Épreuve de Mathématiques II

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est **interdit**.

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Le sujet est composé de deux problèmes indépendants entre eux et pouvant être traités dans un ordre quelconque.

Premier problème

Soit p un entier naturel non nul ; on note w_p le nombre complexe défini par $w_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$.
Par définition, la transformation de Fourier discrète de $\mathbb{C}^p$ est l'application $\Phi_p : \mathbb{C}^p \longrightarrow \mathbb{C}^p$ qui à tout vecteur $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ associe le vecteur $y = (y_0, ..., y_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ dont les composantes $y_0, ..., y_{p-1}$ sont définies , pour tout $k \in \{0, ..., p-1\}$, par

$$y_k = P_x(w_p^k),$$

où P_x est le polynôme à coefficients complexes défini par $P_x = \sum\limits_{j=0}^{p-1} x_j X^j$.

$1^{\text{ère}}$ partie
Quelques propriétés de Φ_p

1. Soit $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.
   (a) Montrer que $\Phi_p(x) = 0$ si et seulement si le polynôme P_x est nul.
   (b) Montrer que Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.
2. On note $\mathscr{B} = (e_0, e_1, ..., e_{p-1})$ la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^p$ et M la matrice de l'endomorphisme Φ_p dans cette base ; on écrit $M = (m_{ij})_{0 \le i,j \le p-1}$.
   (a) Préciser, pour tout $(i, j) \in \{0, ..., p-1\}^2$, l'expression du coefficient m_{ij}.
   (b) Retrouver le fait que l'endomorphisme Φ_p est un automorphisme de $\mathbb{C}^p$.
3. Soit $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$; on note $\Phi_p(x) = (y_0, ..., y_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$.
   (a) $x = (x_0, ..., x_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$, préciser selon les cas la valeur de la somme $\sum\limits_{k=0}^{p-1} w_p^{(i-j)k}$.
   (b) Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{p-1} |y_k|^2 = p \sum\limits_{k=0}^{p-1} |x_k|^2$.
4. On note $\overline{M}$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est égal au conjugué $\overline{m_{i,j}}$ du complexe $m_{i,j}$, pour tout $(i, j) \in \{0, ..., p-1\}^2$.
   (a) Calculer le produit matriciel $\overline{M}M$.
   (b) En déduire l'expression de l'inverse de la matrice M.

$2^{\text{ème}}$ partie
Un peu d'algorithmique

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $p = 2^n$. On considère un élément $a = (a_0, ..., a_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ et on pose

$$b = (a_0, a_2, ..., a_{p-2}) \in \mathbb{C}^{\frac{p}{2}} \text{ et } c = (a_1, a_3, ..., a_{p-1}) \in \mathbb{C}^{\frac{p}{2}}$$

On suppose qu'on connait les transformations de Fourier discrètes de b et c, et on cherche à calculer celle de a ; on pose donc

$$\Phi_{\frac{p}{2}}(b) = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_{\frac{p}{2}-1}) \text{ et } \Phi_{\frac{p}{2}}(c) = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{\frac{p}{2}-1})$$

1. On considère l'algorithme suivant dans lequel " :=" désigne le symbole d'affectation et "$*$" celui de la multiplication :

   $E :=$ 1;
   pour k de 0 $\left(\frac{p}{2} - 1\right)$ faire :
   début
   $F := E * \gamma_k;\quad \alpha_k := \beta_k + F;\quad \alpha_{k+\frac{p}{2}} := \beta_k - F;\quad E := w_p * E;$
   fin.

   (a) Pour $k \in \{0, 1, ..., \frac{p}{2} - 1\}$, on note F_k la valeur de la variable F à l'étape k de la boucle "pour", préciser les valeurs de F_k, α_k et $\alpha_{k+\frac{p}{2}}$ en fonction de w_p, γ_k et β_k.

   (b) Montrer que cet algorithme permet bien de calculer $\Phi_p(a)$, c'est-à-dire que
   $$\Phi_p(a) = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{p-1})$$

2. On considère l'algorithme récursif suivant pour le calcul de $\Phi_{2^n}(a)$:
   – si $n = 1$ alors $\Phi_2(a_0, a_1) = (a_0 + a_1, a_0 - a_1)$;
   – sinon, $\Phi_{2^n}(a)$ s'obtient à partir de $\Phi_{2^{n-1}}(b)$ et $\Phi_{2^{n-1}}(c)$ par l'algorithme proposé ci-dessus.
   On note s_n (resp. r_n) le nombre des additions (resp. multiplications) complexes nécessaires au calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ à l'aide de cette algorithme récursif ; les nombres w_p étant supposés connus.

   (a) Préciser les valeurs initiales s_1 et r_1 et exprimer s_n et r_n en fonction de s_{n-1}, r_{n-1} et n.

   (b) En déduire, en fonction de n, le nombre total des additions et multiplications nécessaires au calcul de $\Phi_{2^n}(a)$ puis l'exprimer en fonction de p.

3. **Coût de calcul de $\Phi_p(a)$ par l'algorithme de Hörner**
   On vu que le calcul de $\Phi_p(a)$ nécessite celui de $P_a(w_p^k)$ pour $k \in \{0, ..., p-1\}$, où $P_a = \sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; le calcul de $P_a(\lambda)$ par l'algorithme de Horner consiste à écrire
   $$P_a(\lambda) = (...((a_{p-1}\lambda + a_{p-2} + a_{p-3}) + ... + a_1)\lambda + a_0$$

   (a) Préciser, en fonction de p, le nombre total des additions et multiplications complexes nécessaires au calcul de $P_a(\lambda)$ par l'algorithme de Hörner.

   (b) En déduire, en fonction de p, le nombre total des additions et multiplications complexes nécessaires au calcul de $\Phi_p(a)$ par l'algorithme de Hörner.

4. Lequel des deux algorithmes présentés ci-dessus est le plus rapide pour calculer $\Phi_p(a)$ pour p assez grand ? On donnera les ordres de grandeurs des nombres d'opérations (additions et multiplications complexes) que nécessitent chacun d'eux.

Deuxième problème

Dans tout problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$vest noté simplement $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficient réels.
On munit $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $(u|v) \longmapsto^t uv.$.

1ère Partie
Théorème de Courant-Fisher

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n ; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A ; il défini, pour tout $u \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par $f_A(u) = Au$.

1. Justifier qu'il existe une base orthonormée de l'espace euclidien $(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), (.|.))$ formée de vecteurs propres de f_A.
   Dans la suite, on note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres de f_A rangées dans l'ordre croissant et on désigne par $(e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés :
   $$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \text{ et } f_A(e_k) = \lambda_k e_k,\ k \in \{1, 2, ..., n\}$$
   Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $(e_1, e_2, ..., e_k)$, et $\mathscr{F}_k$ l'ensemble de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui sont de dimension k.
   Si v est un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on pose $R_A(v) = \dfrac{(Av|v)}{(v|v)} = \dfrac{(f_A(v)|v)}{(v|v)}$.
2. Soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$.
   (a) Calculer $R_A(e_k)$.
   (b) Si $v \in V_k \backslash \{0\}$, montrer que $R_A(v) \leq \lambda_k$ et conclure que $\lambda_k = \max\limits_{u \in V_k \backslash \{0\}} R_A(u)$.
3. Soient $k \in \{1, 2, ..., n\}$ et $F \in \mathscr{F}_k$.
   (a) Montrer que la dimension du sous-espace vectoriel $F \cap \text{Vect}(e_k, ..., e_n)$ est ≥ 1.
   (b) Soit w un vecteur non nul de $F \cap \text{Vect}(e_k, ..., e_n)$; montrer que $R_A(v) \geq \lambda_k$.
4. Établir le résultat, dit théorème de Courant-Fischer,
   $$\lambda_k = \min_{F \in \mathscr{F}_k} (\max_{v \in F \backslash \{0\}} R_A(v)).$$

2ème partie
Continuité et dérivabilité des valeurs propres d'une applications matricielle

On note $|||.|||_2$ la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme euclidienne $\|.\|_2$ de l'espace $(M_n(\mathbb{R}), (.|.)$.

1. Montrer que si $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et v un vecteur non nul de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\left|\frac{(Cv|v)}{(v|v)}\right| \leq |||C|||_2$.
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A : I \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une application continue telle que, pour tout $t \in I$, la matrice $A(t)$ soit symétrique. Pour $t \in I$, on note $\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_n(t)$ les valeurs propres de la matrice $A(t)$ rangées dans l'ordre croissant et on désigne par $(e_1(t), e_2(t), ..., e_n(t))$ une base orthonormée de vecteurs propres associés :
   $$\lambda_1(t) \leq \lambda_2(t) \leq ... \leq \lambda_n(t) \text{ et } f_{A(t)}(e_k(t)) = \lambda_k(t) e_k(t),\ k \in \{1, 2, ..., n\}$$

Pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, on note V_k le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $(e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t))$: $V_k(t) = \mathrm{Vect}(e_1(t), e_2(t), ..., e_k(t))$.

(a) Soient t et t_0 deux éléments de l'intervalle I. Montrer que, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\lambda_k(t) \leq \lambda_k(t_0) + \sup\{R_{(A(t)-A_0(t))}(v); \;\; v \in V_k(t_0)\backslash\{0\}\}.$$

(b) En déduire que, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n\}$, l'application $\lambda_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.

3. Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ b(t) & -a(t) \end{pmatrix}$ où les applications a et b sont définies par :

$$a(0) = b(0) = 0 \text{ et } a(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \cos\left(\tfrac{1}{t}\right),\, b(t) = e^{-\frac{1}{t^2}} \sin\left(\tfrac{1}{t}\right) \text{ si } t \neq 0.$$

(a) Montrer que l'application A est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les valeurs propres et les vecteurs propres de $A(t)$.

(c) Montrer qu'il n'existe pas d'application continue $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ telle que $e(t)$ soit un vecteur propre de $A(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

4. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $M : I \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que, pour tout $t \in I$, la matrice $M(t)$ soit symétrique. Montrer qu'il existe des applications λ_1 et λ_2 de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$, telles que le polynôme caractéristique de $M(t)$ soit égal à $(X - \lambda_1(t))(X - \lambda_2(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On admettra que si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications de classe $\mathscr{C}^1$, alors il existe $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $h^2 = f^2 + g^2$.

5. Soit $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $B(t) = \begin{pmatrix} 0 & b(t) \\ t & 0 \end{pmatrix}$ où l'application $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par :
$b(0) = 0$ et $b(t) = t^3(2 + \sin\frac{1}{t})^2$ si $t \neq 0$.

(a) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $B(t)$ est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'application B est de classe $\mathscr{C}^1$ mais que le résultat de la question 4. précédente est faux pour cette application.

FIN DE L'ÉPREUVE