

## Corrigé de l'épreuve de mathématiques I Filière MP

À propos de l'unimodularité des zéros d'un polynôme auto-inverse. Extremums

Corrigé par M.TARQI<sup>1</sup>

### Exercice

1. Pour tout  $(x, y) \in [0, 1]^2$ , on a  $(1 - \sqrt{xy})^2 - (1-x)(1-y) = x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ , donc  $(1-x)(1-y) \leq (1 - \sqrt{xy})^2$ .
2. Il est clair que  $f$  est continue sur  $[0, 1]^2 \setminus \{(1, 1)\}$ , comme rapport de deux fonctions continues. De plus l'inégalité précédente montre que  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2 \setminus \{(1, 1)\}$ ,  $|F(x, y)| \leq xy(1 - \sqrt{xy})$ , donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} F(x, y) = 0 = F(1, 1),$$

donc  $F$  est continue sur  $[0, 1]^2$ .

3.  $[0, 1]^2$  étant un compact de  $\mathbb{R}^2$ , donc par théorème de continuité sur les compacts,  $F$  est bornée sur  $[0, 1]^2$  et atteint ses bornes.
4. On remarque que  $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$ ,  $F(x, y) \geq 0 = F(1, 1)$  donc  $\inf_{(x,y) \in [0,1]^2} F(x, y) = 0$ . De plus  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $F(x, 1) = F(1, x) = F(x, 0) = F(0, x) = 0$ , donc  $\inf_{(x,y) \in [0,1]^2} F(x, y)$  est atteint sur la frontière du carré  $[0, 1]^2$ .
5. On voit que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $]0, 1[^2$  comme rapport de deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\forall (x, y) \in ]0, 1[^2$ , on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{y(1-y)(1-2x+x^2y)}{(1-xy)^2}.$$

Puisque  $F$  est symétrique, alors

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{x(1-x)(1-2y+xy^2)}{(1-xy)^2}.$$

6.  $(x_0, y_0) \in ]0, 1[^2$  est un point critique si et seulement si  $(x_0, y_0)$  vérifie le système

$$\begin{cases} 1 - 2x + x^2y = 0 \\ 1 - 2y + xy^2 = 0 \end{cases}$$

Ceci implique que  $x_0 = y_0$  et donc  $1 - 2x_0 + x_0^3 = 0$ . Les racines de l'équation  $1 - 2x + x^3 = 0$  sont  $1$ ,  $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ , donc nécessairement  $x_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . D'où l'unique point

critique de  $F$  :  $\left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ .

7. On obtient  $F(x_0, y_0) = \frac{5\sqrt{5} - 11}{2}$ . D'autre part on sait que la borne supérieure de  $F$  sur  $[0, 1]^2$  existe et atteint, donc nécessairement  $F(x_0, y_0) = \sup_{(x,y) \in [0,1]^2} F(x, y)$ .

---

1. Veuillez adresser toute remarque, correction ou suggestion à l'auteur : medtarqi@yahoo.fr

# Problème

## A props de l'unimodularité des zéros d'un polynôme auto-inverse

### Première partie : Résultats préliminaires

1.1 On sait que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < 1$ , la série géométrique  $\sum_{m \in \mathbb{N}} z^m$  converge et que

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m = \frac{1}{1-z}. \text{ Le rayon de convergence est } 1.$$

1.2 On remarque que  $\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = \frac{1}{1-\beta e^{-it}}$ . Donc si  $|\beta| < 1$ , alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $|\beta e^{-it}| < 1$ , donc

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} (\beta e^{-it})^m = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m e^{-imt}.$$

1.3 De même, on a  $\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = -\frac{e^{it}}{\beta} \frac{1}{1-\beta^{-1}e^{it}}$ . Par conséquent si  $|\beta| > 1$ , alors  $|\beta^{-1}e^{it}| < 1$ , et donc

$$\frac{e^{it}}{e^{it}-\beta} = -\frac{e^{it}}{\beta} \sum_{m=0}^{\infty} (\beta^{-1}e^{it})^m = -\frac{e^{it}}{\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{-m} e^{imt}.$$

$$|\beta| > 1$$

1.4 • Cas  $|\beta| < 1$  : D'après la définition, on a :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-\beta} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}-\beta} dt = i \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m e^{-imt} dt.$$

D'autre part la série de fonctions  $\sum_{m=0}^{\infty} \beta^m e^{-imt}$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$ , puisque

$\forall t \in [0, 2\pi]$ ,  $|\beta^m e^{-imt}| \leq |\beta|^m$  et la série  $\sum_{m=0}^{\infty} |\beta|^m$  converge. Donc on peut intégrer terme à terme :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-\beta} = i \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m \int_0^{2\pi} e^{-imt} dt = 2i\pi.$$

• Cas  $|\beta| > 1$  : De la même façon on montre que la série de fonctions  $\frac{-1}{\beta} \sum_{m \geq 0} \beta^{-m} e^{-i(m+1)t}$  converge uniformément sur  $[0, 2\pi]$ , donc

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-\beta} = i \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m e^{-imt} dt = \frac{-1}{\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \beta^{-m} \int_0^{2\pi} e^{-i(m+1)t} dt = 0.$$

D'où :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z-\beta} = \begin{cases} 2i\pi & \text{si } |\beta| < 1 \\ 0 & \text{si } |\beta| > 1 \end{cases}$$

1.5 Montrons d'abord le résultat suivant : si  $z$  et  $z'$  sont deux nombres complexes tels que  $|z + z'| = |z| + |z'|$ , avec  $z \neq 0$ , alors il existe  $\alpha > 0$  tel que  $z' = \alpha z$ . En effet, l'égalité  $|z + z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$  s'écrit encore  $z\bar{z}' + z'\bar{z} = 2|z||z'|$ , d'où  $\operatorname{Re}(z'\bar{z}) = |z||z'| = |zz'|$ . Donc  $z'\bar{z} = r \in \mathbb{R}_+$  et  $z'\bar{z}z = z'|z|^2 = rz$ , d'où  $z' = \frac{r}{|z|^2}z$ .

D'autre part, par l'inégalité triangulaire, on a  $|\lambda v + \mu w| \leq |\lambda v| + |\mu w| = \lambda + \mu = 1$  (\*). Supposons maintenant que  $|\lambda v + \mu w| = 1 = |\lambda v| + |\mu w|$ , alors d'après ce qui précède il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\mu w = \alpha \lambda v$ .

Si on pose  $v = e^{i\theta_1}$  et  $w = e^{i\theta_2}$ , l'égalité précédente montre que  $e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \in \mathbb{R}$ , donc  $\theta_1 - \theta_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$ , ce qui implique que  $w = v$ , ceci est absurde.

Finalement l'inégalité (\*) est stricte.

## Deuxième partie :

### Deux résultats de localisation des racines d'un polynôme

2.1 Posons, pour chaque  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $P = (X - z_k)^{\alpha_k} Q$ . Donc

$$P' = \alpha_k (X - z_k)^{\alpha_k - 1} Q + (X - z_k)^{\alpha_k} Q'.$$

On trouve alors

$$\frac{P'}{P} = \frac{\alpha_k}{X - z_k} + \frac{Q'}{Q}.$$

Or  $z_k$  n'est pas une racine de  $Q$ , donc  $\frac{Q'}{Q}$  n'admet pas  $z_k$  pour pôle et  $\frac{\alpha_k}{X - z_k}$  est la partie polaire de  $\frac{P'}{P}$  relative à  $z_k$ . On reprend le même raisonnement mais cette fois avec la fraction  $\frac{Q'}{Q}$ .

Finalement si  $P = a \prod_{k=1}^r (X - z_k)^{\alpha_k}$ , on trouve

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{X - z_k}.$$

Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ ,  $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{z - z_k}$ .

2.2 Soit  $w$  une racine de  $P'$  qui n'est pas une racine de  $P$ .

2.2.1 L'égalité de la question 2.1 entraîne  $0 = \sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k}{w - z_k}$ . On multiplie ensuite chaque dénominateur par son conjugué, et on prend le conjugué de tout cela. On obtient l'égalité demandée :

$$\sum_{k=1}^r \frac{\alpha_k (w - z_k)}{|w - z_k|^2} = 0.$$

2.2.2 Posons, pour chaque  $k \in \{1, 2, \dots, r\}$ ,  $\lambda_k = \frac{\alpha_k}{|w - z_k|^2} > 0$  et  $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r$ . On obtient alors

$$w = \sum_{k=1}^r \left( \frac{\lambda_k}{\lambda} \right) z_k.$$

Donc il suffit de prendre  $\beta_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$ .

2.3 Si  $w$  est une racine de  $P$  qui n'est pas une racine de  $P'$ , le résultat est bien démontré dans la question 2.2.2. Le cas d'une racine multiple  $w$  est évident puisque  $w$  figure parmi les racines de  $P$ .

2.4

2.4.1 L'ensemble  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  étant fini, donc il est fermé et par conséquent  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  est un ouvert de  $\mathbb{C}$ .

La fonction  $z \mapsto \frac{P'(z)}{P(z)}$  est continue sur  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  comme rapport de deux fonctions continues sur  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

2.4.2 D'après la question 2.1, on a :

$$\int_{\gamma} \frac{P(z)}{P'(z)} dz = \sum_{k=1}^r \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_k}.$$

En changeant le numérotage, on peut supposer  $|z_1| < 1, \dots, |z_s| < 1$  et  $|z_{s+1}| > 1, \dots, |z_r| > 1$ . On obtient alors, en utilisant le résultat de la question 1.4,

$$\int_{\gamma} \frac{P(z)}{P'(z)} dz = \sum_{k=1}^r \int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_k} = \sum_{k=1}^s 2i\pi.$$

D'où  $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{P(z)}{P'(z)} dz = s$ ;  $s$  est nombre de racines de  $P$  dont le module est strictement inférieure à 1.

## Troisième partie : Une condition suffisante d'unimodularité de zéros d'un polynôme auto-inverse

3.1 Notons  $a_k = k - n, k \in \{0, \dots, 2n\}$  les coefficients du polynôme  $S_n, k \in \{0, \dots, 2n\}$ , on a

$$\overline{a_{2n-k}} = 2n - k - n = n - k = a_k,$$

donc  $S_n$  est auto-inverse avec  $\varepsilon = 1$ .

3.2 Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  un polynôme à coefficients complexes de degré  $d$  et  $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ .

3.2.1 Si  $P$  est auto-inverse de paramètre  $\varepsilon$ , alors  $a_k = \varepsilon \overline{a_{d-k}}$ , pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, d\}$ , en particulier  $P(0) = \varepsilon \overline{a_d} \neq 0$  (le coefficient dominant est non nul).

On a aussi,

$$a_k = \varepsilon \overline{a_{d-k}} = \varepsilon^2 \overline{\overline{a_{d-(d-k)}}} = \varepsilon a_k.$$

On obtient donc, pour  $k = d, a_d = \varepsilon^2 a_d$ , donc  $\varepsilon^2$  et puis  $|\varepsilon| = 1$ .

3.2.2 Si  $P$  est auto-inverse de paramètre  $\varepsilon$ , alors pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ ,

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^d a_k z^k \\ &= \varepsilon \sum_{k=0}^d \overline{a_{d-k}} z^k \\ &= \varepsilon z^d \sum_{k=0}^d \overline{a_{d-k}} z^{k-d} = \varepsilon z^d \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} \end{aligned}$$

Réciproquement, soit  $P$  un polynôme tel que  $\forall z \in \mathbb{C}^*$ ,  $P(z) = \varepsilon z^d \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)}$ , alors on obtient l'égalité  $\sum_{k=0}^d a_k z^k = \varepsilon \sum_{k=0}^d \overline{a_{d-k}} z^k$ , comme  $\mathbb{C}^*$  est infini, alors  $\forall k \in \{0, 1, \dots, d\}$ ,  $a_k = \varepsilon \overline{a_{d-k}}$ , donc  $P$  est auto-inverse de paramètre  $\varepsilon$ .

3.3 On peut vérifier facilement que  $\overline{P+Q} = \overline{P} + \overline{Q}$  et  $\overline{PQ} = \overline{P}\overline{Q}$ .

3.4

3.4.1 Supposons  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$  auto-inverse de paramètre  $\varepsilon$ . Notons  $b_k, k \in \{0, 1, \dots, d+1\}$  les coefficients de  $(X-1)P$ , on a :

$$(X-1)P = -a_0 + \sum_{k=1}^d (a_{k-1} - a_k)X^k + a_d X^{d+1}.$$

Donc  $b_0 = a_0, b_k = a_{k-1} - a_k, k \in \{1, 2, \dots, d\}$  et  $b_{d+1} = a_d$ , on a donc  $b_0 = \varepsilon \overline{b_{d+1}}, b_k = a_{k-1} - a_k = \varepsilon(\overline{a_{d-k+1}} - \overline{a_{d-k}}) = \varepsilon \overline{b_{d+1-k}}, k \in \{1, 2, \dots, d\}$  et  $b_{d+1} = a_d = \varepsilon \overline{a_0} = \varepsilon \overline{b_0}$ .

Donc  $(X-1)P$  est auto-inverse de paramètre  $\varepsilon$ .

3.4.2 On a  $P_\mu(z) = \sum_{k=0}^d a_k \mu^k z^k$  et  $\forall k \in \{0, 1, \dots, d\}, a_k \mu^k = \varepsilon \mu^d \overline{a_{d-k} \mu^{d-k}}$  (car  $\overline{\mu} = \frac{1}{\mu}$ ) donc  $P_\mu$  est auto-inverse de paramètre  $\varepsilon \mu^d$ .

3.4.3 Posons  $P = a \prod_{k=1}^r (z - z_k)^{\alpha_k}$  où les racines  $z_k$  sont de module 1. On a, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  :

$$\begin{aligned} z^d \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{a} z^d \prod_{k=1}^r \left(\frac{1}{z} - \overline{z_k}\right)^{\alpha_k} \\ &= \overline{a} z^d \prod_{k=1}^r \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_k}\right)^{\alpha_k} \\ &= \frac{\overline{a} z^d}{z^d \prod_{k=1}^r z_k^{\alpha_k}} \prod_{k=1}^r (z_k - z)^{\alpha_k} \end{aligned}$$

Donc  $P(z) = \varepsilon z^d \overline{P\left(\frac{1}{z}\right)}$  avec  $\varepsilon = (-1)^d \frac{\prod_{k=1}^r z_k^{\alpha_k}}{\overline{a}}$ . D'après 3.2.2,  $P$  est auto-inverse.

3.4.4 Le polynôme  $X^2 - X - 1$  répond à la question.

3.5 Le polynôme  $X^n \overline{Q\left(\frac{1}{X}\right)}$  est de degré  $\leq n$ , le polynôme  $X^{d-n} Q$  est de degré  $d$ , donc  $\deg R = d$ .

D'autre part, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$ , on a :

$$\varepsilon z^d \overline{R\left(\frac{1}{z}\right)} = \varepsilon z^d \left(\frac{1}{z}\right)^{d-n} \overline{Q\left(\frac{1}{z}\right)} + \overline{\varepsilon} \varepsilon z^d \left(\frac{1}{z}\right)^n Q(z) = \varepsilon z^n \overline{Q\left(\frac{1}{z}\right)} + z^{d-n} Q(z) = R(z).$$

Donc  $R$  est auto-inverse.

### 3.6

3.6.1 Si  $z \in \mathbb{U}$ , on a  $|Q_1(z)| = |z^{d-n}Q(z)| = |Q(z)|$  et  $|Q_2(z)| = \left| \overline{Q} \left( \frac{1}{z} \right) \right|$ . Mais  $\overline{Q} \left( \frac{1}{z} \right) = \overline{Q(\overline{z})} = \overline{|Q(\overline{z})|} = |Q(z)|$ , donc  $|Q_1(z)| = |Q_2(z)|$ .

3.6.2 Supposons qu'il existe  $\lambda \in [0, 1[$  et  $z \in \mathbb{U}$  tels que  $Q_1(z) + \lambda Q_2(z) = 0$ , donc  $Q_1(z) = -\lambda Q_2(z)$  en prenant le module, on obtient  $|\lambda| = 1$ , ce qui est absurde. Donc  $\forall \lambda \in [0, 1[, \forall z \in \mathbb{U}, Q_1(z) + \lambda Q_2(z) \neq 0$ .

3.6.3 L'application  $\lambda \mapsto \frac{Q_1'(z) + \lambda Q_2'(z)}{Q_1(z) + \lambda Q_2(z)}$  est bien définie et continue sur  $[0, 1[$ , donc d'après le théorème de continuité des fonctions définies par des intégrales, la fonction

$$\varphi : \lambda \mapsto \int_{\gamma} \frac{Q_1'(z) + \lambda Q_2'(z)}{Q_1(z) + \lambda Q_2(z)} dz$$

est continue sur  $[0, 1[$ .

D'après la question 2.4.2, cette intégrale représente le nombre de racines du polynôme  $Q_1 + \lambda Q_2$  sur  $\mathbb{U}$ , donc c'est un entier.

3.6.4 L'image d'un connexe par arcs par une application continue est un connexe par arcs, comme  $[0, 1[$  est connexe par arcs, donc l'image est un connexe par arcs, donc l'application est constante sur  $[0, 1[$ , car elle est à valeurs entières.

3.6.5 D'après ce qui précède  $\forall \lambda \in [0, 1[$ ,  $\varphi(\lambda) = \varphi(0)$ , c'est-à-dire  $R_\lambda$  et  $Q_1$  ont le même nombre de racines dans  $\mathbb{U}$ .  $Q_1$  et  $Q$  ont les mêmes racines, à l'exception de 0, les racines de  $Q$  sont de module  $< 1$ , donc il est de même pour  $R_\lambda$ .

### 3.7

3.7.1 1 est un point adhérent à  $[0, 1[$ , donc il existe une suite  $(\mu)_m$  d'éléments de  $[0, 1[$  qui converge vers 1. La suite  $(z_{k,\mu_m})_m$  étant bornée car  $\forall m, |z_{k,\mu_m}| < 1$ , donc on peut extraire une sous-suite  $(z_{k,\lambda_m})_m$  de la suite  $(z_{k,\mu_m})_m$  qui converge vers un  $z_k$ , comme  $\forall m, |z_{k,\mu_m}| < 1$ , alors on obtient, par passage à la limite,  $|z_k| \leq 1$ .

3.7.2 Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in \mathbb{C}$ , on a  $R_{\lambda_m}(z) = Q_1(z) + \lambda_m Q_2(z) = a_d \prod_{k=1}^r (z - z_{k,\lambda_m})$ . Lorsque  $m$  tend vers l'infini on obtient l'égalité

$$R(z) = Q_1(z) + Q_2(z) = a_d \prod_{k=1}^r (z - z_k).$$

et comme  $z$  est quelconque, l'égalité précédente est une égalité entre polynômes :

$$R = Q_1 + Q_2 = a_d \prod_{k=1}^r (X - z_k).$$

3.7.3 On remarque que si  $z$  est une racine de  $R$ , alors  $z \neq 0$  ( $R(0) \neq 0$ ) et  $\frac{1}{z}$  est aussi une racine de  $R$ . En effet, on a  $R(z) = 0$  si et seulement si  $z^{d-n}Q(z) + \varepsilon z^n \overline{Q} \left( \frac{1}{z} \right) = 0$  égalité qui s'écrit encore, en prenant le conjugué du tout,

$$\varepsilon \left( \frac{1}{z} \right)^n \overline{Q} \left( \frac{1}{z} \right) + \left( \frac{1}{z} \right)^{d-n} Q \left( \frac{1}{z} \right) = 0,$$

c'est-à-dire  $R\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 0$ .

Comme les  $z_k$  sont des racines de  $R$ , alors il est de même pour les  $\frac{1}{z_k}$  et donc, en tenant compte de la question 3.7.2,  $\forall k, \left|\frac{1}{z_k}\right| \leq 1$  ce qui donc  $|z_k| \geq 1$ .  
En conclusion, toutes les racines de  $R$  sont de module 1.

## Quatrième partie : Quelques applications

### 4.1 Étude des racines du polynôme $S_n$

4.1.1 On a  $X^{n+1} - 1 = (X - 1)A_n$ , donc les racines de  $A_n$  sont les racines  $n + 1$ -ièmes de l'unité à l'exception de 1. Il sont simples et de module 1.

4.1.2 Soit  $w$  une racine de  $A'_n$ , alors d'après la question 2.2.2,  $w$  est la barycentre des racines de  $A_n$ , et comme celles-ci sont de module 1, alors  $|w| < 1$  ( d'après la question 1.5 ).

4.1.3 L'ensemble des racines de  $B_n$  est formé par 0 et les racines de  $A'_n$ , donc les racines de  $B_n$ , comme celles de  $A'_n$ , sont toutes de modules strictement inférieure à 1.

4.1.4 On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{2n} (k-n)X^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k-n)X^k + \sum_{k=n+1}^{2n} (k-n)X^k \\ &= X^{2n-n} \sum_{l=1}^n lX^l + \sum_{k=0}^{n-1} (k-n)X^k \\ &= X^{2n-d} B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (k-n)X^k \end{aligned}$$

$$\text{Or } X^n \overline{B_n} \left( \frac{1}{X} \right) = X^n \sum_{k=0}^{n-1} (k-n) \frac{1}{X}^k = \sum_{k=0}^{n-1} (k-n) X^{n-k}, \text{ d'où}$$

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, S_n(z) = z^{2n-n} B_n(z) + z^n \overline{B_n} \left( \frac{1}{z} \right).$$

Donc on peut appliquer les résultats de la troisième partie, puisque toutes les conditions sont vérifiées, donc les racines de  $S_n$  sont toutes de modules 1.

### 4.2 Une condition nécessaire et suffisante d'unimodularité des zéros d'un polynôme

Si toutes les racines de  $P$  sont de modules 1, alors  $P$  est auto-inverse ( la question 3.4.3 ), et on sait que les racines de  $P'$  dans ce cas sont de modules strictement inférieure à 1 ( la question 2.2.2 ).

Inversement, supposons que  $P$  auto-inverse et que les racines de  $P'$  sont de modules strictement inférieure à 1. On a  $\forall z \in \mathbb{C}^*, P(z) = \varepsilon z^d \overline{P} \left( \frac{1}{z} \right)$  ou encore  $\overline{P}(z) = \bar{\varepsilon} z^d P \left( \frac{1}{z} \right)$ , d'où par dérivation :

$$\begin{aligned} \overline{P}'(z) &= \bar{\varepsilon} d z^{d-1} P \left( \frac{1}{z} \right) + \bar{\varepsilon} z^d \frac{-1}{z^2} P' \left( \frac{1}{z} \right) \\ &= \bar{\varepsilon} d z^{d-1} P \left( \frac{1}{z} \right) - \bar{\varepsilon} z^{d-2} P' \left( \frac{1}{z} \right) \end{aligned}$$

D'où  $\overline{P}'\left(\frac{1}{z}\right) = \overline{\varepsilon}d\left(\frac{1}{z}\right)^{d-1}P(z) - \overline{\varepsilon}\left(\frac{1}{z}\right)^{d-2}P'(z)$  et par conséquent

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, P(z) = z\frac{P'(z)}{d} + \frac{1}{\varepsilon}z^{d-1}\frac{\overline{P}'(z)}{d}.$$

Donc on peut appliquer le résultat de la partie 3 avec  $Q = \frac{\overline{P}'(z)}{d}$  : les racines de  $P$  sont toutes de module 1.

#### 4.3 Des conditions suffisantes d'unimodularité plus maniables

4.3.1 Supposons  $d = 2p$ . On a, pour tout  $z \in \mathbb{C}^*$  :

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k z^k + \frac{a_p}{2} z^p + \frac{a_p}{2} z^p + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k z^k \\ &= z^p \left( \sum_{k=0}^{p-1} a_k \left(\frac{1}{z}\right)^{p-k} + \frac{a_p}{2} \right) + z^p \left( \frac{a_p}{2} + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k z^{k-p} \right) \\ &= z^p \left( \sum_{k=1}^p a_{p-k} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \frac{a_p}{2} \right) + z^p \left( \frac{a_p}{2} + \sum_{k=1}^p a_{p+k} z^k \right) \\ &= \varepsilon z^p \left( \sum_{k=1}^p \overline{a_{p+k}} \left(\frac{1}{z}\right)^k + \varepsilon \frac{\overline{a_p}}{2} \right) + z^p Q(z) \\ &= \varepsilon z^p \overline{Q}\left(\frac{1}{z}\right) + z^{2p-p} Q(z) \end{aligned}$$

Donc pour conclure il suffit de montrer que les racines de  $Q$  sont toutes de module inférieure à 1. En effet, par l'absurde supposons que  $Q$  admet une racine  $z$  tel que

$|z| > 1$ , donc  $\frac{a_p}{2} + \sum_{k=1}^p a_{p+k} z^k = 0$  et donc  $a_d z^d = -\frac{a_p}{2} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{p+k} z^k$  ou encore

$a_d = -\frac{a_p}{2z^d} - \sum_{k=1}^{p-1} a_{p+k} \left(\frac{1}{z}\right)^{d-k}$ , puis, par inégalité triangulaire, on obtient :

$$|a_d| < \frac{|a_p|}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{p+k}| \quad (**).$$

D'autre part, on a par hypothèse,

$$|a_d| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} |a_k| = \frac{|a_p|}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} |a_k| + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^{d-1} |a_k| = \frac{|a_p|}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} |a_k| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} |a_{p+k}|$$

Mais  $a_k = \varepsilon \overline{a_{2p-k}}$  pour tout  $k$ . Donc l'inégalité précédente devient

$$|a_d| \geq \frac{|a_p|}{2} + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{p+k}|$$

Cette inégalité est en contradiction avec (\*\*).

En conclusion, les racines de  $Q$  sont toutes de module  $\leq 1$  et par conséquent celles de  $P$  sont de module 1.

Le même raisonnement se fait pour le cas de  $d = 2p + 1$ .



4.3.2 D'abord on sait que  $(X - 1)P$  est auto-inverse ( la question 3.4.1 ), de plus on a

$$(X - 1)P = \sum_{k=0}^{d+1} b_k X^k = -a_0 + \sum_{k=1}^d (a_{k-1} - a_k) X^k + a_d X^{d+1}.$$

Comme  $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d |b_k| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d |a_{k-1} - a_k| \leq |a_d|$ , alors la condition de la question 4.3.1 est vérifiée, donc les racines  $(X - 1)P$  sont toutes de module inférieure à 1, il est de même pour les racines du polynôme  $P$ .

4.3.3 Par continuité et compacité, il existe  $\mu \in \mathbb{U}$  tel que

$$\inf_{\nu \in \mathbb{U}} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \nu a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{d-1} |a_k - \mu a_{k+1}|.$$

Puisque  $|\mu| = 1$  alors si les racines de  $P_\mu$  sont de module  $\leq 1$ , il est de même pour les racines de  $P$ . D'après 4.3.2, il suffit de montrer le résultat pour le polynôme  $(X - 1)P_\mu$  qui est auto-inverse. On a

$$(X - 1)P_\mu = \sum_{k=0}^{d+1} b_k X^k = -a_0 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k - \mu a_{k+1}) \mu^k X^k + a_d \mu^k X^{d+1}.$$

Donc le polynôme  $(X - 1)P_\mu$  vérifie la condition de 4.3.2, donc les racines de  $P_\mu$  et par suite celles de  $P$  sont toutes de module  $\leq 1$ .

•••••