Concours Communs Marocain - Session 2009

Corrigé de l'épreuve d'algèbre

Polynôme d'interpolation de Lagrange. Approximation au sens de moindres carrées

Corrigé par M.TARQI

$1^{ère}$ Partie : Étude de l'application f_m

1. R étant un polynôme de degré inférieure ou égal à n, admettant $n+1$ racines distintes, donc R est le polynôme nul.
2. Soient $P, Q \in \mathcal{P}_m$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a :

$$\begin{aligned} f_m(P+\lambda Q) &= ((P+\lambda Q)(x_0), ..., (P+\lambda Q)(x_n)) \\ &= (P(x_0), ..., P(x_n)) + \lambda(Q(x_0), ..., Q(x_n)) \\ &= f_m(P) + \lambda f_m(Q) \end{aligned}$$

   Donc f_m est une application linéaire.
3. (a) Il est clair que $\{Q\pi / Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\} \subset \ker f_m$, puisque $Q\pi \in \mathcal{P}_m$ et $f_m(Q\pi) = 0$. D'autre part, si $P \in \ker f_m$, alors $x_0, x_1, ..., x_n$ seront des racines de P, donc il est divisible par π. Ainsi $\ker f = \{Q\pi / Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$.
   (b) Soit $P \in \mathcal{P}_m$, alors il existe un couple unique (Q, R) de polynômes tels que $P = Q\pi + R$, avec $R = 0$ ou $\deg R \leq n$, et comme $Q\pi \in \ker f_m$ et $R \in \mathcal{P}_m$, alors

$$\mathcal{P}_m = \ker f_m \oplus \mathcal{P}_n.$$

   (c) D'après la dérnière question, $\dim \ker f_m = m - n$. La famille $\{\pi, X\pi, ..., X^{m-n-1}\pi\}$ est une base de $\ker f_m$.
   (d) Toujours d'après la question (b) de cette partie, $\text{rg}\, f_m = n+1$, donc f_m est surjective puisque $\dim \mathbb{R}^{n+1} = n+1$.
4. (a) Si $P \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(P) = 0$, alors le polynôme P aura $n+1$ racines distinctes et comme $m \leq n$, alors $P = 0$ et donc f_m est injective.
   (b) $\text{rg}\, f_m = \dim \mathcal{P}_m = m+1$.
   (c) f_m est surjective si et seulement si $\dim \mathcal{P}_m = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire $m = n$.
5. (a) L'application

$$\begin{array}{rrcl} f_m : & \mathcal{P}_n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ & P & \longmapsto & (P(x_0), ..., P(x_n)) \end{array}$$

   étant bijective ($m = n$), donc pour tout élément $y = (y_0, y_1 ..., y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un seul polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, ..., y_n)$.
   (b) i. D'après la définition des L_i, on a $L_i(x_i) = 1$ et $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$.
   ii. La famille $(L_1, L_2, ..., L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$, comme image réciproque de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, par l'isomorphisme f_n.
   (c) Posons

$$(y_0, y_1, ..., y_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i \varepsilon_i$$

On aura alors,

$$P_y = \sum_{i=1}^{p} y_i f_n^{-1}(\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{p} y_i L_i.$$

Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} L_i$, alors $P(x_i) = 1$ pour tout $0 \leq i \leq n$, donc d'après la question $1.$ de cette partie $P = 1$, d'où :

$$\sum_{i=0}^{n} L_i = 1.$$

$2^{ème}$ partie : Problème aux moindres carrées

1. (a) Soit $y \in \operatorname{Im} A$, alors il existe $x \in \mathcal{M}_{p,1}$ tel que $y = Ax$. Donc

$$< b - Au, y >_p = < b - Au, Ax >_p =^t x^t A(b - Au) = 0,$$

ainsi $b - Au$ est orthogonal à $\operatorname{Im} A$.
Comme les vecteurs $b - Au$ et Ax sont orthogonaux, alors d'après Pythagore, $\|b - Ax\| = \|b - Au\| + \|A(u - x)\| \geq \|b - Au\|$ et d'après la caractérisation de la projection $Au = P_{\operatorname{Im} A}(b)$.

   (b) On a, pour tout $x \in \mathcal{M}_{q,1}$ $\|b - Au\| \leq \|b - Ax\| + \|Ax - Au\| \leq \|b - Ax\|$, donc

$$\|b - Au\| = \min\{\|b - Ax\|_p / x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})\}$$

ce minimum est atteint pour tout vecteur $x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que $Ax = Au$.

2. On sait, d'après la question 1.(a) de cette partie, que $b - Au$ est orthogonal à $\operatorname{Im}(A)$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R}) < b - Au, Ax >=^t x^t A(b - Au) =< x,^t Ab -^t AAu >= 0$, donc le vecteur ${}^tAAu -^t Ab$ est orthogonal à tous x de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, en particulier il est orthogonal à il même , c'est-à-dire $\|{}^tAAu -^t Ab\| = 0$, ainsi ${}^tAAu =^t Ab$.

3. (a) Si $x \in \ker^t AA$, alors $< Ax, Ax >_p =^t x^t AAx = 0$.

   (b) Il est clair que $\ker A \subset \ker^t AA$ et d'après la question précédente, si $x \in \ker^t AA$, alors $\|Ax\|_p^2 = 0$, donc $Ax = 0$ et par suite $x \in \ker A$, d'où l'égalité.

   (c) $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}(A) = p - \dim \ker(A) = p - \dim \ker({}^tAA) = \operatorname{rg}({}^tAA)$.

   (d) Soit $y \in \operatorname{Im}^t AA$, donc il existe $x \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $y =^t AAx$, c'est-à-dire $y \in \operatorname{Im}^t A$, d'où l'inclusion demandée. Les deux assertions $\operatorname{rg}({}^tA) = \operatorname{rg}({}^tAA)$ et $\operatorname{Im}^t AA \subset \operatorname{Im}^t A$ entraînent $\operatorname{Im}^t A = \operatorname{Im}^t AA$.

4. (a) D'après l'étude précédente, le problème aux moindres carrés admet une solution si et seulement si il existe $u \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^tAAu =^t Ab$ c'est-à-dire le système ${}^tAAu =^t Ab$ admet des solutions, ce qui est toujours possible, d'après la question 3.(c).

   (b) Supposons $\ker A = \{0\}$ et soit u et v de tels ${}^tAAu =^t Ab$ et ${}^tAAv =^t Ab$, alors $u - v \in \ker^t AA = \ker^t A = \{0\}$, donc $v = u$ et par conséquent le pobléme admet une solution unique.

$3^{ème}$ Partie : Approximation polynomiale au sens des moindres carrées

A. Étude dans le cas $m \geq n + 1$

1. On sait qu'il existe un unique polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(Q_0) = (y_0, y_1, ..., y_n)$, c'est le polynôme $\sum\limits_{i=0}^{n} y_i L_i$ défini dans la première partie. D'autre part $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_m$ et la restriction de f_m à $\mathcal{P}_n$ n'est autre que f_n, alors on aura nécessairement
$$f_m(Q_0) = (y_0, y_1, ..., y_n).$$
2. On a $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ et $\phi_m(Q_0) = 0$, donc $\lambda_m = 0$. D'autre part $\phi_m(P) = 0$ si et seulement si $P(x_i) = y_i$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n$, donc l'ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_m$ où le minimum est atteint est donc $\{P \in \mathcal{P}_m / f_m(P) = (y_0, y_1, ..., y_n)\}$

B. Étude dans le cas $m \leq n$

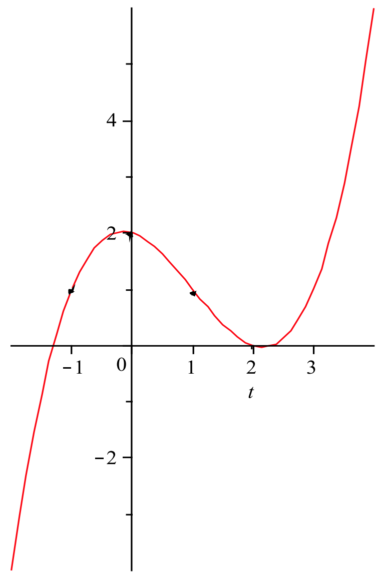
1. (a) ${}^tAA$ est une matrice carée d'ordre $m+1$ et son coefficient d'indice (i,j) est donné par :
$$\sum_{k=0}^{n} x_k^i x_k^j.$$
(b) On a un sous déteminant maximal non nul d'ordre $m+1$ extrait de A, à savoir
$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j < i \leq m} (x_i - x_j)$$
donc $\operatorname{rg} A = m+1$.
(c) On sait que $\operatorname{rg}^t AA = \operatorname{rg}^t A = \operatorname{rg} A = m+1$, donc ${}^tAA$ est inversible.
2. (a) On a évidement
$$AV_p =^t (P(x_0), P(x_1), ..., P(x_n).$$
(b) On calcule
$$\|b - AV_p\|_{n+1}^2 = \|(y_0 - P(x_0), ..., y_n - P(x_n))\|_{n+1}^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - P(x_i))^2 = \phi_m(P).$$
3. (a) D'après la partie précédente, on sait qu'il existe, puisque ${}^tAA$ est inversible, un unique vecteur $U = (c_0, c_1, ..., c_m)$ tel que
$$\|b - AU\|_{n+1}^2 = \min\{\|b - AX\|_{n+1}^2 / x \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}$$
donc le polynôme $P_0 = \sum\limits_{k=0}^{m} c_k X^k$ répond à la question.
(b) D'après la question précédente le vecteur $U = V_{P_0}$ est l'unique solution du système linéaire ${}^tAAZ =^t Ab$.
(c) $\lambda_m = \Phi_m(P_0)$.
4. **Application**
(a) On trouve $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ et ${}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 8 & 18 \\ 6 & 8 & 18 & 32 \\ 8 & 18 & 32 & 66 \end{pmatrix}$

(b) On a ${}^tAb = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) On trouve $U = (2, \frac{-1}{3}, -1, \frac{1}{3})$.

(d) $P_0(X) = 2 - \frac{1}{3}X - X^2 + \frac{1}{3}X^3$ et $\lambda_3 = \|b - Au\|_4^2 = 0$.

(e) Le graphe de la fonction $t \longmapsto P_0(t)$ et les quatre points (x_i, y_i).



•••••••••••••

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr