CONCOURS NATIONAL MAROCAIN - Session 2016
Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

Problème : 1

Partie I

1. (a) *D'après la formule de Binôme de Newton, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1.$$

   (b) *Soit* $x \in [0,1]$, *on a* $0 \leq B_{n,k}(x) \leq \sum_{j=0}^{n} B_{n,j} = 1$.

2. *On a, pour tout* $k \in [\![1\ ,\ n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ *et pour tout* $k \in [\![2\ ,\ n]\!]$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$. *Donc :*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} kB_{n,k} \\
&= n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} \\
&= nX\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k(1-X)^{n-1-k} \\
&= nX
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^{n} kB_{n,k} \\
&= n\sum_{k=2}^{n} (k-1)\binom{n-1}{k-1} X^k(1-X)^{n-k} \\
&= n(n-1)\sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} X^k(1-X)^{n-k} \\
&= n(n-1)X^2\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^k(1-X)^{n-2-k} \\
&= n(n-1)X^2
\end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)B_{n,k} + \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k} = nX((n-1)X+1).$$

3. (a) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $k \in [\![0\ ,\ n]\!]$.
   — *Si* $k=0$, $B_{n,0} = (1-X)^n$ *et donc* $B'_{n,0} = -n(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}$.
   — *Si* $k=n$, $B_{n,n} = X^n$ *et donc* $B'_{n,n} = nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}$.
   — *Si* $k \in [\![1\ ,\ n-1]\!]$ *et comme* $(n-k)\binom{n}{k} = (n-k)\binom{n}{n-k} = n\binom{n-1}{n-1-k} = n\binom{n-1}{k}$, *alors :*

$$B'_{n,k} = n(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k}).$$

(b) *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
(P_n(f))'(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) B'_{n,k}(x) \\
&= -nf(0)B_{n-1,0}(x) + nf(1)B_{n-1,n-1}(x) + n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)(B_{n-1,k-1}(x) - B_{n-1,k}(x)) \\
&= -nf(0)B_{n-1,0}(x) + nf(1)B_{n-1,n-1}(x) + n\sum_{k=0}^{n-2} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k}(x) - n\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k}(x) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) B_{n-1,k}(x) - n\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n-1,k}(x) \\
&= n\sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) B_{n-1,k}(x)
\end{aligned}$$

(c) *On suppose que f est coissante sur [0,1]. Soit* $x \in [0,1]$. *On a, pour tout* $k \in [\![0\ ,\ n-1]\!]$, $f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) \geq 0$ *et donc* $(P_n(f))'(x) \geq 0$. *D'où* $P_n(f)$ *est croissante sur [0,1].*

4. (a) *Soit* $x \in [0,1]$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) &= x^2 \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(x) - 2\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) + \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} k^2 B_{n,k}(x) \\
&= x^2 - 2x^2 + \frac{(n-1)x^2 + x}{n} = \frac{x(1-x)}{n}
\end{aligned}$$

(b) *Démontrons le résultat par l'absurde. Supposons, donc,* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_n, y_n) \in [0,1]^2,\ |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ *et* $|f(x_n) - f(y_n)| > \frac{\varepsilon}{2}$. *Puisque* $[0,1]^2$ *est un compact, alors, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite* $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})_n$ *de* $((x_n, y_n))_n$ *convergeant vers* $(x,y) \in [0,1]^2$.
Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{1}{n}$, *donc, par passage à la limite, on a* $x = y$.
Et $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \frac{\varepsilon}{2}$ *contrdit le fait que f est continue.*

(c) i. *On a, pour tout* $k \in A$, $\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, *donc :*

$$\sum_{k\in A} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k} \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\in A} B_{n,k} \leq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

ii.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in B} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| B_{n,k} &\leq 2M\sum_{k\in B} B_{n,k} \\
&\leq \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k\in B}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} \ \text{car } \forall k \in B,\ \frac{\left(x - \frac{k}{n}\right)^2}{\alpha^2} \geq 1 \\
&\leq \frac{2M}{\alpha^2}\sum_{k=0}^{n}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k} \\
&\leq \frac{2M}{n\alpha^2} x(1-x) \ \text{d'après I.4.a} \\
&\leq \frac{M}{2n\alpha^2} x(1-x) \ \text{car } \forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leq \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(d) *Soit* $x \in [0,1]$. *Comme (A,B) est une partition de* $[\![0\ ,\ n]\!]$ *et* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x)B_{n,k}(x)$ *(d'après I.1.a) et donc,* *d'après I.4.c.i et I.4.c.ii*

$$\begin{aligned}
|P_n(f)(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)B_{n,k}\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k} \\
&\leq \sum_{k\in A}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k} + \sum_{k\in B}\left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|B_{n,k} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\alpha^2}
\end{aligned}$$

(e) *Comme* $\dfrac{M}{2n\alpha^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*, donc* $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow \dfrac{M}{2n\alpha^2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$
$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ n \geq N \Longrightarrow |P_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$*. D'où* $(P_n(f))_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers f sur [0,1].*

5. *Considérons* $\varphi :\ \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-a}{b-a} \end{array}$ *, il est clair que* φ *est une bijection continue et* $\varphi^{-1} :\ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [a,b] \\ x & \longmapsto & (1-x)a + xb \end{array}$
Posons $f = g \circ \varphi^{-1}$ *qui est continue sur [0,1]. Donc elle est limite uniforme de* $(P_n(f))_{n\geq 1}$ *sur [0,1].*
Posons : $\forall n \geq 1,\ \forall x \in [a,b],\ Q_n(g)(x) = P_n(f(x))(\varphi(x))$ *(est une fonction polynômiale). Alors* $\forall x \in [a,b]$

$$|g(x) - Q_n(g)(x)| = |(f - P_n(f))(\varphi(x))| \leq \|f - P_n(f)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

c-à-d $(Q_n(g))_n$ *converge uniformément vers g sur [a,b].*

Partie II

1. (a) *Puisque* S_n *suit la loi binomiale de paramètres n et x, alors* $S_n(\Omega) = [\![0\ ,\ n]\!]$ *et* $\forall k \in [\![0\ ,\ n]\!],\ P(S_n = k) = B_{n,k}(x)$.
Donc

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^{n} kB_{n,k}(x) = nx \text{ et } V(S_n) = E(S_n^2) - (E(S_n))^2 = \sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}B_{n,k}(x) - n^2x^2 = nx(1-x).$$

Donc $E(X_n) = x$ *et* $V(X_n) = \dfrac{1}{n^2}V(S_n) = \dfrac{x(1-x)}{n}$.

(b) *Soit* $\delta > 0$*. On a d'apèes l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,*

$$P(|X_n - x| \geq \delta) \leq \frac{V(X_n)}{\delta^2} = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

2. (a) *D'après le théorème de transfert,*

$$C_n(f)(x) = E(f(X_n)) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)B_{n,k}(x) = P_n(f)(x)$$

Donc $C_n(f)$ *est polynomiale sur [0,1].*

(b) i. *Puisque, pour tout* $k \in [\![0\ ,\ n]\!]$*, on a* $P\left(X = \dfrac{k}{n}\right) = P(S_n = k) = B_{n,k}(x)$*, alors d'après la question I.4.c.i on a le résultat.*

ii. *Pour tout* $k \in [\![0\ ,\ n]\!]$ *tel que* $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| > \beta$*, on a* $\left(X_n = \dfrac{k}{n}\right) = (|X_n - x| > \beta)$ *et donc, d'après II.1.b,* $P\left(X_n = \dfrac{k}{n}\right) \leq \dfrac{1}{4n\beta^2}$*. D'où*

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|>\beta}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)P\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \leq \frac{M}{2n\beta^2}.$$

(c) *On procède comme dans I.4.d et I.4.e pour conclure que* $(C_n(f))_{n\geq 1}$ *converge uniformément vers f sur [0,1].*

Partie III

1. (a) *Par linéarité de l'intégrale, on a :* $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \int_a^b P(x)f(x)dx = 0$. *Or d'après le théorème de Stone-Weierstrass f est limite uniforme d'une suite de polynômes réels* $(P_n)_n$ *sur [a,b]. Et on a*

$$\forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N},\ |f^2(x) - f(x)P_n(x)| = |f(x)||f(x) - P_n(x)| \leq \|f\|_\infty \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $(fP_n)_n$ *converge uniformément vers* f^2 *sur [a,b].*
D'après le théorème d'interversion limite-intégrale, $0 = \int_a^b f(x)P_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f^2(x)dx$. *Donc* $\int_a^b f^2(x)dx = 0$.
Or f^2 *est positive et continue sur [a,b], donc* f^2 *est nulle sur [a,b]. D'où f est nulle sur [a,b].*

(b) *La fonction* $x \mapsto x^n e^{-(1-i)x}$ *est intégrable sur* $[0,+\infty[$ *car elle y est continue et* $|x^n e^{-(1-i)x}| = x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ *au voisinage de* $+\infty$. *Et, par intégration par partie, on a* $I_{n+1} = \frac{n+1}{1-i} I_n$. *D'où, par récurrence sur n, on a :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{n!}{(1-i)^n} I_0 = \frac{n!}{(1-i)^{n+1}}.$$

(c) *Soit* $\phi : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-\sqrt[4]{x}} \sin(\sqrt[4]{x}) \end{array}$. ϕ *est continue et non nulle sur* $[0,+\infty[$. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *En utilisant le changement de variable* $y = \sqrt[4]{x}$ *et la question III.1.b,*

$$\int_0^{+\infty} x^n \phi(x)dx = 4\int_0^{+\infty} y^{4n+3} e^{-y} \sin(y)dy = 4Im(I_{4n+3}) = 0$$

Commentaire *: cette question nous permet de conclure que la généralisation de III.1.a n'est pas vrai sur un intervalle quelconque.*

2. *D'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe une suite* $(Q_n)_n$ *de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers g.*
On a alors $\int_a^b Q_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b g(t)dt$.
Posons $P_n(t) = Q_n(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b Q_n(x)dx$ *et donc* $(P_n)_n$ *est une suite de polynômes convergeant uniformément vers g sur [a,b] vérifiant* $\int_a^b P_n(t)dt = 0$.

3. *Comme* φ' *est continue sur I, alors il existe une suite* (Q_n) *de fonctions polynomiales convegeant uniformément vers* φ' *sur I.*
Posons alors $P_n(x) = \varphi(a) + \int_a^x Q_n(t)dt$. *L'inégalité* $|P_n(x) - \varphi(x)| \leq \int_a^x |\varphi'(t) - Q_n(t)|dt$ *permet d'établir que* $(P_n)_n$ *converge uniformément vers* φ *sur I. Et puisque* $P_n' = Q_n$, *la suite* $(P_n)_n$ *convient.*

4. *il existe une suite* (Q_n) *de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers* ψ *sur I. Posons* $m_n = \inf_{t\in I} Q_n(t)$ *et* $m = \inf_{t\in I} \psi(t)$. *Or* Q_n *et* ψ *sont continues sur le segment I, donc il existe* $t_n,\ t' \in [a,b]$ *tel que* $m_n = Q_n(t_n)$ *et* $m = \psi(t')$. *Montrons que* $m_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} m \geq 0$. *Soit* $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \forall t \in I, |\psi(t) - Q_n(t)| < \varepsilon$, *donc* $\forall n \geq N\ m_n = Q_n(t_n) > \psi(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$ *et* $m = \psi(t') > Q_n(t') - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon$ *donc* $\forall n \geq N\ |m_n - m| < \varepsilon$.
Ainsi $m_n \to m$.
La suite $(P_n = Q_n - m_n + m)$ *convient.*

Problème : 2

Partie I

1. *Si Z suit la loi de Bernoulli de paramètre p, alors* $Z(\Omega) = \{0,1\}$ *et* $P(Z=1) = p,\ P(Z=0) = 1-p$. *Donc par, le théorème de transfert,*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M_Z(t) = pe^t + 1 - p.$$

2. *Par, le théorème de transfert,* $\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j e^{tx_j}$ *et donc* M_X *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ M_X^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j x_j^k e^{tx_j}.$$

D'où $\forall k \in \mathbb{N},\ M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

3. (a) φ_X *est bien définie sur* $\mathbb{R}^*$ *car* M_X *est strictement positive sur* $\mathbb{R}$ *puisque :*
   - $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall j \in [\![1\ ,\ r]\!],\ e^{txj} > 0$
   - $\exists i \in [\![1\ ,\ r]\!],\ p_i > 0$ *puisque* $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$

   Soit $t \in \mathbb{R}^*$.

$$M_X(t) = \sum_{j=1}^{r} p_j e^{tx_j} = \sum_{j=1}^{r} p_j(1 + x_j t + \frac{x_j^2}{2}t^2 + o_{t\to 0}(t)) = 1 + E(X)t + \frac{E(X^2)}{2}t^2 + o_{t\to 0}(t^2)$$

   Donc $\varphi_X(t) = E(X) + \dfrac{V(X)}{2}t + o_{t\to 0}(t)$. *D'où* $\lim_{t\to 0} \varphi_X(t) = E(X)$. *Donc* φ_X *est prolongeable par continuité en 0*

   (b) *D'après la question précédente* φ_X *admet un développement limité d'ordre 1 en 0, donc elle est dérivable en 0 et* $\varphi'_X(0) = \dfrac{V(X)}{2}$.

   (c) i. *Soit* $u \leq 0$. *D'après la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, il existe* $c \in]u, 0[$ *tel que :*

$$e^u - 1 - u - \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{3!}u^3 e^c \leq 0 \text{ car } u \leq 0.$$

   D'où $\forall u \leq 0,\ e^u \leq 1 + u + \dfrac{1}{2}u^2$.

   ii. *Soit* $t \geq 0$. *On a, pour tout* $j \in [\![1\ ,\ r]\!],\ tx_j \leq 0$, *donc, d'après la question précédente,*

$$M_X(t) \leq \sum_{j=1}^{r} p_j \left(1 + tx_j + \frac{1}{2}x_j^2 t^2\right) = 1 + E(X)t + \frac{t^2}{2}V(X)$$

   Et comme $\forall x > -1,\ ln(1+x) \leq x$, *alors*

$$\varphi_X(t) \leq E(X) + \frac{t}{2}V(X) \leq E(X) + \frac{t}{2}E(X^2) \text{ car } V(X) = E(X^2) - E^2(X) \leq E(X^2).$$

   (d) i. *Considèrons l'endomorphisme* ϕ *de* $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ *définie par :* $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}),\ \phi(f) = f'$.
   On a, pour tout $i \in [\![1\ ,\ r]\!], f_i$ *n'est pas nulle et* $\phi(f_i) = x_i f_i$, *donc* f_i *est un vecteur propre de* ϕ *associé à la valeur propre* x_i. *Et comme les* x_i *sont deux à deux distinctes, alors* $(f_1, \ldots, f_r)$ *est libre.*

   ii. *Dans cette question on n'a oublié de dire que* $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_r\}$.
   $\Longrightarrow$ *C'est évident.*
   $\Longleftarrow$ *On pose, pour tout* $j \in [\![1\ ,\ r]\!],\ p_j = P(X = x_j)$ *et* $q_j = P(Y = x_j)$.
   On a $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, *donc* $\forall t \in \mathbb{R}^*,\ M_X(t) = M_Y(t)$, *c-à-d* $\sum_{k=1}^{r}(p_k - q_k)f_k = 0$. *Et comme la famille* $(f_1, \ldots, f_r)$ *est libre, alors* $j \in [\![1\ ,\ r]\!],\ p_j = q_j$. *D'où ont la même loi.*

   (e) *Puisque X et Y sont indépendantes, alors* $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{tX}$ *et* e^{tY} *le sont aussi. Donc* $E\left(e^{t(X+Y)}\right) = E\left(e^{tX}e^{tY}\right) = E\left(e^{tX}\right)E\left(e^{tY}\right)$. *D'où* $\varphi_{X+Y} = \varphi_X + \varphi_Y$

   (f) *Le résultat de la question précédente se généralise, par récurrence, à un nombre fini de variables aléatoires discrètes finies mutuallement indépendantes.*
   Comme X suit la loi binomiale de paramètres s et p, alors on peut voir X comme somme de s variables aléatoires $X_1, \ldots, X_s$ *qui ont même loi de Bernoulli de paramètre p.*
   Donc, d'après la question précédente, $\varphi_X = \sum_{j=1}^{s} \varphi_{X_j} = s\varphi_{X_1}$. *Donc*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ M_X(t) = (M_{X_1})^s = (pe^t + 1 - p)^s.$$

(g)

$$\begin{aligned}
X \text{ et } -X \text{ sont symétriques} &\iff X \text{ et } -X \text{ ont même loi}\\
&\iff \varphi_X = \varphi_{-X} \text{ (d'après I.3.d.ii)}\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(t) = \frac{1}{t}\ln\left(E\left(e^{-tX}\right)\right) \text{ et } \varphi_X(0)=0\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R}^*,\ \varphi_X(-t) = -\frac{1}{t}\ln\left(E\left(e^{tX}\right)\right) \text{ et } \varphi_X(0)=0\\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_X(t) = -\varphi_X(-t)\\
&\iff \varphi_X \text{ est impaire}
\end{aligned}$$

4. (a) *Soit* $(n,t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^*$.

$$M_{S_n^*}(t) = E\left(e^{tS_n^*}\right) = e^{-t\frac{E(S_n)}{\sigma(S_n)}} E\left(e^{t\frac{S_n}{\sigma(S_n)}}\right)$$

Or

$$E(S_n) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = nm$$

et puisque les X_k *sont mutuellement indépendantes, alors :*

$$V(S_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = n\sigma^2.$$

Donc $M_{S_n^*}(t) = e^{-t\frac{m\sqrt{n}}{\sigma}} E\left(e^{t\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}\right)$. *D'où*

$$\varphi_{S_n^*}(t) = -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \varphi_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t)$$

Et puisque les X_k *sont mutuellement indépendantes , alors les* $\dfrac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}$ *le sont aussi et, d'après I.3.e, on a :*

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{\frac{X_k}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = n\varphi_{\frac{X}{\sigma\sqrt{n}}}(t)$$

Or,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{X}{\sigma\sqrt{n}}}(t) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\frac{1}{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}}\ln\left(E\left(e^{\frac{t}{\sigma\sqrt{n}X}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)
\end{aligned}$$

D'où

$$\varphi_{S_n^*}(t) = -\frac{m\sqrt{n}}{\sigma} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\varphi_X\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

(b) *Quand* $n \to +\infty$, $\varphi_X\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = m + \dfrac{t\sigma}{2\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
Donc

$$\varphi_{S_n^*}(t) = \frac{t}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{t}{2}.$$

Partie II

1. (a) *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $b \in]a,c[$, *alors* $\exists \lambda \in]0,1[,\ b = \lambda a + (1-\lambda)c$ ($\lambda = \dfrac{c-b}{c-a}$).
Or exp *est convexe, donc* $e^{bx} \leq \lambda e^{ax} + (1-\lambda)e^{cx} \leq e^{ax} + e^{cx}$.

(b) *On pose* $X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X = x_n) = p_n$. *On a* $\forall t \in I_X,\ M_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n e^{tx_n}$.

— *Comme* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, *alors* $0 \in I_X$.

— *Soit* $a, c \in I_X$ *tel que* $a < c$ *et* $b \in]a, c[$. *Alors* $M_X(a)$ *et* $M_X(c)$ *existent. Or, d'après la question précédente,* $\forall n \in \mathbb{N},\ e^{bx_n} \leq\leq e^{ax_n} + e^{cx_n}$, *donc* $M_X(b)$ *existe et par suite* $b \in I_X$
Donc I_X *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant 0.*

2. *On a* $Y(\Omega) = \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ P(Y = n) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. *Soit* $t \in \mathbb{R}$,*on pose* $a_n(t) = e^{-\lambda}\dfrac{(e^t\lambda)^n}{n!} > 0$.
Comme $\dfrac{a_{n+1}(t)}{a_n(t)} = \dfrac{\lambda e^t}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1$, *donc, d'après la règle de D'Alembert* $M_Y(t)$ *existe pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et* $M_Y(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(e^t\lambda)^n}{n!} = e^{\lambda(e^t-1)}$

3. (a) *On a, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-\alpha, \alpha[$ *et on a*
$$\forall (k, n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times]-\alpha, \alpha[,\ u_n^{(k)} = P(X = x_n)x_n^k e^{tx_n}$$
et Donc
$$\forall (k, n, t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times]-\alpha, \alpha[,\ \left|u_n^{(k)}\right| \leq P(X = x_n)|x_n|^k e^{\alpha|x_n|}$$
car $\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times]-\alpha, \alpha[,\ |tx_n| \leq \alpha|x_n|$.

(b) *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *D'après la question précédente,*
$$\forall (n, t) \in \mathbb{N} \times]-\alpha, \alpha[,\ |u_n^{(k)}(t) \leq |x_n|^k e^{-\delta|x_n|}P(X = x_n)e^{\rho|x_n|} \text{ où } \delta = \rho - \alpha > 0$$
Or si $k \geq 1$, *la fonction* $t \mapsto t^k e^{-\delta t}$ *admet sur* $[0, +\infty[$ *un maximum absolu en* $\dfrac{\delta}{k} > 0$, *qu'on le note* $N_k > 0$.
Sinon, $u_n(t) \leq P(X = x_n)e^{\rho|x_n|}$. *Donc* $M_k = \max(1, N_k)$ *convient.*

(c) *On a :*
— $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge simplement sur* $]-a, a[$.
— $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-a, a[$.
— *D'après la question précédente,* $\forall \alpha > 0$ *tel que* $[-\alpha, \alpha] \subset]-a, a[$ *et* $\rho \in]\alpha, a[$,
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists M_k > 0,\ \forall (n, t) \in \mathbb{N} \times]-\alpha, \alpha[,\ \left|u_n^{(k)}\right| \leq M_k P(X = x_n)ke^{\rho|x_n|}$$
Or $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P(X = x_n)ke^{\rho|x_n|}$ *est convergente car* $\rho \in I_X$. *Donc* $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ *converge normalement sur* $[-\alpha, \alpha]$
Donc M_X *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-a, a[$ *et*
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in]-a, a[,\ M_X^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)x_n^k e^{tx_n}$$
En particulier $M_X^{(k)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)x_n^k$. *D'où* $E(X^k)$ *existe et* $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

4. *Puisque* Y *suit la loi de Poisson de paramètre* λ, *alors* M_Y *est définie sur* $\mathbb{R}$ *et* $\forall t \in \mathbb{R},\ M_Y(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$. *Donc, d'après la question précédente,* $E(Y)$ *et* $E(Y^2)$ *existent et* $E(Y) = M_Y'(0) = \lambda$ *et* $E(Y^2) = M_Y''(0) = \lambda(1 + \lambda)$ *et donc*
$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \lambda.$$

Partie III

1. *Comme dans la question I.3.e.*

2. (a) *Le résultat est trivialement vérifié pour* $t = 0$. *Donc il suffit de le démontrer par récurrence sur* $k \in \mathbb{N}^*$ *pour tout* $t > 0$.
— *Pour* $k = 1$, *puisque la fonction* $t \mapsto e^{st}$ *est convexe sur* $[0, +\infty[$ *donc* $st \leq 1 + st \leq e^{st}$.
— *Soit* $k \geq 1$. *Supposons que la propriété est vraie pour* k *et montrons la pour* $k + 1$.
— *Considérons la fonction* ϕ_{k+1} *définie sur* $[0, +\infty[$ *par :* $\phi_{k+1}(t) = (k + 1)!e^{st} - (st)^{k+1}$. ϕ_{k+1} *est classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[0, +\infty[$ *et* $\forall t \geq 0,\ \phi_{k+1}'(t) = (k+1)s(k!e^{st} - (st)^k \geq 0$ *(d'après l'hypothèse de récurrence.) Donc* ϕ_{k+1} *est croissante sur* $[0, +\infty[$. *D'où* $\forall t \geq 0,\ \phi_{k+1}'(t) \geq \phi_{k+1}'(0) = (k + 1)!$ *c-à-d* $(k + 1)!e^{st} \geq (st)^{k+1}$.
Et la récurrence est établie.

(b) *Soit* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* f *la fonction de densité de X. On a* $\forall t \in \mathbb{R},\ |t|^k \leq \dfrac{k!}{s^k}e^{s|t|}$ *et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s|t|}f(t)dt < +\infty$ *car* $s \in I_X$. *Donc* $E(|X|^k)$ *est fini.*

(c) *On a pour tout* $t \in]-s,s[$:

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tu} f(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tu)^n}{n!} f(u) \right) du.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \ : \ u \mapsto \dfrac{(tu)^n}{n!} f(u)$

— $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n *est continue par morceaux intégrable sur* $\mathbb{R}$ *(d'après la question III.2.a)*

— $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* $g \ : \ u \mapsto e^{tu} f(u)$ *qui est continue par morceaux et intégrable sur* $\mathbb{R}$ *car* $t \in]-s,s[\subset I_X$

— $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(u)|du = \frac{|t|^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^n f(u)du = \frac{E(|tX|^n)}{n!}$
($\forall t \in]-s,s[, E(|tX|)$ *existe puisque :* $[-s,s] \subset I_X$ *avec* $s > 0$, *et* $\exp(a|X|) < \exp(sX) + \exp(-sX)$ *on en déduit que* $E(\exp(a|X|))$ *existe, et donc* $E(\exp|tX|)$ *existe pour tout* $|t| \leq s$.*)*

— $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{E(|tX|^n}{n!}$ *converge vers* $\exp(E(|tX|)$.

Donc, d'près le théorème d'intégration terme à terme,

$$\forall t \in]-s,s[,\ M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(u)du = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u^n f(u)du \right) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(X^n)}{n!} t^n.$$

(d) *D'après la question précédente* M_X *est développable en série entière en 0 et donc* $\forall k \in \mathbb{N}$, $M_X^{(k)}(0) = E(X^k)$.

FIN