Épreuve de mathématiques I
Correction

EXERCICE

Un peu de probabilités

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_n est continue sur $[0, +\infty[$ et $g_n(x) \underset{+\infty}{=} \left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. 2.1 A l'aide d'une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} I_{n+2}(a) &= \int_0^a x^{n+2} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^a x^{n+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right) \mathrm{d}x \\ &= -\left[x^{n+1} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right]_0^a + (n+1)\int_0^a x^n \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x. \\ &= -a^{n+1} \exp\left(\frac{-a^2}{2}\right) + (n+1) I_n(a). \end{aligned}$$

Quand a tend vers $+\infty$, on obtient

$$n + 2 = (n+1) I_n. \tag{1}$$

2.2 La fonction densité de la loi normale centrée-réduite est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Comme il s'agit d'une densité, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, par conséquent

$$I_0 = \sqrt{2\pi} \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2.3 Il est clair que $\displaystyle I_1 = \int_0^{+\infty} x \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[-\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)\right]_0^{+\infty} = 1$. Par l'égalité (1), on a :

• Si $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p} = (2p-1)(2p-3)...3 \times 1 \times I_0 = \frac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{2}$$

• Si $n = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$I_{2p+1} = (2p)(2p-2)...4 \times 2 \times I_1 = 2^p p!.$$

3. 3.1 g est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} g_1(x)\mathrm{d}x = 1$. Donc g est une densité de probabilité.

3.2 Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n g(x)$ est nulle sur $]-\infty, 0[$ et coïncide avec g_n sur $[0, +\infty[$, donc $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ et $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ existent. Avec

$$E(X) = \int_0^{+\infty} g_1(x)\mathrm{d}x = I_1 = 1$$

et en utilisant (2)

$$V(X) = I_2 - I_1^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} - 1.$$

3.3 Si $x \leq 0$, $G(x) = p(Y \leq x) = 0$ car Y prend que des valeurs positives.
Si $x > 0$, alors

$$G(x) = p(Y \leq x) = p(X^2 \leq x) = p(0 \leq X \leq \sqrt{x}) = \int_0^{\sqrt{x}} g(t)\mathrm{d}t = F(\sqrt{x}).$$

La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$G'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}} F'(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{-x}{2}\right) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi la variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, par conséquent $E(Y) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ et $V(Y) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4$.

PROBLÈME

Étude d'une équation aux dérivées partielles

Première partie : Quelques résultats préliminaires utiles

1.1 **Noyau de DIRICHLET**

1.1.1 $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $-\theta \in \mathbb{R}$ et $D_n(-\theta) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(-\theta)} = \sum_{l=n}^{-n} e^{il\theta} = D_n(\theta)$. Donc D_n est 2π-périodique.

1.1.2 Par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta = 2\pi. \tag{3}$$

a

1.1.3 Si $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, alors $e^{i\theta} \neq 1$. $\sum_{-n}^{n} e^{ik\theta}$ est la somme de $2n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$, le premier étant $e^{-in\theta}$. Ainsi :

$$\sum_{-n}^{n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta}\frac{1-e^{i(2n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = e^{-in\theta}\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}\theta}-e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{n} 1 = 2n+1$.

1.2 Quelques propriétés des éléments de $\mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

1.2.1 La fonction f étant continue sur le segment $[0,2\pi]$, donc elle est bornée sur ce segment :

$$\exists M>0/\forall x\in[0,2\pi],\ \ |f(x)|\leq M.$$

Si $y\in\mathbb{R}$, il existe $x\in[0,2\pi]$ et $n\in\mathbb{Z}$ tels que $y=x+2n\pi$ et donc $|f(y)|=|f(x+2n\pi)|=|f(x)|\leq M$. Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R}$.

1.2.2 Par CHASLES, on a :

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t)\mathrm{d}t = \int_{\alpha-\pi}^{-\pi} g(t)\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{\alpha+\pi} g(t)\mathrm{d}t.$$

D'autre part,

$$\int_{\alpha-\pi}^{-\pi} g(t)\mathrm{d}t \overset{t=u-2\pi}{=} \int_{\alpha+\pi}^{\pi} g(u-2\pi)\mathrm{d}u = -\int_{\pi}^{\alpha+\pi} g(u)\mathrm{d}u.$$

D'où :

$$\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\mathrm{d}t. \tag{4}$$

1.3 Lemme de LEBESGUE

Montrons le résultat général suivant : *Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$ et $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Alors*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t = 0.$$

La propriété est claire si $f=1$, puisque :

$$\left|\int_a^b e^{i\lambda t}\mathrm{d}t\right| = \left|\frac{e^{i\lambda b}-e^{i\lambda a}}{i\lambda}\right| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

Donc, par linéarité et la relation de CHASLES, la propriété est vraie pour toutes les fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Soit maintenant $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ en escalier sur $[a,b]$ tel que

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On a alors, pour tout réel $\lambda > 0$:

$$\left| \int_a^b (f-\varphi)(t)e^{i\lambda t} \mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t) - \varphi(t)| \,\mathrm{d}t \leq (b-a)\varepsilon,$$

d'autre part, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $\forall \lambda \geq \lambda_0$ on a :

$$\left| \int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t} \right| \leq \varepsilon.$$

On obtient ainsi, $\forall \lambda \geq \lambda_0$,

$$\left| \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_a^b (f(t)-\varphi(t))e^{i\lambda t}\mathrm{d}t \right| + \left| \int_a^b \varphi(t)e^{i\lambda t}dt \right| \leq (1+(b-a))\varepsilon$$

ce qui preuve que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\mathrm{d}t = 0.$$

De même on a $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}\mathrm{d}t = 0$. Donc si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, alors

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t)\cos \lambda t \mathrm{d}t = \lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin \lambda t \mathrm{d}t = 0.$$

En particulier, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n(h) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b h(t)\sin\left((2n+1)\frac{t}{2} \right) \mathrm{d}t = 0.$

Deuxième partie
Convergence ponctuelle de la série de FOURIER
d'un élément de $\mathscr{C}^k_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $k \geq 2$

2.1 Quelques propriétés des coefficients de Fourier

2.1.1 Soit $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, donc f est bornée par un certain $M > 0$, donc

$$|c_n(f)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t = M.$$

Donc la famille $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée.

2.1.2 Une intégration par parties fournit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)e^{-int}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\left[f(t)e^{int} \right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t = inc_n(f). \quad (5)$$

2.1.3 On a, d'après la question précédente (5),

$$c_n(f'') = inc_n(f') = in(inc_n(f) = -n^2 c_n(f). \quad (6)$$

2.2 Convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(f)$ pour $f \in \mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

2.2.1 On a, d'après (6), $|c_n(f)| = \frac{1}{n^2}|c_n(f'')| \leq \frac{M}{n^2}$, où M est un majorant de $c_n(f'')$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ étant convergente, donc la famille $(c_n(f)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.

2.2.2 $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|u_n(f)(x)| \leq |c_n(f)| + |c_{-n}(f)|$$

Le terme majorant (ne dépend pas x) définit une série numérique convergente, donc la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(f)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

2.3 Convergence ponctuelle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n(f)$ pour $f \in \mathscr{C}^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$: Théorème de DIRICHLET

2.3.1 On a

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(f)(x) = c_0(f)(x) + \sum_{k=0}^{n} c_k(f)e^{ikx} + c_{-k}(f)e^{-ikx} = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}e^{ikx}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t.$$

2.3.2 Posons $u = x - t$, donc

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\mathrm{d}t.$$

La dernière égalité découle de (4).

2.3.3 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_n(t)\mathrm{d}t$ d'après (3). D'où :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))D_n(t)\mathrm{d}t, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))\frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

2.3.4 On a $S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin\left((2n+1)\left(\frac{t}{2}\right)\right)\mathrm{d}t$. Il est clair que g_x est continue sur $[-\pi,\pi]\backslash\{0\}$, comme rapport de deux fonctions continues, de plus

$$\lim_{t\to 0, t\neq 0} g_x(t) = -2\lim_{t\to 0}\frac{f(x-t) - f(x)}{-t}\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = -2f'(x) = g_x(0).$$

D'où la continuité de g_x sur $[-\pi,\pi]$.

g_x est une fonction continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ (elle admet une limite en 0), le lemme de LEBESGUE indique que l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t)\sin\left((2n+1)\left(\frac{t}{2}\right)\right)\mathrm{d}t$ a une limite nulle quand n tend vers l'infini. Autrement dit $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela montre que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n(f)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f.

2.4 On sait que la série de Fourier de f, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(f)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (la question), donc uniformément et simplement convergente sur $\mathbb{R}$. Posons $g = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(f)$. D'après le théorème de Dirichlet, g coïncide avec f en tout point x de $\mathbb{R}$. Ainsi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(f)$ converge normalement $\mathbb{R}$ vers f.

Troisième partie
Application à l'étude d'une équation aux dérivées partielles

3.1 **Une équation de sommabilité**

3.1.1 Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwartz, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} k^2|a_k| = \sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} k^3|a_k|\frac{1}{k} \leq \left(\sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} k^6 a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sqrt{2}\left(\sum_{k=-n,k\neq 0}^{n} k^6 a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Le terme à droite admet une limite finie quand n tend vers l'infini, donc la famille $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient l'inégalité en question :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2|a_k| \leq \sqrt{2}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^6 a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3.1.2 D'après la condition nécessaire de convergence, $\lim\limits_{n\to\pm\infty} n^2 a_n = 0$, donc $a_n \underset{\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc par comparaison la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable. D'autre part, en utilisant ue autre fois l'inégalité de Cauchy Schwartz, on obtient :

$$\sum_{k=-n}^{n} k|a_k| = \sum_{k=-n}^{n}\left(k\sqrt{|a_k|}\right)\sqrt{|a_k|} \leq \left(\sum_{k=-n}^{n} k^2|a_k|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-n}^{n} |a_k|\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le terme à droite admet une limité finie quand n tend vers l'infini, car les deux familles $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont sommables, donc la famille $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est aussi sommable.

3.2 Construction d'un élément de $\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

3.2.1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq |a_n| + |a_{-n}|$ et la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (|a_n| + |a_{-n}|) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|$ converge, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

3.2.2 Les fonctions f_n sont 2π-périodiques et la convergence simple conserve la périodicité, donc f est 2π-périodique.
D'autre part les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et la convergence uniforme (la convergence normale entraine la convergence uniforme) conserve la continuité, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

3.2.3 Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $x \in [-\pi,\pi]$, on pose $f(x)e^{-inx} = \sum_{n=0}^{\infty} u_k(x)$ avec $u_k(x) = \left(a_k e^{ikx} + a_{-k}e^{-ikx}\right) e^{-inx}$. On a,

$$|u_k(x)| \leq |a_k| + |a_{-k}|.$$

Cette inégalité montre que la série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge uniformément sur le segment $[-\pi,\pi]$, d'où la possibilité d'intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_k e^{ikx} + a_{-k}e^{-ikx}\right)e^{-inx}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(a_k e^{i(k-n)x} + a_{-k}e^{-i(k+n)x}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\pi a_n.\end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = 2\pi a_n. \tag{7}$$

3.2.4 Les fonctions f_n sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n''(x) = -n^2 f_n(x)$. Donc $|f_n''(x)| \leq n^2(|a_n| + |a_{-n}|$, le terme majorant définit une série numérique convergente, car la famille $(n^2 a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n''$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$, par le théorème du cours, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} n^2 f_n(x).$$

3.3 Existence d'une solution du problème

3.3.1 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$|w_n(x,t)| = |f_n(x)| \leq |a_n| + |a_{-n}|$$

Donc, comme précédemment, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.2 Les fonctions w_n sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} w_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^2$, donc la fonction somme w est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Les fonctions $x \mapsto w_n(x,t) = f_n(x)e^{-in^2t}$ sont 2π-périodiques car les f_n le sont, donc $x \mapsto w(x,t)$ est 2π-périodique car la convergence simple conserve la périodicité.

3.3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Les fonctions $t \mapsto w_n(x,t) = f_n(x)e^{-in^2t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les dérivées sont données par :

$$\frac{\partial w_n}{\partial t}(x,t) = -in^2 w_n(x,t)$$

De plus $\left|\frac{\partial w_n}{\partial t}(x,t)\right| \leq n^2|w_n(x,t)| \leq n^2(|a_n|+|a_{-n}|)$, d'après l'hypothèse sur la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial w_n}{\partial t}(x,.)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Donc on peut conclure que w admet une dérivée partielle par rapport à t, et que

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = -i\sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(x,t).$$

Les applications $(x,t) \mapsto \frac{\partial w_n}{\partial t}(x,t) = -in^2 w_n(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{R}^2} \frac{\partial w_n}{\partial t}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, donc $(x,t) \mapsto \frac{\partial w}{\partial t}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3.3.4 Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. Les fonctions $x \mapsto w_n(x,t) = f_n(x)e^{-in^2t}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, les dérivées sont données par :

$$\frac{\partial w_n}{\partial x}(x,t) = in(a_n e^{inx} - a_{-n}e^{-inx})e^{-in^2t}$$

De plus $\frac{\partial w_n}{\partial x}(x,t) \leq n(|a_n|+|a_{-n}|)$, d'après la question 3.1.2, la famille $(na_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable, on en déduit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial w_n}{\partial x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$. Donc on peut conclure que w admet une dérivée partielle par rapport à x, et que

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = i\sum_{n=0}^{\infty} n(a_n e^{inx} - a_{-n}e^{-inx})e^{-in^2t}.$$

Les applications $(x,t) \mapsto \frac{\partial w_n}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\partial w_n}{\partial x}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^2$, donc $(x,t) \mapsto \frac{\partial w_n}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

De la même façon on montre que $x \mapsto \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{n=0}^{\infty} n^2(a_n e^{inx} + a_{-n}e^{-inx})e^{-in^2t} = -\sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(x,t).$$

3.3.5 La fonction w vérifie les propriétés suivantes :

- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto w(x,t)$ est 2π-périodique,
- les dérivées partielles $\dfrac{\partial w}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$,
- $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) + i\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) &= -\sum_{n=0}^{\infty} n^2(a_n e^{inx} + a_{-n}e^{-inx})e^{-in^2 t} \\
&= -\sum n^2 w_n(x,t) + i\left(-i\sum_{n=0}^{\infty} n^2 w_n(x,t)\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

- $w(x,0) = f(x)$.

Donc w est bien solution du problème posé.

3.4 **Unicité de la solution du problème**

3.4.1 La fonction $(x,t) \mapsto v(x,t)e^{-inx}$ admet une dérivée partielle $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t)e^{-inx}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^2$ et donc bornée sur tout compact de la forme $[-\pi,\pi]\times[-\alpha,\alpha]$ ($\alpha > 0$), donc d'après le théorème de dérivation de fonctions définies par une intégrale, la fonction b_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
b_n'(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{i}{2\pi}\left[\frac{\partial v}{\partial x}(x,t)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{n}{2\pi}\left[v(x,t)e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{in^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x = -\frac{in^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x,t)e^{-inx}\mathrm{d}x \\
&= -in^2 b_n(t).
\end{aligned}$$

Donc b_n vérifie l'équation différentielle $y' + in^2 y = 0$.
Par définition, on a :

$$b_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(x,0)e^{-inx}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x = a_n.$$

La dernière égalité est une conséquence de (7).

3.4.2 La solution de l'équation différentielle $y' + in^2 y = 0$ est de la forme $y(t) = \lambda e^{-in^2 t}$ et comme b_n vérifie l'équation différentielle et $b_n(0) = a_n$, alors par unicité on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad b_n(t) = b_n(0)e^{-in^2 t} = a_n e^{-in^2 t}.$$

3.4.3 Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_n(x,t) = a_n e^{-in^2t} e^{inx} + a_{-n} e^{-in^2t} e^{-inx} = \left(a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx}\right) e^{-in^2t}.$$

D'où :

$$|v_n(x,t)| \leq |a_n| + |a_{-n}|.$$

Cette inégalité montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ sur $\mathbb{R}^2$.

Par hypothèse, $\forall t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto v(x,t)$ est un élément de $\mathscr{C}^2_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, donc sa série de Fourier $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \left(b_n(t)e^{inx} + b_{-n}(t)e^{-inx}\right) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n(x,t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto v(x,t)$ (la question 2.4), d'où :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ \ v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t).$$

Et comme $v_n(x,t) = \left(a_n e^{inx} + a_{-n} e^{-inx}\right) e^{-in^2t} = f_n(x) e^{-in^2t}$, alors

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \ \ v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) e^{-in^2t} = w(x,t).$$

Ceci montre que le problème posé admet une solution unique.

• • • • • • • • •