PO22

Concours ENSAM - ESTP - ECRIN - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques 1 MP

durée 3 heures

Exercice 1

f est l'unique fonction impaire de période 2π, valant 1 sur l'intervalle $]0,\pi[$ et 0 en π.

1°. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.

2°. Exprimer $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{4N}\frac{\sin\left[(2p+1)\,k\,\frac{\pi}{4}\right]}{2p+1}\,\sin\left[3k\,\frac{\pi}{4}\right]\right)$ où $k\in\mathbb{Z}$ à l'aide de f.

3°. Montrer la convergence de la suite $S_N=\displaystyle\sum_{p=-N}^{N}\frac{1}{8p+5}$ indexée par N. On note S sa limite.

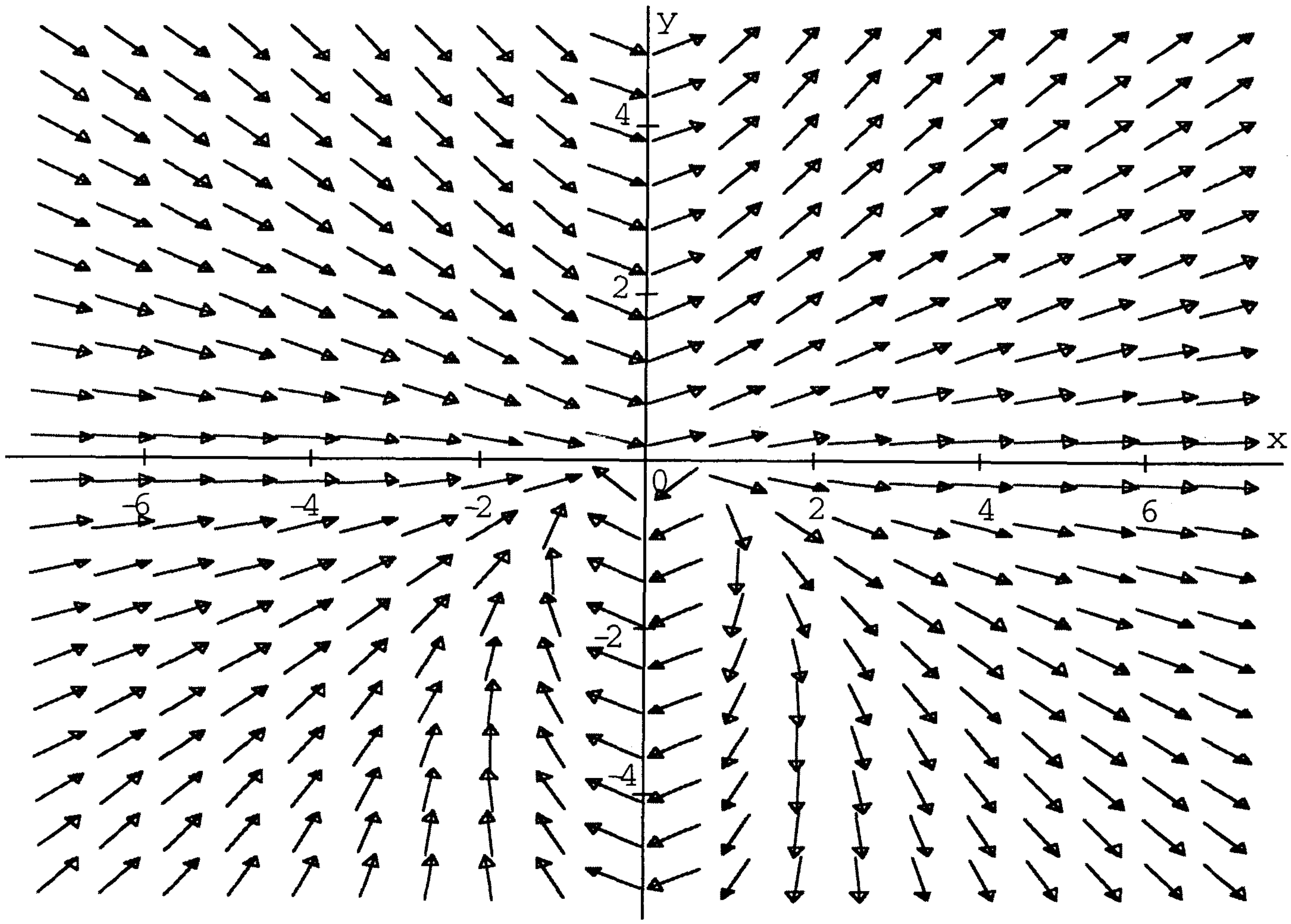
4°. Pour le calcul de S, on définit $\sigma_p=\displaystyle\sum_{k=0}^{7}\sin\left[(2p+1)\,k\,\frac{\pi}{4}\right]\,\sin\left[3k\,\frac{\pi}{4}\right]$ où $p\in\mathbb{Z}$.

(a) Calculer pour chaque p la valeur de σ_p, sachant que $\sigma_0=0$, $\sigma_1=4$ et $\sigma_2=-4$.

(b) Montrer la convergence de la suite $\displaystyle\sum_{p=0}^{4N}\frac{\sigma_p}{2p+1}$ indexée par N. On note L sa limite.

(c) Calculer la somme de Riemann définie par les extrémités de gauche de huit sous-intervalles consécutifs de longueur $\dfrac{\pi}{4}$ approchant l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\sin(3t)\,\mathrm{d}t$.

(d) En déduire la valeur de L, puis celle de S.


y
4
2
-2
-4
x
-6
-4
-2
0
2
4
6

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On recherche les trajectoires des arcs paramétrés $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) = x^2(t) + y(t) \\ y'(t) = x(t)\,y(t) \end{cases}$$

On rappelle qu'une trajectoire est un ensemble de points. Sur la figure de la page ci-contre, le champ de vecteurs $(x, y) \mapsto (x^2 + y, xy)$ est représenté en sens et direction.

On admettra l'existence et l'unicité d'une solution du système différentiel donné vérifiant des conditions initiales $x(0) = u$, $y(0) = v$.

1°. Expliciter cette solution pour $u = 0$ et $v = 0$.

2°. Recherche des trajectoires rectilignes.

(a) Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$.

(b) Que peut-on dire de ce déterminant si la trajectoire présente une inflexion ?

(c) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $x' = x^2$.

(d) Préciser la ou les trajectoires incluses dans une droite.

3°. Recherche des trajectoires tracées sur un cercle centré sur l'axe Oy et passant par l'origine.

(a) Déterminer une courbe contenant les points où la trajectoire présente une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

(b) En déduire l'unique cercle centré sur l'axe Oy, passant par l'origine, le point $(0, a)$ et contenant une trajectoire du système différentiel considéré.

(c) Réciproquement, préciser pour cette valeur de a la nature de la solution maximale passant par $(0, a)$ à l'instant $t = 0$, en utilisant par exemple la combinaison $\dfrac{x'y - y'x}{y^2}$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{C}$, où $n \geqslant 1$, et u un endomorphisme de cet espace. Pour k entier naturel non nul, u^k est la composée $(u \circ u \circ \ldots \circ u)$ où u apparaît k fois; u^0 est l'application identique.

Pour un vecteur x de E, on appelle orbite de x selon u le sous-espace de E engendré par les images successives de x : $\mathrm{Orb}_u(x) = \mathrm{Vect}\,\{x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{n-1}(x)\}$. L'endomorphisme u est dit cyclique s'il existe un vecteur particulier x_0 réalisant l'égalité $E = \mathrm{Orb}_u(x_0)$.

1°. *Étude d'un exemple*

Ici l'espace E est de dimension 4. Après quelques recherches, on a pu déterminer deux vecteurs vérifiant les propriétés suivantes :

- le vecteur a vérifie : $(a, u(a))$ est libre et $2\,u^2(a) - u(a) - a = 0$,
- le vecteur b vérifie : $(b, u(b), u^2(b))$ est libre et $u^3(b) - u^2(b) + u(b) - b = 0$.

(a) Démontrer que la dimension de $\mathrm{Orb}_u(a)$ est égale à 2.

(b) Démontrer que la restriction de u à l'orbite de a est diagonalisable et préciser la matrice de cette restriction dans une base de diagonalisation (e_1, e_2). Énoncer sans démonstration des résultats identiques concernant la restriction de u à l'orbite de b.

(c) Montrer que u est diagonalisable.

Par la suite, on notera (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de diagonalisation, e_1 étant commun aux deux orbites et e_2 étant associé à une valeur propre réelle.

(d) Déterminer un vecteur c dont l'orbite est de dimension 3, la rectriction de u à cette orbite étant annulée par le polynôme $P(t) = (2t + 1)(t^2 + 1)$. Exprimer ce vecteur dans la base de diagonalisation.

(e) En déduire que l'orbite de $a + b$ n'est pas nécessairement de dimension 4.

(f) Préciser un vecteur d telle que l'orbite de $b + d$ soit de dimension 4.

2°. *Une condition nécessaire*

On revient au cas de dimension n, et l'on suppose que l'endomorphisme u est cyclique, x_0 étant l'un des vecteurs d'orbite maximale définis dans le préambule, B étant alors la base $(x_0, u(x_0), u^2(x_0), \ldots, u^{(n-1)}(x_0))$.

(a) Préciser la matrice A de l'application u dans la base B.

(b) Préciser la première colonne des matrices A^k, k étant un entier compris entre 0 et $n - 1$.

(c) En déduire une condition nécessaire portant sur son polynôme minimal pour qu'un endomorphisme soit cyclique.