Épreuve de mathématiques I
Correction

Exercice

Calcul de la somme de la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$

1. Une intégration par parties, montre que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos(kx)\mathrm{d}x=\frac{1}{k^2}$.

2. (a) Puisque $x\in]0,\pi[$, alors $e^{ix}\neq 1$ et par conséquent :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^m e^{inx} &= e^{ix}\frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\\ &= e^{ix}\frac{e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}}\frac{e^{\frac{-inx}{2}}-e^{\frac{inx}{2}}}{e^{\frac{-ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}}=e^{i(n+1)\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\end{aligned}$$

(b) D'après ce qui précède, on a :

$$\sum_{k=1}^m\cos(kx)=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right)=\frac{\cos(n+1)\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

3. Une intégration par parties donne

$$\int_0^\pi\psi(t)\sin(mx)\mathrm{d}x=\frac{1}{m}\left[\psi(0)\ \cos 0-f(\pi)\ \cos(m\pi)+\int_0^\pi\psi'(x)\cos(mx)\mathrm{d}x\right].$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, le fait que $\forall t\in\mathbb{R},\quad|\cos t|\leq 1$ et l'inégalité du cours $\left|\int_0^\pi\psi\right|\leq\int_0^\pi|\psi|$, on obtient la majoration

$$\left|\int_0^\pi\psi(x)\sin(mx)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{|m|}\left(|\psi(0)|+|\psi(\pi)|+\int_0^\pi|\psi'(x)|\mathrm{d}x\right),$$

donc une inégalité de la forme $\left|\int_0^\pi\psi(x)\sin(mx)\mathrm{d}x\right|\leq\frac{C}{|m|}$, où C est une constante indépendante de m, ce qui permet de conclure.

4. Il est clair que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et que $\forall x\in]0,\pi]$,

$$g'(x)=\frac{\left(\dfrac{x}{\pi}-1\right)2\sin\dfrac{x}{2}-\left(\dfrac{x^2}{2\pi}-x\right)\cos\dfrac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

- $\lim_{x\to0^+}g(x)=-1=g(0)$, donc g est continue sur $[0,\pi]$
- $\lim_{x\to0^+}g'(t)=\frac{1}{2\pi}$, donc g est dérivable en 0, donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$, d'après le théorème du prolongement de la dérivée.

5. (a) D'après la question 1., on peut écrire $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(nx)\mathrm{d}x$, mais

$$\sum_{n=1}^{m}\cos(nx)=\frac{\cos(m+1)\frac{x}{2}\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)};$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2\pi}-x\right)\left[\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sin(2m+1)\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right]\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}g(x)\sin\frac{(2m+1)x}{2}\mathrm{d}x.$

(b) On obtient, en utilisant le résultat de la question 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}+\lim_{m\to\infty}\int_0^{\pi}g(x)\sin\frac{(2m+1)x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}.$$

6. (a) Posons $u_n(x)=\dfrac{x}{n(1+2nx)}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$. On a $0\le u_n(x)\sim\dfrac{x}{2n^2}$. Donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n(x)$ converge pour tout $x>0$.

(b) On a $\forall x\in]0,+\infty[$, $0\le u_n(x)\le\dfrac{1}{2n^2}$, donc la série converge uniformément sur $]0,+\infty[$ et comme $\forall n\ge 2$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=\frac{1}{2n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{2n^2}$ converge, alors, d'après le théorème d'interversion des limites, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

Problème 1

Partie 1 : Exemples

1. La fonction $t\longmapsto e^{(-\alpha-nx)t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $-\alpha-nx<0$, donc $\varphi_\alpha\in\mathscr{L}$, et on a :

$$\mathscr{N}_n(\varphi_\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{(-\alpha-nx)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+nx}.$$

2. On utilise $e^{iwt}=C(t)+iS(t)$. On a $|e^{iwt}e^{-nxt}|=e^{-nxt}$, donc $t\mapsto e^{(iw-nx)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc il est de même pour les applications C et S. On effectue les calculs avec $x>0$.

$$\int_0^{+\infty}e^{(iw-nx)t}\mathrm{d}t=\frac{1}{nx-iw}=\frac{nx+iw}{w^2+n^2x^2}.$$

D'où

$$\mathscr{N}_n(C)(x)=\frac{nx}{w^2+n^2x^2}\quad\text{et}\quad\mathscr{N}_n(S)(x)=\frac{w}{w^2+n^2x^2}.$$

Partie II : Comportements asymptotiques

1. (a) Soit $M>0$ tel que $\forall x\ge 0$, $|f(x)|\le M$. On a donc $|f(t)e^{-xt}|\le Me^{-nxt}$, donc

$$\forall x>0,\ \ |\mathscr{N}_n(f)(x)|\le M\int_0^{+\infty}e^{-nxt}\mathrm{d}t=\frac{M}{nx}$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathscr{N}_n(f)(x)=0$.

(b) Soient $x>0$, $A\in\mathbb{R}_+^*$, on a $t\longmapsto f(t)$ et $t\longmapsto e^{-xt}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0,A]$, donc une intégration par parties donne

$$(*)\quad \int_0^A f'(t)e^{-nxt}dt=[f(A)e^{-nxA}-f(0)]+nx\int_0^A f(t)e^{-nxt}dt.$$

f' étant bornée, donc $f'\in\mathscr{L}$, alors la relation $(*)$ précédente permet d'affirmer que

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-nxt}dt=-f(0)+nx\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nxt}dt.$$

ou encore

$$\mathscr{N}_n(f')(x)=nx\mathscr{N}_n(f)-f(0)$$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} nx\mathscr{N}_n(f)(x)-f(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathscr{N}_n(f')(x)=0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathscr{N}_n(f)(x)=\dfrac{f(0)}{n}$.

2. (a) Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=l$, alors il existe $A>0$ tel que $|f(x)-l|\leq 1$ pour tout $x\geq A$. Sur le segment $[0,A]$ f est bornée par un certain $M>0$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $|f(x)|\leq\max(M,|l|+1)$. Donc f est bornée sur $[0,+\infty[$.

(b) i. Il suffit de considérer le changement de variable $u=xt$.

ii. la fonction f est bornée sur $[0,+\infty[$, donc pour $x>0$ la fonction $t\longmapsto f(t)e^{-nxt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. Écrivons

$$x\mathscr{N}_n(f)(x)-\frac{l}{n}=\int_0^{+\infty} x(f(t)-l)e^{-nxt}dt.$$

Soit M un majorant de $t\longmapsto|f(t)-l|$ sur $[0,+\infty[$. Pour tout $A>0$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}\left|x\mathscr{N}_n(f)(x)-\frac{l}{n}\right| &\leq \left|\int_0^A xe^{-nxt}(f(t)-l)dt\right|+\left|\int_A^{+\infty} xe^{-nxt}(f(t)-l)dt\right|\\ &\leq M\int_0^A xe^{-nxt}dt+\left|\int_A^{+\infty} xe^{-nxt}(f(t)-l)dt\right|\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon>0$, fixons $A>0$ tel que $|f(t)-l|\leq\varepsilon$ dés que $t\geq A$, donc

$$\left|x\mathscr{N}_n(f)(x)-\frac{l}{n}\right|\leq\frac{M}{n}(1-e^{-nxA})+\frac{\varepsilon}{n}e^{-nxA},$$

et par conséquent

$$\lim_{x\to 0} x\mathscr{N}_n(f)(x)=\frac{l}{n}.$$

3. On a $g_n=\mathscr{N}_n(f)\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{\frac{-nt}{n+1}}\mathrm{d}t$. La suite de fonctions de terme général $f_n:t\mapsto f(t)e^{\frac{-nt}{n+1}}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction intégrable $t\mapsto f(t)e^{-t}$, et dominée par la fonction intégrable $t\mapsto|f(t)|$, donc d'après le théorème de la convergence dominée, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et

$$\lim_{n\to\infty} g_n=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} f(t)e^{\frac{-nt}{n+1}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Partie III : Quelques propriétés de $\mathscr{N}_n$

1. (a) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} t^m e^{\frac{-nxt}{2}}=0$, donc il existe $B>0$ tel que pour $t\geq B$, $t^m e^{\frac{-nxt}{2}}\leq 1$ ou encore $t^m e^{-nxt}\leq e^{\frac{-nxt}{2}}$.

(b) $\forall t \geq 0$, $|g_m(t)e^{-nxt}| \leq |f(t)|e^{\frac{-nxt}{2}}$ et la fonction $t \mapsto f(t)e^{\frac{-nxt}{2}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ($f \in \mathscr{L}$), donc il est de même de la fonction $t \mapsto g_m(t)e^{-nxt}$, donc $g_m \in \mathscr{L}$.

2. Soit $f \in \mathscr{L}$. On va utiliser le théorème de régularité des intégrales à paramètres.

- $\forall t \in]0, +\infty[$, $x \mapsto f(t)e^{-nxt}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$, de dérivée m-ième $x \mapsto (-nt)^m f(t)e^{-nxt} = (-n)^m g_m(t)e^{-nxt}$.
- $\forall x \in]0, +\infty[$, $t \mapsto (-n)^m g_m(t)e^{-nxt}$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- $\forall x \in [a, +\infty[$ $(a > 0)$ $\forall t \in]0, +\infty[$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $|(-n)^m g_m(t)e^{-nxt}| \leq |f(t)|e^{-\frac{nat}{2}}$. Enfin, le majorant est intégrable sur le segment $]0, +\infty[$ car $f \in \mathscr{L}$.

Le théorème s'applique sur tout intervalle $[a, +\infty[$, donc $\mathscr{N}_n$ est de classe $\mathscr{C}^m$ sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\mathscr{N}_n(f)^{(k)}(x) = (-n)^k \int_0^{+\infty} t^k f(t)e^{-nxt}\mathrm{d}t = (-n)^k \mathscr{N}_n(g_k).$$

3. (a) Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$, $A \in \mathbb{R}_+^*$, on a $t \longmapsto f(t)$ et $t \longmapsto e^{-xt}$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $[0, A]$, donc une intégration par parties donne

$$(*) \quad \int_0^A f'(t)e^{-nxt}dt = [f(A)e^{-nxA} - f(0)] + nx\int_0^A f(t)e^{-nxt}dt.$$

f' étant dans $\mathscr{L}$, alors la relation $(*)$ précédente permet d'affirmer que

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-nxt}dt = -f(0) + nx\int_0^{+\infty} f(t)e^{-nxt}dt.$$

ou encore

$$\mathscr{N}_n(f')(x) = nx\mathscr{N}_n(f) - f(0)$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $x > 0$, on a :

$$\mathscr{N}_n(f'')(x) = nx\mathscr{N}_n(f') - f'(0) = nx(nx\mathscr{N}_n(f) - f(0)) - f'(0) = (nx)^2\mathscr{N}_n(f) - nxf(0) - f'(0).$$

4. Montrons le résultat par récurrence. La propriété est vraie pour $k = 1$. Supposons qu'elle est vraie à l'ordre k. On a d'abord

$$\mathscr{N}_n(f^{(k)})(x) = nx\mathscr{N}_n(f^{(k-1)}) - f^{(k-1)}(0),$$

d'après l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} \mathscr{N}_n(f^k)(x) &= nx\left((nx)^{k-1})\mathscr{N}_n(f)(x) - \sum_{i=1}^{k-1}(nx)^{i-1}f^{k-1-i}(0)\right) - f^{(k-1)}(0) \\ &= (nx)^k\mathscr{N}_n(f)(x) - \sum_{i=1}^{k}(nx)^{i-1}f^{k-i}(0). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Partie IV : Injectivité de $\mathscr{N}_n$

1. (a) En effet, puisque tout polynôme est combinaison linéaire de monômes, on a pour tout polynôme P : $\displaystyle\int_a^b P(t)h(t)\mathrm{d}t = 0.$

(b) D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers h sur $[0,1]$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \int_a^b (h(x))^2 \mathrm{d}x = \int_a^b (h(x) - P_n(x))\, h(x)\mathrm{d}x \leq (b-a)\|h - P_n\|_\infty \|h\|_\infty$$

Comme la suite $(\|h-P_n\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, on déduit que $\int_a^b (h(x))^2\mathrm{d}x = 0$, d'où, puisque h est continue sur $[0,1]$, $h = 0$.

2. (a) Soit $x \in]0,+\infty[$ et $k > 0$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}_n(f)(1+k) &= \int_0^{+\infty} e^{-n(1+k)t} f(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) e^{-nkt}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} h_n'(t) e^{-nkt}\mathrm{d}t \\
&= [e^{-nkt}h_n(t)]_0^{+\infty} + nk\int_0^{+\infty} h_n(t)e^{-nkt}\mathrm{d}t \\
&= nk\mathscr{N}_n(h_n)(k)
\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-nkt}h_n(t) = 0$ (h_n est bornée sur $]0,+\infty[$.)

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$0 = \mathscr{N}_n(f)(1+(k+1)) = n(k+1)\int_0^{+\infty} e^{-(k+1)nt}h_n(t)\mathrm{d}t = (k+1)\int_0^1 u^k g\left(-\frac{\ln u}{n}\right)\mathrm{d}u,$$

en posant $u = e^{-nt}$. D'où

$$\int_0^1 u^k h_n\left(-\frac{\ln u}{n}\right)\mathrm{d}u = 0.$$

(c) Soit g l'application définie sur $[0,1]$ par :

$$g(u) = \begin{cases} h_n\left(-\dfrac{\ln u}{a}\right) & \text{si } u \in]0,1] \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nv}f(v)\mathrm{d}v & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

est continue sur $[0,1]$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 u^n g(u)\mathrm{d}u = 0$ et d'après le théorème de Weierstrass g est nulle sur $[0,1]$ et donc h_n est nulle sur $]0,+\infty[$.

3. Soit $f \in \mathscr{L}$ tel que $\mathscr{N}_n(f) = 0$, en particulier $\mathscr{N}_n(f)(1+k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme dans les questions précédentes $h_n = 0$ et donc $\forall t \geq 0$, $0 = h_n'(t) = e^{-nt}f(t)$, on conclut que $f = 0$ sur $[0,+\infty[$.

Partie V : Application au calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Puisque g est continue sur $[0,+\infty[$, il suffit que son intégral sur $[1,+\infty[$ converge. À l'aide d'une intégration par parties, on a pour tout $x \geq 1$:

$$\int_1^x g(t)\mathrm{d}t = \frac{-\cos(wx)}{wx} + \frac{\cos w}{w} - \frac{1}{w}\int_1^x \frac{\cos(wt)}{t^2}\mathrm{d}t$$

D'une part, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-\cos(x)}{wx} + \frac{\cos w}{w} = \frac{\cos w}{w}$.
D'autre part, $t \longmapsto \frac{\cos(wt)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, car $\left|\frac{\cos(wt)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$, donc

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(wt)}{t^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(wx)}{x^2} \mathrm{d}x.$$

Il en résulte que $\lim_{x \longmapsto \infty} \int_1^x g(t)\mathrm{d}t$ existe, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(wt)}{t} \mathrm{d}t$ est convergente.

2. (a) Posons $\Phi_n : x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-nxt} \frac{\sin wt}{t} dt$. Montrons que Φ_n est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, en effet, posons $g_n(x,t) = e^{-nxt} \frac{\sin wt}{t}$. On a $\frac{\partial g_n}{\partial x}(x,t) = -ne^{-nxt} \sin wt$ et si $x \geq a$ ($a > 0$) on a

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq ne^{-at},$$

ceci prouve que Φ_n est $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur $]0, +\infty[$ et

$$\Phi_n'(x) = -n \int_0^{+\infty} e^{-nxt} \sin wt = -n\mathscr{N}_n(S)(x) = -\frac{nw}{w^2 + n^2 x^2}.$$

Donc $\Phi_n(x) = c - \arctan\left(\frac{nx}{w}\right)$. Or $\lim_{x \to +\infty} \Phi_n(x) = 0$, car $\left|e^{-nxt} \frac{\sin wt}{t}\right| \leq e^{-nxt}$ et donc $|\Phi(x)| \leq \frac{1}{nx}$, ainsi $c = \frac{\pi}{2}$, d'où $\forall x > 0,\ \mathscr{N}_n(g)(x) = \Phi_n(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{nx}{w}\right)$.

(b) i. Soit $G(x) = \int_0^x \frac{\sin wt}{t} dt$ avec $x > 0$. G est $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc bornée sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \longmapsto G(t)e^{-nxt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{t \to +\infty} G(t)e^{-nxt} = 0$, donc par une intégration par parties

$$\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} g(t)e^{-nxt} dt = nx \int_0^{+\infty} G(t)e^{-nxt} dt$$

d'où

$$(**) \ \ \forall x > 0, \ \ \mathscr{N}_n(g)(x) = nx\mathscr{N}_n(G)(x)$$

ii. La transformée $\mathscr{N}_n(G)$ est définie au moins sur $]0, +\infty[$ et continue sur $]0, +\infty[$: en effet, si on fixe $x_0 > 0$, la fonction $t \longmapsto G(t)e^{-x_0 t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et une domination évidente montre la continuité de $\mathscr{N}_n(G)$ sur $[x_0, +\infty[$. Grâce à $(**)$, on déduit la continuité de $\mathscr{N}_n(G)$ et donc de $\mathscr{N}_n(g)$ sur $]0, +\infty[$.
En fin

$$\mathscr{N}_n(g)(0) = \int_0^{+\infty} g(t)dt = \lim_{t \to +\infty} G(t) = \lim_{x \to 0} nx\mathscr{N}_n(G) = \lim_{x \to 0} \mathscr{N}_n(g)(x).$$

Ceci est équivalent à $\lim_{x \to 0} \Phi_n(x) = \Phi_n(0)$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin wt}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Partie VI : Application à la résolution des équations différentielles

1. On sait que $\mathscr{N}_n(f^k)(x) = (nx)^k\mathscr{N}_n(f)(x) - \sum_{i=1}^{k}(nx)^{i-1}f^{(k-i)}(0)$. Appliquons la transformée $\mathscr{N}_n$ à l'équation différentielle (E), on obtient donc :

$$\sum_{k=1}^{m} a_{m-i}(nx)^k\mathscr{N}_n(y)(x) - \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}(nx)^{i-1}y^{(k-i)}(0) + a_m\mathscr{N}_n(y) = \mathscr{N}_n(f)(x)$$

Il suffit de prendre $\varphi_{n,m}(x) = \sum_{k=1}^{m} a_{m-i}(nx)^k + a_m$ et $\varphi_{n,m-1}(x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}(nx)^{i-1}y^{(k-i)}(0)$ ce sont des polynômes en de degré respectivement inférieure à m et $m-1$.

2. Soit y une solution et $F = \mathscr{N}_1(y)$. On a

$$\mathscr{N}_1(y')(x) = x\mathscr{N}_1(y)(x) - y(0) = xF(x) - 1$$

et

$$\mathscr{N}_1(y'')(x) = x^2F(x) - (xy(0) + y'(0)) = x^2F(x) - x - 2$$

on a donc par linéarité de $\mathscr{N}_1$

$$\mathscr{N}_1(y'')(x) + 3\mathscr{N}_1(y')(x) + 2\mathscr{N}_1(y) = 2\mathscr{N}_1(e^{\frac{-3}{2}t})(x)$$

donc

$$(x^2+3x+2)F(x) - x - 5 = \frac{2}{x+\frac{3}{2}}$$

donc

$$F(x) = \frac{x^2+\frac{13}{2}x+\frac{19}{2}}{(x+1)(x+2)(x+\frac{3}{2})} = \frac{8}{x+1} + \frac{1}{(x+2)} - \frac{8}{x+\frac{3}{2}} = \mathscr{N}_1(8e^{-t} + e^{-2t} - 8e^{-\frac{3}{2}t})(x)$$

par l'injectivité de $\mathscr{N}_1$, on obtient

$$y(t) = 8e^{-t} + e^{-2t} - 8e^{-\frac{3}{2}t}.$$

3. Soit y une solution et $F = \mathscr{N}_2(y)$. On a

$$\mathscr{N}_2(y')(x) = 2x\mathscr{N}_1(y)(x) - y(0) = 2xF(x) - 1$$

et

$$\mathscr{N}_2(y'')(x) = 4x^2F(x) - 2xy(0) - y'(0)) = 4x^2F(x) - 2x + 3$$

on a donc par linéarité de $\mathscr{N}_2$

$$\mathscr{N}_2(y'')(x) + 4\mathscr{N}_2(y')(x) + 3\mathscr{N}_2(y) = \mathscr{N}_2(\sin t)(x)$$

donc

$$(4x^2+8x+3)F(x) - 2x - 1 = \frac{1}{1+4x^2}$$

donc

$$F(x) = \frac{1+(1+2x)(1+4x^2)}{4(1+4x^2)(4x^2+8x+3} = \frac{\frac{1}{4}}{1+2x} + \frac{\frac{19}{20}}{3+2x} + \frac{\frac{-4}{10}x+\frac{1}{10}}{1+(2x)^2} = \mathscr{N}_2\left(\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{19}{20}e^{-3t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t\right)(x)$$

par l'injectivité de $\mathscr{N}_2$, on obtient

$$y(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{19}{20}e^{-3t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t.$$

4. En appliquant la transformée $\mathscr{N}_1$ à (S) on obtient

$$\begin{cases} (x-1)\mathscr{N}_1(y_1)(x) + (x+1)\mathscr{N}_1(y_2)(x) - 2 = \dfrac{-4}{x+3} \\ (x+3)\mathscr{N}_1(y_1)(x) + (2x+1)\mathscr{N}_1(y_2)(x) - 2 = \dfrac{5x}{1+x^2} \end{cases}$$

D'où

$$\mathscr{N}_1(y_2)(x) = \frac{1}{1+x^2} = \mathscr{N}_1(\sin t)(x).$$

Donc

$$y_2(t) = \sin t,$$

et puis, par soustraction,

$$y_1(t) = \frac{1}{4}\left(5\cos t + 4e^{-3t} - y_2'(t)\right) = e^{-3t} + \cos t.$$

Problème 2

Partie I : Quelques prpriétés de la fonction génératrice et quelques exemples

1. On a $\forall t \in [-1,1],\ \ \forall k \in \mathbb{N},\ \ |p(X=k)t^k| \leq p(X=k)$. La série de terme $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k)$ converge, et sa somme vaut 1. Donc le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p(X=k)t^k$ converge absolument. Or la convergence absolue entraîne la convergence. Donc la fonction génératrice est au moins définie sur l'intervalle $[-1,1]$.

2. G_X est une fonction définie par une série entière, donc les coefficients du développement de la série sont définis d'une manière unique par les relations :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ p(X=k) = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

3. (a) Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ G_X(t) = \sum_{k=0}^{1} p(X=k)t^k = (1-p)t^0 + pt = pt + 1 - p.$$

(b) Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} p(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k(1-p)^{n-k} = (pt+1-p)^n.$$

(c) Si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, alors :

- $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$;
- $\forall k \in \mathbb{N}$, $p(X=k) = (1-p)^{k-1}p$.

Donc

$$\forall t \in [-1,1],\ \ G_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(X=k)t^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}.pt^k = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}(t-pt)^k = \frac{pt}{pt-t+1}.$$

4. Supposons que X admet une espérance $E(X)$. On a, pour tout $t \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
G_X(t) - G_X(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k p(X=k) - \sum_{k=0}^{\infty} p(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (t^k - 1) p(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (t-1)(1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}) p(X=k).
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}) p(X=k).$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
\forall a, b \in [0,1] \qquad a \le b &\Rightarrow a^i \le b^i \\
&\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} a^i \le \sum_{i=0}^{k} b^i \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a^i \right) p(X=k) \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0} b^i \right) p(X=k) \\
&\Rightarrow \frac{G_X(a) - G_X(1)}{a-1} \le \frac{G_X(b) - G_X(1)}{b-1},
\end{aligned}$$

donc la fonction $t \longmapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$ est croissante sur $[0,1[$. De plus :

$$\begin{aligned}
\frac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}) p(X=k) \\
&\le \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{k \text{ termes}} \right) p(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k.p(X=k) \\
&= E(X).
\end{aligned}$$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{G_X(t) - G_X(1)}{t-1}$ étant croissante et majorée par $E(X)$ sur $[0,1[$ admettra donc une limite fini pour t tendant vers 1 par valeurs inférieures . Ce qui montre que G_X est dérivable à gauche en 1.

Inversement, supposons que G_X est dérivable en 1, alors :

$$\forall t \in [0,1] \qquad G'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(X=k) k.t^{k-1}$$

Et par conséquent :

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} p(X = k)k \times 1^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k.p(X = k) = E(X).$$

5. On a vu que, $\forall t \in [0, 1]$,

$$G'_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(X = k)k.t^{k-1}$$

$$G''_X(t) = \sum_{k=2}^{\infty} p(X = k)k(k-1).t^{k-2}.$$

Et donc :

$$G''_X(1) = \sum_{k=2}^{\infty} p(X = k)k(k-1).1^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p(X = k) = E\left(X(X-1)\right).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E\left(X(X-1)\right) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2. \end{aligned}$$

6. L'espérance de X est donnée par la formule, avec $q = 1 - p$:

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(X = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{q}.$$

Calculons maintenant $V(X)$ la variance de X : On a

$$V(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(X = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^{k-1}.$$

Écrivons k^2 sous la forme $k^2 = k(k-1) + k$. Alors

$$V(X) = pq^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} + pq \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \left(\frac{1}{1-q}\right)'' = \frac{2}{(1-q)^2} = \frac{2}{p^3}.$$

D'où $V(X) = \dfrac{2q^2}{p^2} + \dfrac{p}{q}$. Nous en déduisons la variance de X :

$$V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{p}{q} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Partie II : La fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

1. On a, par définition, $G_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t_1^X t_2^X)$ et les variables aléatoires t_1^X et t_2^X sont indépendantes, donc $G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t).G_{X_2}(t) = G_X^2(t)$. D'où la propriété est vraie pour $k = 2$. Supposons la vraie pour k. On a alors

$$G_{\sum\limits_{i=1}^{k+1} X_i}(t) = G_{\sum\limits_{i=1}^{k} X_i + X_{k+1}}(t) = G_{\sum\limits_{i=1}^{k} X_i}(t).G_{X_{k+1}}(t) = \prod_{i=1}^{k} G_{X_i}(t).G_{X_{k+1}}(t) = \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}(t) = G_X^k(t).$$

Et la propriété est vrai pour $k+1$. La propriété est donc vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) La variable aléatoire N étant à valeurs dans $[\![1,n]\!]$, la famille $(N = k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. Utilisons la formule des probabilités totales :

$\forall y \in Y(\Omega),\ \ P(Y=y) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(Y=y, N=k) = \sum\limits_{k=1}^{n} p(Y=y/N=k)p(N=k)$. D'où

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y\in Y(\Omega)} yp(Y=y) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\sum_{k=1}^{n} p(Y=y/N=k)p(N=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(N=k) \sum_{y\in Y(\Omega)} yp(Y=y/N=k), \quad \text{car } Y(\Omega) \text{ est fini} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(N=k)E(Y/N=k) \end{aligned}$$

(b) Par définition, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ E(t^S/N=k) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j p(S=j/N=k) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j p\left(\sum_{i=1}^{k} X_i = j\right) = G_{X_1+X_2+\ldots+X_k}(t) = G_X^k(t).$$

(c) On an d'après la question 2. a) de cette partie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} p(N=k)G_X^k(t) = \sum_{k=1}^{n} p(N=k)E(t^S/N=k) = E(t^S) = G_S(t).$$

(d) D'après l'égalité précédente, on a $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$G_S(t) = \sum_{k=1}^{n} p(N=k)(G_X(t))^k = G_N(G_X(t)) = G_N \circ G_X(t),$$

d'où :

$$G_S = G_N \circ G_X.$$

3. On a $G'_S(1) = G'_N(G_X(1).G'_X(1) = G'_N(1).G'_X(1)$ ou encore $E(S) = E(N)E(X)$.

Partie III : Application

1. (a) N suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$: $N(\Omega) = \{1,2\}$ et $p(N=1) = p(N=2) = \dfrac{1}{2}$.

(b) La variable aléatoire $S/[N=1]$ suit la loi uniforme sur $\{1,2,3,4\}$. D'où :

i	1	2	3	4
$p(S=i/[N=1])$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Notons X_1 le résultat du premier lancer et X_2 le résultat du deuxième lancer lorsque $N=2$. X_1 et X_2 suivent une loi uniforme sur $\{1,2,3,4\}$, alors :

$\forall t\in\mathbb{R},\ \ G_{X_1}(t)=G_{X_2}(t)=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}t^k.$

Si X_1 et X_2 sont indépendantes, alors :

$$G_S(t)=G_{X_1+X_2}(t)=G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)=\frac{1}{16}\left(t^2+2t^3+3t^4+4t^5+3t^6+2t^7+t^8\right).$$

On en déduit la loi de probabilité de S lorsque $N=2$:

$$\forall k\in\{2,..,5\},\quad P\left(S=k\right)=\frac{k-1}{16},\quad \forall k\in\{6,..,8\},\quad P\left(S=k\right)=\frac{9-k}{16}.$$

i	2	3	4	5	6	7	8
$p(S=i/[N=2])$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

(c) On a d'abord $S(\Omega)=[\![1,8]\!]$ et $(S=i)=(S=i,N=1)\cup(S=i,N=2)$, donc

$$\begin{aligned}p(S=i) &= p(S=i,N=1)+p(S=i,N=2)\\ &= p(S=i/[N=1])p(N=1)+p(S=i/[N=2])p(N=2)\\ &= \frac{1}{2}\left[p(S=i/[N=1])+p(S=i/[N=2])\right].\end{aligned}$$

D'où la loi de S :

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(S=i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

On trouve $E(S)=\sum_{i=1}^{8}ip(S=i)=\frac{15}{4}$ et $V(S)=E(S^2)-(E(S))^2=\frac{35}{2}-\left(\frac{15}{4}\right)^2=\frac{55}{16}$.

2. (a) X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$.

(b) On sait que $\forall t\in\mathbb{R}$, $G_N(t)=\frac{1}{2}(t+t^2)$ et $G_X(t)=\frac{1}{4}(t+t^2+t^3+t^4)$.
D'où $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}G_S(t) &= G_N(G_X(t))\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(t+t^2+t^3+t^4)+\frac{1}{16}(t+t^2+t^3+t^4)^2\right)\\ &= \frac{1}{8}t+\frac{5}{32}t^2+\frac{3}{16}t^3+\frac{7}{32}t^4+\frac{1}{8}t^5+\frac{3}{32}t^6+\frac{1}{16}t^7+\frac{1}{32}t^8.\end{aligned}$$

(c) La loi de S est donnée par les coefficients du polynôme G_X en t. $E(S)=G'_S(1)=\frac{15}{4}$ et $V(S)=G''_S(1)+G'_S(1)-(G'_S(1))^2=\frac{55}{4}+\frac{15}{4}-\left(\frac{15}{4}\right)^2=\frac{55}{16}$.

• • • • • • • • • • •