Concours National Commun - Session 2013

Corrigé de l'épreuve de mathématiques I
Filière MP

La transformée de Laplace et théorèmes de Tauber

Corrigé par M.TARQI

PARIE I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1.1 Soit $z = x + iy$ un nombre complexe fixé.

1.1.1 On a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|e^{-zt}| = e^{-xt}$. Si $x \neq 0$, alors $\forall a > 0$, $\displaystyle\int_0^a e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}(1 - e^{-xa})$, si $x = 0$, $|e^{-zt}| = 1$. Donc la fonction $t \mapsto e^{-zt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si, $x = Re(z) > 0$.

1.1.2 Soit γ un réel non nul. Posons $f(t) = \cos(\gamma t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ existe et vaut L, alors pout toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, la suite de terme général $f(u_n)$ converge vers L. Mais la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{\gamma}n\pi$ tend vers $+\infty$, cependant la suite image de terme général $f(u_n) = (-1)^n$ est divergente, ce qui prouve que f n'a pas de limite en $+\infty$.
De même on montre que la fonction $t \mapsto \sin(\gamma t)$ n'admet pas de limite en $+\infty$, en conséquence la fonction $t \mapsto e^{-iyt} = \cos(yt) - i\sin(yt)$ possède une limite que si $y = 0$.

1.1.3 Pour tout $a > 0$, on a

$$\int_0^a e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}(1 - e^{-az})$$

- Si x est non nul, $\lim\limits_{a\to+\infty} |e^{-az}| = \lim\limits_{a\to+\infty} e^{-ax}$ existe et vaut 0 si et seulement si, $x > 0$.
- Si $x = 0$ (donc $y \neq 0$ car z est non nul), $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-az} = \lim\limits_{a\to+\infty} e^{-iay}$ n'existe pas.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si, $Re(z) > 0$ et dans ce cas

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z}.$$

1.2 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $z_0 \in \mathbb{C}$.

1.2.1 La fonction $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$, donc sa primitive F sur $\mathbb{R}^+$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et pour tout $x \geq 0$, $F'(x) = e^{-z_0 x} f(x)$, et comme $x \mapsto e^{-z_0 x} f(x)$ est continue F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ existe car la fonction $t \mapsto e^{-z_0 t} f(t)$ a une intégrale convergente, donc F est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1.2.2 F étant bornée sur $\mathbb{R}^+$, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $|F(t)| \leq M$. Donc

$$\forall t \geq 0, \;\; |e^{-(z-z_0)t} F(t)| \leq M e^{-Re(z-z_0)t},$$

et comme la fonction $t \mapsto e^{-Re(z-z_0)}t$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, il est de même de la fonction $t \mapsto e^{-(z-z_0)t} F(t)$.

1.2.3 Soit $A > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^A e^{-(z-z_0)t} e^{-z_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= [e^{-(z-z_0)t}F(t)]_0^A + (z-z_0)\int_0^A e^{-(z-z_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-(z-z_0)A}F(A) + (z-z_0)\int_0^A e^{-(z-z_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{car } F(0)=0.\end{aligned}$$

On obtient donc par passage à la limite, quand A tend vers $+\infty$, l'égalité demandée (car F est bornée) :

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t = (z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc $\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien convergente.

1.3 **Un lemme de Littlewood**

1.3.1 On obtient à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t)\,\mathrm{d}t &= [(\alpha x - t)\psi']_x^{\alpha x} + \int_x^{\alpha x} \psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -(\alpha-1)x\psi'(x) + \int_x^{\alpha x} \psi'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -(\alpha-1)x\psi'(x) + \psi(\alpha x) - \psi(x).\end{aligned}$$

D'où la formule :

$$\psi(\alpha x) - \psi(x) = (\alpha-1)x\psi'(x) + \int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t)\,\mathrm{d}t.$$

1.3.2 D'après ce qui précède, on peut écrire :

$$\begin{aligned}|x\psi'(x)| &\leq \frac{1}{1-\alpha}(|\psi(\alpha x)| + |\psi(x)|) + \frac{1}{1-\alpha}\left|\int_x^{\alpha x} (\alpha x - t)\psi''(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \frac{2}{1-\alpha}\sup_{t\in[0,x]}|\psi(t)| + \int_{\alpha x}^x (t-\alpha x)|\psi''(t)|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais $\psi''(t) \leq \dfrac{M}{t^2}$ pour tout $t > 0$ et si $t \in [\alpha x, x]$, $\dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{(\alpha x)^2}$. On obtient donc :

$$\int_{\alpha x}^x (t-\alpha x)|\psi''(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{M}{(\alpha x)^2}\int_{\alpha x}^x \left(\alpha x t - \frac{t^2}{2}\right) dt = M\frac{(1-\alpha)^2}{2\alpha^2}$$

D'où :

$$|x\psi'(x)| \leq \frac{2}{1-\alpha}\sup_{t\in[0,x]}|\psi(t)| + \frac{1-\alpha}{2\alpha^2}M$$

1.3.3 Soit $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $\alpha_0 \in]0,1[$ tel que $\dfrac{1-\alpha_0}{2\alpha_0^2}M \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. D'autre part, ψ est prolongaeble par continuité en 0 (par 0), donc il existe $\eta > 0$ tel que $0 < x < \eta$ entraîne $|\psi(x)| \leq \dfrac{1-\alpha_0}{2}\dfrac{\varepsilon}{2}$. L'inégalité $(*)$ qui est vraie pour tout $\alpha \in]0,1[$, entraîne $|x\psi'(x)| \leq \varepsilon$ dès que $x \in]0,\eta[$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} x\psi'(x) = 0$.

Parie II. Exemples et propriétés de la transformée de Laplace

2.1 D'après ce qui précède, la fonction $t \mapsto e^{-(z-\lambda)t}$ a une intégrale convergente si et seulement si, $Re(z-\lambda) > 0$, autrement dit la fonction $L(f_\lambda)(z)$ existe si et seulement si, $Re(z) > Re(\lambda)$. Donc $L(f_\lambda)$ est définie sur $\{z \in \mathbb{C}/Re(z) > Re(\lambda)\}$, de plus

$$L(f_\lambda)(z) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-\lambda)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z-\lambda}.$$

2.2 **Abscisse de convergence**
Soit $E = \{Re(z)/L(f)(z) \text{ existe}\}$. La propriété est évidente si E est vide on prend donc $\sigma = +\infty$, si E est non vide deux cas sont possibles :

- Si E est non minoré, on prend $\sigma = -\infty$. Alors $L(f)$ serait définie sur tout le plan complexe.
- Si E est minoré, on prend $\sigma = \inf E$. En effet, soit $x_0 > \sigma$ et $z = x + iy$ tel que $x > x_0$, alors la fonction $t \longmapsto f(t)e^{-zt}$ à une est intégrale convergente sur $]0, +\infty[$ (d'après la question 1.2.3), d'où $x \in E$.

On en déduit $E = [\sigma, +\infty[$ si $\sigma \in E$ et $E =]\sigma, +\infty[$ si $\sigma \notin E$.

2.3 **Quelques propriétés**

2.3.1 D'après 1.2.3, on a $L(f)(z) = (z - z_0)\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction $z \mapsto z - z_0$ est continue sur $\mathbb{C}$. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ et bornée sur $\mathbb{R}^+$ par M. La fonction $\phi : (z,t) \to e^{-(z-z_0)t}F(t)$ est continue sur $\Pi(\sigma(f)) \times \mathbb{R}^+$, et :

$$|\phi(z,t)| \leq Me^{-(x-x_0)t} \leq Me^{-(a-x_0)t}$$

pour tout z tel que $Re(z) = x > a > Re(z_0) = x_0$.
La fonction majorante ne dépend pas de z et est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres affirme que $L(f)$ est continue pour tout z tel que $Re(z) \geq a$. Donc, puisque la notion de continuité est une notion locale, $L(f)$ est continue sur $\Pi(\sigma(f))$.

2.3.2 Toujours d'après 1.2.3, on a :

$$L_f(x,y) = L(f)(x+iy) = (z-z_0)\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrons que f est $\mathscr{C}^1$ sur Ω_f, pour cela il suffit de montrer que les dérivées partielles $\dfrac{\partial L_f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial L_f}{\partial y}$ existent et sont continues sur Ω_f.
La fonction $(x,y) \mapsto z - z_0$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit maintenant, avec y fixé, la'pplication :

$$g : (x,t) \mapsto e^{-(z-z_0)t}F(x)$$

g est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Elle admet une dérivée partielle par raport à x et :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -tg(x,t)$$

qui est continue sur le même domaine. De plus :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq Mte^{-(x-a_0)t} \leq Mte^{-t(a-a_0)t}$$

pour tout z tel que $Re(z) = x > a > Re(z_0) = a_0$. Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de dérivation des intégrales à paramètres affirme que L_f est de dérivable par rapport à x (cette dérivée partielle étant continue) pour tout z tel que $Re(z) \geq a$. Donc, puisque la notion de dérivabilité est une notion locale, $\dfrac{\partial L_f}{\partial x}$ existe et est continue sur $\Pi(\sigma(f))$ et :

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x,y) = \int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t)\,\mathrm{d}t - (z-z_0)\int_0^{+\infty} te^{-(z-z_0)t} F(t)\,\mathrm{d}t \quad (*).$$

Soit $A > 0$ donné,

$$\int_0^A e^{-(z-z_0)t} F(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{e^{-(z-z_0)t}}{z-z_0} F(t)\right]_0^A + \frac{1}{z-z_0}\int_0^A e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, il vient, car $F(0) = 0$, $Re(z) > Re(z_0)$ et F majorée sur $\mathbb{R}^+$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-(z-z_0)t} F(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{z-z_0}\int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (1).$$

D'autre part, une primitive de $t \mapsto (z-z_0)e^{-(z-z_0)t}$ sur $\mathbb{R}^+$ est $t \mapsto -\dfrac{(z-z_0)t+1}{z-z_0} e^{-(z-z_0)t}$. Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^A (z-z_0)te^{-(z-z_0)t} F(t)\,\mathrm{d}t &= \left[F(t)\left(-\frac{(z-z_0)t+1}{z-z_0} e^{-(z-z_0)t}\right)\right]_0^A \\ &+ \int_0^A \frac{(z-z_0)t+1}{z-z_0} e^{-(z-z_0)t} e^{-z_0 t} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons, en prenant la limite lorsque A tend vers l'infini, il vient :

$$\int_0^{+\infty} (z-z_0)e^{-(z-z_0)t} F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{(z-z_0)t+1}{z-z_0} e^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (2).$$

D'où, en tenant compte des relations (1) et (2) et de l'égalité $(*)$:

$$\frac{\partial L_f}{\partial x}(x,y) = -\int_0^{+\infty} te^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Et de la même façon, on démontre l'existence et la continuité sur $]\sigma(f), +\infty[\times\mathbb{R}$ de $\dfrac{\partial L_f}{\partial x}$ avec cette fois, pour tout $(x,y) \in]\sigma(f), +\infty[\times\mathbb{R}$, $\dfrac{\partial L_f}{\partial y}(x,y) = -i\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-zt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

2.3.3 Soit $x > \sigma(f)$. On sait que $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que :

$$L(f)'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t = -L(t \mapsto tf(t))(x).$$

La fonction $t \mapsto tf(t)$ est un élément de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$. La même démonstration que celle de la question précédente où f a été remplacé par $t \mapsto tf(t)$ donnera que $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\sigma(f), +\infty[$ et que :

$$L(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Une démonstration par récurrence montre que $L(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\sigma(f),+\infty[$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$L(f)^{(p)}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} t^p e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.3.4 On sait que pour tout x et x_0 dans $]\sigma(f),+\infty[$:

$$L(f)(x) = (x-x_0)\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t,$$

où F continue, majorée sur $\mathbb{R}^+$ par M et $F(0)=0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de F, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \le x < \alpha \Rightarrow |F(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
On a aussi :

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x-x_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} e^{-(x-x_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t + \int_\alpha^{+\infty} e^{-t(x-x_0)t}F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or, si $x > x_0$:

$$\left|\int_0^{\alpha} e^{-(x-x_0)}F(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1-e^{-\alpha(x-x_0)}}{x-x_0}\right)$$

et

$$\left|\int_\alpha^{+\infty} e^{-(x-x_0)}F(t)\,\mathrm{d}t\right| \le M\frac{e^{-\alpha(x-x_0)}}{x-x_0}.$$

Ainsi :

$$|L(f)(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + Me^{-\alpha(x-x_0)}$$

Or pour cet α fixé, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha(x-x_0)} = 0$. Il existe donc $A > 0$ tel que $x > A \Rightarrow Me^{-\alpha(x-x_0)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Finalement, pour $0 > A$, il vient $|L(f)(x)| < \varepsilon$.
D'où :

$$\lim_{x\to\infty} L(f)(x) = 0.$$

2.4 **Un exemple**

2.4.1 On a $\cos t = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc $\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \dfrac{1}{2} + o(1)$, ainsi la fonction ω se prolonge par $\dfrac{1}{2}$ en 0.
Puisque w se prolonge par continuité en 0, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Or pour tout $t \ge 1$, $\left|\dfrac{1-\cos t}{t^2}\right| \le \dfrac{2}{t^2}$ et par conséquent $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ existe, il est de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$. Ceci montre que la transformée de Laplace de w existe en 0, et en tenant compte de la définition de $\sigma(w)$, on a donc nécessairement $\sigma(w) \le 0$.

2.4.2 D'après l'étude précédente, $L(w)$ admet une dérivée seconde sur $]0,+\infty[$ avec $\forall x > 0$, $L(w)''(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.
Les calcules montrent que

$$L(w)''(x) = \int_0^{+\infty} (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x(x^2+1)}.$$

2.4.3 On trouve $L(w)'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \alpha$ et $L(w)(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \arctan(x) + \alpha x + \beta$ avec α et β sont des réels.

On sait que $0 = \lim_{x\to+\infty} L(w)(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \alpha\right) + \beta - \arctan(x)$, donc nécessairement $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{2}$. D'où

$$L(w)(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(1+x^2) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2}.$$

2.5 Un théorème de Césaro

2.5.1 h étant continue par morceaux sur $[0,1]$ donc bornée par un certain $M > 0$, il est de même da la fonction $t \mapsto h(e^{-xt})$ car si $t \geq 0$, e^{-xt} décrit l'intervalle $[0,1]$. Ainsi pour tout $t \geq 0$,

$$|e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})| \leq Me^{-xt}g(t).$$

Donc la fonction $t \mapsto e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

2.5.2 Soit $x > 0$. Avec le changement de variable $u = e^{-xt}$, on a :

$$xL(g)(x) = \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)h(e^{-xt})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h(u)g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du.$$

D'après les hypothèses $\lim_{x\to0^+}\int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) du - 1 = 0$. Maintenant pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta_x(X^k) - \int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 u^k\left[g\left(\frac{-\ln u}{x}\right) - 1\right]\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{k+1}\int_0^1\left[g\left(\frac{-\ln t}{(k+1)x}\right) - 1\right]\mathrm{d}t \quad \text{avec } \ t = u^{k+1}\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x\to0^+}\left(\Delta_x(X^k) - \int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{k+1}\int_0^1\left[g\left(\frac{-\ln t}{(k+1)x}\right) - 1\right]\mathrm{d}t = 0$. Donc

$$\lim_{x\to0^+}\Delta_x(X^k) = \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t,$$

puis on conclut par linéarité de l'opérateur Δ_x.

2.5.3 D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers h sur $[0,1]$. On a alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\Delta_x(h) - \int_0^1 h(u)\,\mathrm{d}u\right| \leq |\Delta_x(h) - \Delta_x(P_n)| + \left|\Delta_x(P_n) - \int_0^1 P_n(u)\,\mathrm{d}u\right| + \left|\int_0^1 (P_n(u) - h(u))\,\mathrm{d}u\right|$$

Or

$$|\Delta_x(h) - \Delta_x(P_n)| \leq \sup_{u\in[0,1]}|h(u) - P_n(u)|x\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)\,\mathrm{d}t = \sup_{u\in[0,1]}|h(u) - P_n(u)|xL(g)(x),$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\Delta_x(h)-\Delta_x(P_n)=0$. Les autres termes convergent vers 0 d'après le résultat de la question 2.5.2 et la convergence uniforme. D'où

$$\lim_{x\to 0^+}\Delta_x(h)=\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t.$$

2.5.4 Calculons $\Delta_x(h_1)$: on a pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned}\Delta_x(h_1) &= \int_0^1 g\left(\frac{-\ln u}{x}\right)h_1(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{u}g\left(\frac{-\ln u}{x}\right)\mathrm{d}u\\ &= -x\int_{\frac{1}{x}}^0 g(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{avec } t=\frac{-\ln u}{x}.\end{aligned}$$

D'où $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} g(t)dt=\frac{1}{x}\Delta_x(h_1)$.

Ainsi, pour tout $a>0$, on a $\displaystyle\frac{1}{a}\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t=\Delta_{\frac{1}{a}}(h_1)$ et donc

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{a}\int_0^a g(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0^+}\Delta_x(h_1)=\int_0^1 h_1(t)\,\mathrm{d}t=[\ln t]_{\frac{1}{e}}^1=1.$$

PARIE III. COMPORTEMENT AU VOISINAGE DE L'ORIGINIE

3.1 Soit $f\in(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$.

3.1.1 Soit $H(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ avec $x>0$. H est $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et admet une limite finie en $+\infty$, donc bornée sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x>0$, la fonction $t\longmapsto F(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)e^{-xt}=0$, donc par une intégration par parties, $\forall x>0$,

$$\begin{aligned}x\int_0^{+\infty}(F(t)-L(f)(0))e^{-xt}dt &= [(F(t)-L(f)(0))e^{-xt}]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt\\ &= \int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt-L(f)(0)\end{aligned}$$

d'où

$$L(f)(x)-L(f)(0)=x\int_0^{+\infty}(F(t)-L(f)(0))e^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

3.1.2 On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty}F(t)=L(f)(0)$, donc pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A>0$ tel que $|F(t)-L(f)(0)|\leq\varepsilon$ dès que $t\geq A$. D'autre part, pour $x>0$, on a :

$$\begin{aligned}\left|x\int_0^{+\infty}(F(t)-L(f)(0))e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \left|x\int_0^{A}(F(t)-L(f)(0))e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right|+\left|x\int_A^{+\infty}(F(t)-L(f)(0))e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \left|x\int_0^{A}(F(t)-L(f)(0))e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right|+\varepsilon x\left|\int_A^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leq \left|x\int_0^{A}(F(t)-L(f)(0))\,\mathrm{d}t\right|+\varepsilon,\end{aligned}$$

inégalité qui montre que $x \mapsto x \displaystyle\int_0^{+\infty} (F(t) - L(f)(0))e^{-xt}\,dt$ tend vers 0 en 0^+, il est de même de la fonction $x \mapsto L(f)(x) - L(f)(0)$, c'est à dire

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.2 La fonction $t \mapsto e^{it}$ répond à la question.

3.3 **Théorème de Tauber**

3.3.1 Il existe $A > 0$ tel que $|tf(t)| < 1$ dès que $x \geq A$, et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $x = Re(z) > 0$. Alors pour tout $t \geq A$, on a $|e^{-tz} f(t)| \leq \dfrac{e^{-tx}}{t}$ et comme la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-tx}}{t}$ est intégrable sur $[A, +\infty[$, car $x > 0$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_A^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt$ existe, il est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tz} f(t)\,dt$ (la fonction $t \mapsto e^{-zt} f(t)$ est continue sur $[0, A]$). Donc $\sigma(f) \leq 0$.

3.3.2 Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $A > 0$ tel que $x \geq A \Rightarrow |tf(t)| \leq \varepsilon$. On a donc :

$$\frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^A |tf(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{1}{a}\int_A^a |tf(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{a}\int_0^A |tf(t)|\,\mathrm{d}t + \frac{(a-A)}{a}\varepsilon$$

Mais $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a}\int_0^A |tf(t)|\,\mathrm{d}t = 0$, donc l'inégalité précédente montre que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|\,\mathrm{d}t = 0.$

3.3.3 Une étude simple de la fonction $u \mapsto \varphi(u) = u - e^{-u} + 1$, montre que $\varphi(u) \geq 0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

3.3.4 Soit a et x des réels strictement positifs, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_0^a (1 - e^{-xt})|f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} |f(x)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq x\int_0^a t|f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}\,\mathrm{d}t \\
&\leq x\int_0^a t|f(t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{t\geq a} |tf(t)|\frac{e^{-ax}}{ax}
\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| &\leq \int_a^{+\infty} |tf(t)|\frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&\leq \sup_{t\geq a} |tf(t)| \int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \sup_{t\geq a} |tf(t)|\frac{e^{-ax}}{ax} \leq \sup_{t\geq a} |tf(t)|\frac{1}{ax}
\end{aligned}$$

D'où l'inégalité demandée :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq x\int_0^a |tf(t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{t\geq a} |tf(t)|\frac{1}{ax}.$$

3.3.5 L'inégalité précédente reste vraie pour $a = \dfrac{1}{x}$; on obtient donc :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{\frac{-t}{a}}\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|\,\mathrm{d}t + \sup_{t\geq a}|tf(t)|.$$

Soit maintenant $\varepsilon >$ donné. D'après les données et le résultat de la question 3.3.2, il existe $a_0 > 0$ tel que pour tout $a \geq a_0$, on a :

$$\frac{1}{a}\int_0^a |tf(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\sup_{t\geq a}|tf(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $a \geq a_0$, on obtient :

$$\left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{\frac{-t}{a}}\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que si $\lim\limits_{x\to 0^+} L(f)(x) = \mu$, alors $\lim\limits_{a\to+\infty}\displaystyle\int_0^a f(t)dt = \mu$.

Parie IV. Une généralisation du théorème de Tauber dans le cas réel

4.1 La fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}^+$ (c'est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$), donc par opérations les fonctions f_2 et f_3 sont continues sur $]0, +\infty[$.
Il existe $\alpha_x \in]a, x[$ tel que $f_1(x) = \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = x\alpha_x f(\alpha_x)$, ceci montre que que $\lim\limits_{x\to 0^+} f_2(x)$ existe. De même $f_3(x) = \dfrac{\alpha_x}{x} f_1(\alpha_x)$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_3(x)$ existe car $0 < \dfrac{\alpha_x}{x} < 1$.

4.2 pour tout $x > 0$ et $t > 0$, on a $|f_1(x)| \leq Mx$ et donc $|f_2(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$; donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(t)e^{-xt} = 0$.

4.3 L'inégalité précédente $|f_2(t)e^{-xt}| \leq Me^{-xt}$ montre que la fonction $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et ceci pour tout $x > 0$, donc $\sigma(f_2) \leq 0$.
D'autre part, $|f_3(x)e^{-xt}| \leq M\dfrac{e^{-xt}}{t^2}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t^2}$ est intégrable (par exemple) sur tout $[1, +\infty[$, donc $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et même sur $[0, +\infty[$, car elle est continue sur $[0, 1]$ (par prolongment). Donc $\sigma(f_3) \leq 0$.

4.4 On remarque que f_2 est dérivable est que $f_2'(x) = \dfrac{xf_1'(x) - f_1(x)}{x^2} = f(x) - f_3(x)$ et donc une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
x\int_u^v f_2(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}t &= -\int_u^v f_2(t)(e^{-xt})'\,\mathrm{d}t \\
&= -[f_2(t)e^{-xt}]_u^v + \int_u^v (f(t) - f_3(t))\,\mathrm{d}t \\
&= f_2(u)e^{-xu} - f_2(v)e^{-vx} + \int_u^v f(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \int_u^v f_3(x)e^{-xt}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ce qui entraîne évidement l'égalité en question.
Puisque les fonctions $t \mapsto f_2(t)e^{-xt}$ et $t \mapsto f_3(t)e^{-xt}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$, la limite de la quantité à droite (l'égalité précédente) existe lorsque le couple (u, v) tend vers $(0, +\infty)$, donc l'intégrale

$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ existe et ceci pour tout $x>0$, par conséquent $\sigma(f)\leq 0$. De plus, le passage à la limite entraîne :

$$\forall x>0,\ \ L(f)(x)=xL(f_2)(x)+L(f_3)(x).$$

4.5

4.5.1 D'après le lemme de Littelwood, il suffit donc de montrer que la fonction $x\mapsto x^2L(f)''(x)$ est bornée sur $]0,+\infty[$. En effet, pour tout $x\in]0,+\infty[$, on a $L(f)''(x)=\int_0^{+\infty} t^2e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ et donc

$$|x^2L(f)''(x)|\leq \sup_{t\geq 0}|tf(t)|\int_0^{+\infty} x^2te^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Or $\int_0^{+\infty} x^2te^{-xt}\,\mathrm{d}t=[-(xt+1)e^{(-xt)}]_0^{+\infty}=1$, donc $x\mapsto x^2L(f)''(x)$ est bornée, et par conséquent $\lim\limits_{x\to 0^+} xL(f)'(x)=0$.

4.5.2 Pour tout $x>0$, on a

$$\begin{aligned}
xL(g)(x) &= x\int_0^{+\infty} e^{-xt}g(t)\,\mathrm{d}t\\
&= x\int_0^{+\infty} e^{-xt}\left(1-\frac{tf(t)}{M}\right)dt\\
&= x\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt-\frac{x}{M}\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t\\
&= 1+\frac{1}{M}xL(f)'(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} xL(g)(x)=1+\frac{1}{M}\lim_{x\to 0^+} xL(f)'(x)=1.$$

4.5.3 D'après le théorème de Césaro, puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} xL(g)(x)=1$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt=1$. Mais

$$\frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x \mathrm{d}t-\frac{1}{Mx}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t=1-Mxf_1(x)=xf_3(x).$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xf_3(x)=0$.

4.6 On a $f_2(x)=xf_3(x)$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_2(x)=0$ (d'après la question 5.4.3). Soit donc $\varepsilon>0$ et $A>0$ tel que $|f_2(t)|\leq\varepsilon$ dés que $t\geq A$. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned}
|xL(f_2)(x)| &\leq \left|\int_0^A xe^{-xt}f_2(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_A^{+\infty} xe^{-xt}f_2(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leq \sup_{t\in[0,A]}|f_2(t)|\int_0^A xe^{-xt}\,\mathrm{d}t+\varepsilon\int_A^{+\infty} xe^{-xt}\,\mathrm{d}t\\
&\leq \sup_{t\in[0,A]}|f_2(t)|Ax+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Cette inégalité montre que $\lim\limits_{x\to 0^+} xL(f_2)(x)=0$.

4.7 On sait que, d'après la question 4.4, que $\forall x > 0, \quad L(f_3)(x) = L(f)(x) - xL(f_2)(x)$, donc $\lim_{x \to 0^+} L(f_3)(x)$ existe et vaut 0 (d'après les hypothèses $\lim_{x \to 0^+} L(f)(x) = 0$). Le théorème de Tauber (question 3.3) assure que $\int_0^{+\infty} f_3(t)\,\mathrm{d}t$ existe et égale à 0, car $\lim_{x \to 0^+} x f_3(x) = 0$.

4.8 On a

$$L(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{f'(t)}{t} dt = [f_2(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{f_1(t)}{t}\,\mathrm{d}t = L(f_3)(0),$$

car $f_2(0) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = 0$. Donc $L(f)(0) = 0$.

4.9 Considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto f(t) = \phi(t) - \mu e^{-t}$. La fonction f vérifie les conditions suivantes :

- la fonction $\mapsto tf(t) = t\phi(t) - \mu t e^{-t}$ est bornée sur $]0, +\infty[$,
- la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \phi(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \frac{\mu}{x+1}$ tend vers 0 lorque x tend vers 0^+.

Donc, d'après ce qui précède, $L(f)(0)$ existe vaut 0, c'est à dire$L(\phi)(0)$ existe et vaut μ.

• • • • • • • • • • •