

1^{ère} Partie

Approximation par les polynômes de Lebesgue

A. Une relation entre coefficients binomiaux

1. Soient n et m deux entiers naturels avec $n \leq m$; montrer que $\sum_{p=0}^n \mathbb{C}_m^p \mathbb{C}_m^{n-p} = \mathbb{C}_{2m}^n$.

On pourra considérer deux ensembles E et F ayant m éléments chacun, puis calculer de deux façons différentes le nombre de parties à n éléments de $E \cup F$.

2. Soit n un entier naturel.

(a) Vérifier que l'application $\alpha \mapsto \mathbb{C}_{2\alpha}^n - \sum_{p=0}^n \mathbb{C}_\alpha^p \mathbb{C}_\alpha^{n-p}$ est polynômiale puis en donner des zéros.

(b) Montrer alors que pour tout réel α , $\mathbb{C}_{2\alpha}^n = \sum_{p=0}^n \mathbb{C}_\alpha^p \mathbb{C}_\alpha^{n-p}$

B. Recherche d'un équivalent

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + w_n$ où $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite sommable. Étudier la suite $(\ln(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel **strictement positif**.

2. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs et γ un réel tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 1 - \frac{\gamma}{n} + w'_n$ où $(w'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite sommable.

(a) Étudier la suite $(n^\gamma b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et en déduire qu'il existe une constante $l > 0$ telle que $b_n \sim \frac{l}{n^\gamma}$.

(b) Quelle est la nature de la série de terme général b_n ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = (-1)^{n-1} \mathbb{C}_{1/2}^n$.

(a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{2n-1}{2(n+1)}$.

(b) Établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\mathbb{C}_{1/2}^n \sim C \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/2}}$.

C. Résultat d'approximation

1. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \mathbb{C}_{1/2}^n (-1)^n z^n$.

2. Montrer que cette série converge normalement sur le disque fermé de \mathbb{C} , de centre O et de rayon 1 ; se somme sera notée $f(z)$ pour $|z| \leq 1$.

3. Montrer soigneusement que si $|z| \leq 1$ alors $f(z)^2 = 1 - z$.

4. Montrer que la fonction $x \mapsto f(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $] -1, 1[$ et justifier soigneusement que $f(x) > 0$ pour tout $x \in] -1, 1[$, puis que $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \in [-1, 1]$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $L_n = - \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_{2k}^k \frac{1}{2^{k-1}} (1 - X^2)^k$ (n -ième Polynôme de Lebesgue).

(a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{C}_{1/2}^n = (-1)^{n-1} \mathbb{C}_{2n}^n \frac{1}{(2n-1)2^{2n}}$.

- (b) Vérifier que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|x| = f(1 - x^2)$ et montrer que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des polynômes de Lebesgue, converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

2^{ème} Partie

Approximation par d'autres suites de polynômes plus simples

A. Intégrales de Wallis

Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt$.

1. (a) Calculer I_0 et I_1 et justifier que $I_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
 (c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
2. (a) Montrer que la suite $(I_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que pour tout $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$.
 (b) Justifier alors $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

B. Étude d'une suite de fonctions

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t^2}$ est intégrable sur $]0, 1[$.
 Dans la suite, on considère les fonctions u_n et v_n définies, pour tout entier $n \geq 1$, par

$$v_n(0) = u_n(0) = 0; v_n(x) = \int_0^x \frac{1 - (1 - t^2)^n}{t^2} dt \text{ et } u_n(x) = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} v_n(x) \text{ si } x \in]0, 1[.$$

2. Étude de la suite $(v_n(1))_{n \geq 1}$
 - (a) Montrer que pour tout entier $p \geq 0$, $\int_0^1 (1 - t^2)^p dt = I_{2p+1}$.
 - (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $v_n(1) = \sum_{p=0}^{n-1} I_{2p+1}$.
 - (c) Montrer alors que $v_n(1) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t}}$.
3. Étude de la suite $(u_n(1))_{n \geq 1}$
 - (a) Montrer que $\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = \frac{2}{\pi} I_{2n}$.
 - (b) En déduire un équivalent de $\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$ et préciser la constante C de la question B.3(b) de la première partie.
 - (c) Montrer alors que la suite $(u_n(1))_{n \geq 1}$ converge vers 1.
4. Soit $a \in]0, 1[$.
 - (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, la restriction de la fonction u_n au segment $[a, 1]$ est k_n -lipschtzienne avec $k_n = \frac{C_{2n}^n}{a^2 2^{2n}}$.
 - (b) En utilisant ce qui précède et le fait que la suite $(u_n(1))_{n \geq 1}$ converge vers 1, montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers 1 sur le segment $[a, 1]$.

5. (a) Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction u_n est croissante sur le segment $[0, 1]$.
 (b) En déduire qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1], 0 \leq u_n(x) \leq M.$$

C. D'autres suites de polynômes approchant uniformément la valeur absolue sur $[-1, 1]$

On considère la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ des polynômes suivants :

$$P_n = \frac{\mathfrak{C}_{2n}^n}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \mathfrak{C}_n^k \frac{1}{2k-1} X^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Montrer que pour tout $(n, x) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$, $P_n(x) = xu_n(x)$.
2. Déduire des questions 4. et 5. de la section précédente que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur le segment $[-1, 1]$; on remarquera que les polynômes P_n sont pairs et on choisira convenablement le a de la question 4.
3. On pose $Q_n = \frac{\mathfrak{C}_{2n}^n}{2^{2n}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \mathfrak{C}_n^k \frac{2k}{2k-1} X^{2k}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la valeur absolue sur le segment $[-1, 1]$
4. Montrer de même que les suites $(\tilde{P}_n)_{n \geq 1}$ et $(\tilde{Q}_n)_{n \geq 1}$ convergent vers la valeur absolue sur le segment $[-1, 1]$, où

$$\tilde{P}_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \mathfrak{C}_n^k \frac{2k}{2k-1} X^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \tilde{Q}_n = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \mathfrak{C}_n^k \frac{2k}{2k-1} X^{2k}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

FIN DE L'ÉPREUVE



M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
 E-mail : medtarqi@yahoo.fr