $\boxed{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}+\mathbf{u}^{2\mathbf{p}}} = -\frac{\mathbf{1}}{2\mathbf{p}}\sum_{\omega\in\mathbf{\Omega}} \frac{\omega}{\mathbf{u}-\omega}}.$

---

c. Notons Ω_+ les éléments de Ω de partie imaginaire strictement positive; les éléments manquants sont tous les opposés de ces éléments. Quand on calcule $\int_0^X \frac{\mathrm{d}u}{1+u^{2p}}$, à un facteur près, la contribution logarithmique est $[\sum_{\omega\in\Omega} \omega \ln \mid u-\omega \mid]_0^X = \sum_{\omega\in\Omega} \omega\ln \mid \frac{X-\omega}{-\omega} \mid = \sum_{\omega\in\Omega} \omega \ln \mid X-\omega \mid$
$= \sum_{\omega\in\Omega_+} \big(\omega\ln \mid X-\omega \mid - \omega\ln \mid X+\omega \mid\big) = \sum_{\omega\in\Omega_+} \omega\ln \mid \frac{X-\omega}{X+\omega} \mid$. Quand on fait tendre X vers $+\infty$, on obtient ainsi la valeur zéro.

La contribution logarithmique à l'intégrale est nulle.

---

d. On part de $\displaystyle\sum_{k=-p}^{p-1}\alpha^k = \frac{\alpha^{-p}-\alpha^p}{1-\alpha}$; on dérive (au sens des fractions rationnelles, réelles ou complexes):

$$\sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^{k-1} = \frac{-p\alpha^{-p-1}-p\alpha^{p-1}}{1-\alpha} + \frac{\alpha^{-p}-\alpha^p}{(1-\alpha)^2};$$

on multiplie enfin par $(1-\alpha)\alpha$; il reste $-p\alpha^{-p}-p\alpha^p+\dfrac{\alpha}{1-\alpha}(\alpha^{-p}-\alpha^p)$. Quand on choisit $\alpha=\exp(i\pi/p)$, il reste $-p(-1-1)+0=2p$.

$$\text{Ainsi, pour } \alpha=\exp(i\pi/p),\ \sum_{k=-p}^{p-1} k\alpha^{k-1} = 2p.$$

Quand $X\to+\infty$, une quantité comme $\arg(X-\omega)$ tend vers 0. Finalement, l'intégrale qui nous occupe vaut seulement

$$\frac{1}{2p}\sum_{\omega\in\Omega}\omega\, i\arg(-\omega) = \frac{1}{2p}\sum_{\omega\in\Omega}-\omega\, i\arg(\omega).$$

L'élément général ω s'écrit $\exp(i\pi/2p)\alpha^k$, on calcule donc

$$\frac{-1}{2p}\sum_{k=-p}^{p-1}\exp(i\pi/2p)\alpha^k\, i\,(\frac{\pi}{2p}+\frac{k\pi}{p})$$

$$= \frac{-i\pi}{(2p)^2}\exp(i\pi/2p)\sum_{k=-p}^{p-1}\alpha^k - \frac{i\pi}{2p^2}\exp(i\pi/2p)\sum_{k=-p}^{p-1}k\alpha^{k-1}$$

$$= 0-\frac{i\pi}{p}\exp(i\pi/2p)\frac{1}{1-\alpha} = i\frac{\pi}{p}\frac{1}{(\exp(i\pi/2p)-\exp(-i\pi/2p))} = \frac{\pi/2p}{\sin(\pi/2p)}.$$

$$\text{On conclut bien: pour } p\in\mathbb{N}^*,\ \boxed{\mathbf{f}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2p}}) = \frac{\pi/\mathbf{2p}}{\sin(\pi/\mathbf{2p})}.}$$

---

5. Les théorèmes sur les séries entières assurent que $h(x)=\pi x-f(x)\sin\pi x$ coïncide avec une série entière au moins sur $]-1,1[$, puisque c'est le cas pour πx, $f(x)$ et $\sin\pi x$. D'autre part, $h(\frac{1}{2p})=0$ d'après la question 4. On conclut alors que h est identiquement nulle sur $]-1,1[$. En effet, soit $h(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ le développement en série entière de h (sur $]-1,1[$). Supposons les a_n non tous nuls, soit r le plus petit indice d'un a_n non nul: alors $h(x)=x^r\displaystyle\sum_{n=r}^{+\infty}a_nx^{n-r}=x^r\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+r}x^n$. Notons $q(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n+r}x^n$:

c'est une fonction bien définie sur $]-1,1[$ sauf peut-être en zéro, puisqu'elle y vaut $h(x)/x^r$, mais comme c'est une somme de série entière elle est définie et continue sur $]-1;1[$ entier. Cette fonction q vaut a_r en zéro, donc est non nulle en ce point, donc aussi sur un voisinage de zéro. Il en résulte qu'il existe un voisinage de zéro tel que, dans ce voisinage, h ne s'annule qu'en zéro. Cela contredit sa nullité aux points $1/2p$. Finalement tous les a_n sont nuls, donc h est identiquement nulle sur $]-1,1[$.

$$\forall x \in]-1,1[,\ \int_{\mathbf{0}}^{+\infty} \frac{\mathbf{t^x}}{\mathbf{(1+t)^2}}\mathrm{d}\mathbf{t} = \frac{\pi\mathbf{x}}{\sin\pi\mathbf{x}}.$$

Exercice 3

1. Soit $P = \{n \in \mathbb{N}^*, \exists x,y,z \in \mathbb{Z}, n = x^2+y^2+z^2, xa+yb+zc \in D\cap\mathcal{R}\setminus\{0\}\}$. Par hypothèse, P est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. On peut donc choisir un plus petit élément de P, qui correspond à un $u = xa+yb+zc \in D\cap\mathcal{R}\setminus\{0\}$ pour lequel $x^2+y^2+z^2$ est minimum. Puisque $u \in D\cap\mathcal{R}$, alors le sous-groupe engendré par u, soit $\mathbb{Z}u$, est aussi inclus dans $D\cap\mathcal{R}$ (qui est un sous-groupe additif de E comme intersection de deux sous-groupes). Réciproquement, tout élément de $D\cap\mathcal{R}$ est déjà un élément de D, donc de la forme tu, $t \in \mathbb{R}$. Alors $v = (t-[t])u \in D\cap\mathcal{R}$ par différence (où $[t]$ est la partie entière de t). Mais la somme des carrés de ses composantes dans (a,b,c) vaut $(t-[t])^2(x^2+y^2+z^2)$, strictement plus petit que $x^2+y^2+z^2$, donc, par choix de u, il faut que $(t-[t])u = 0$, finalement l'élément considéré dans $D\cap\mathcal{R}$ est $[t]u \in \mathbb{Z}u$.

   Il existe $u \in D\cap\mathcal{R}, u \neq 0$, tel que $D\cap\mathcal{R} = \mathbb{Z}u$.

---

2. **a.** On calcule $(a \mid A) = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$, $(a \mid B) = 0 = (a \mid C)$, et de même pour les autres. On a ainsi des relations de type $(e_i \mid f_j) = \delta_{ij}$ (pour $e_i = a,b,c,\ f_i = A,B,C$): on a construit la *base duale* de (a,b,c). Maintenant, il est clair que $\boxed{(\mathbf{xa}+\mathbf{yb}+\mathbf{zc} \mid \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}+\gamma\mathbf{C}) = \mathbf{x}\alpha+\mathbf{y}\beta+\mathbf{z}\gamma.}$

---

   b. Et en effet, cette *base duale...* est bien une base: par exemple, si $\alpha A+\beta B+\gamma C = 0$, alors $\forall x,y,z$, on a $x\alpha+y\beta+z\gamma = 0$, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

   $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$ est une base.

---

3. Prenons deux vecteurs $u = pa+qb+rc, v = p'a+q'b+r'c$ de $\mathcal{R}$. Leur produit vectoriel vaut $pq'\Delta C+pr'(-\Delta B)+qp'(-\Delta C)+qr'\Delta A+rp'\Delta B+rq'(-\Delta A) = \Delta\big((qr'-rq')A+(rp'-pr')B+(pq'-qp')C\big)$. La somme $X^2+Y^2+Z^2$ associée vaut donc $\Delta^2\big((qr'-rq')^2+(rp'-pr')^2+(pq'-qp')^2\big)$.

Puisque Δ^2 est constant, on la minimise en minimisant $\big((qr'-rq')^2+(rp'-pr')^2+(pq'-qp')^2\big)$, qui est un *entier* strictement positif quand u et v sont indépendants dans $\mathcal{R}$. On assure ainsi comme plus haut l'existence d'un couple (u,v) de vecteurs indépendants de $P\cap\mathcal{R}$ qui minimise $X^2+Y^2+Z^2$ quand $u\wedge v = XA+YB+ZC$.
Puisque $u,v\in P\cap\mathcal{R}$, le groupe engendré $\mathbb{Z}u+\mathbb{Z}v$ est aussi inclus dans $P\cap\mathcal{R}$. Tout élément de $P\cap\mathcal{R}$ est dans le plan vectoriel engendré par u et v (c'est P), donc s'écrit $tu+sv$. On considère $w=(t-[t])u+(s-[s])v$, qui est encore dans $P\cap\mathcal{R}$. Si par exemple $t-[t]\neq 0$, on fait le produit vectoriel avec v, on trouve $(t-[t])(u\wedge v)\neq 0$, la somme de carrés associée est $(t-[t])^2(X^2+Y^2+Z^2)$, strictement plus petite que celle obtenue pour $u\wedge v$, c'est absurde. De même, $s=[s]$, finalement l'élément est $[t]u+[s]v\in\mathbb{Z}u+\mathbb{Z}v$.

On trouve u,v indépendants dans $P\cap\mathcal{R}$ tels que $P\cap\mathcal{R}=\mathbb{Z}u+\mathbb{Z}v$.

---

4. **a.** Si $w\in P\cap\mathcal{R}$, il faut que $x,y,z\in\mathbb{Z}$. Il faut de plus que w soit dans le plan engendré par u et v, donc que $[w,u,v]=0$, ce qui s'écrit $(xa+yb+zc\mid u\wedge v)=0$. Notons, comme on l'a fait plus haut, $u\wedge v = XA+YB+ZC=\Delta(\alpha A+\beta B+\gamma C)$, avec α,β,γ entiers. La condition devient $xX+yY+zZ=0$ ou $\Delta(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0$ puis $(\alpha x+\beta y+\gamma z)=0$. En divisant les trois nombres par leur pgcd, on se ramène à la même condition où α,β,γ sont premiers entre eux.
Réciproquement, si $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ et x,y,z entiers, d'une part $w\in\mathcal{R}$, d'autre part, on a écrit qu'il est dans le plan engendré par u et v, donc $w\in P\cap\mathcal{R}$.

$$\mathbf{xa+yb+zx\in P}\cap\mathcal{R}\iff \mathbf{(x,y,z)}\in\mathbb{Z}^{\mathbf{3}}\text{ et }\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}+\gamma\mathbf{z}=\mathbf{0}.$$

---

b. Il est manifeste que les $\mathcal{P}_k\cap\mathcal{R}$ sont deux à deux disjoints et que leur réunion reconstitue l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}$ pour lesquels $\alpha x+\beta y+\gamma z$ est un élément de $\mathbb{Z}$, donc $\mathcal{R}$ tout entier. Il reste à voir que chacun est non vide. Or, puisque α,β,γ sont premiers entre eux, on sait que $\alpha\mathbb{Z}+\beta\mathbb{Z}+\gamma\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$, on peut en particulier trouver un triplet (x,y,z) d'entiers vérifiant $\alpha x+\beta y+\gamma z=k$. Le point $xa+yb+zc$ est alors dans $\mathcal{P}_k\cap\mathcal{R}$.

Les $\mathcal{P}_k\cap\mathcal{R}$ forment une partition de $\mathcal{R}$.

---

c. L'équation de $\mathcal{P}_k$ s'écrit $(N\mid w)=k$, ou encore $(n\mid w)=\frac{k}{||N||}$, où $n=\frac{N}{||N||}$, vecteur unitaire.

La distance entre $\mathcal{P}_k$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ est alors $\frac{k+1}{||N||}-\frac{k}{||N||}=\frac{1}{||N||}$.