**Corrigé de l'épreuve de math 2 du C.N.C.M 2007**

*L'objectif du sujet est de proposer diverses démonstrations du théorème de D'Alembert-Gauss admis par le programme.*

**Première partie: Méthodes analytiques**

**A. Résultats préliminaires**

1.(a) Pour tout nombre complexe non nul $z$, on écrit $|P(z)| = \left|a_d z^d\right| \left|a_0 z^{-d} + a_1 z^{1-d} + ... + a_{d-1} z^{-1} + 1\right|$ et comme $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \left|a_0 z^{-d} + a_1 z^{1-d} + ... + a_{d-1} z^{-1} + 1\right| = 1$, on déduit que: $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} \left|a_d z^d\right| = |a_d|\,|z|^d$.

(b) De la question précédente $\lim\limits_{|z|\to+\infty} \dfrac{|P(z)|}{|a_d z^d|} = 1$, on déduit de la définition de la limite qu'il existe un réel $R > 0$ tel que pour tout nombre complexe $z$ vérifiant $|z| \geq R$, on a: $\left|\dfrac{|P(z)|}{|a_d z^d|} - 1\right| \leq \dfrac{1}{2}$ et donc

$$\frac{1}{2}\,|a_d|\,|z|^d \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}\,|a_d|\,|z|^d \leq 2\,|a_d|\,|z|^d$$

2.(a) L'application $z \longmapsto |P(z)|$ est la composée de la fonction polynomiale complexe continue $P$ et de la fonction module continue sur $\mathbb{C}$, on déduit que $z \longmapsto |P(z)|$ est continue sur $\mathbb{C}$. Comme $\mathbb{C}$ est un *e.v.n* de dimension finie tout disque fermé borné est un compact. Or, toute fonction continue sur un compact est bornée et y atteint ses bornes. Le résultat en découle.

(b) $\{|P(z)|$ tel que $z \in \mathbb{C}\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide minorée par 0, elle admet donc une borne inférieure $m$. Or, $\lim\limits_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$ alors et d'après la définition de la limite, il existe $R' > 0$ tel que pour tout nombre complexe $z$ vérifiant $|z| \geq R'$, on a: $|P(z)| \geq m+1$. On déduit que $m = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)| = \inf\limits_{z\in\overline{D(0,R')}} |P(z)|$. Et en appliquant la question 2.(a) au disque fermé $\overline{D(0,R')}$, on déduit que $\inf\limits_{z\in\overline{D(0,R')}} |P(z)|$ est atteinte en un nombre complexe $z_0 \in \overline{D(0,R')}$. Il en résulte que $m = \inf\limits_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$ est atteinte en $z_0$.

**B. Première méthode analytique**

1.(a) En considérant la variable réelle $t$, on déduit de la continuité du polynôme $Q$ que $\lim\limits_{t\to 0} \alpha^k Q(\alpha t) = 0$ (puisque $Q(0) = 0$). On déduit alors de la définition de la limite que pour tout $t$ assez petit on a: $\left|\alpha^k Q(\alpha t)\right| \leq \dfrac{1}{2}$ par exemple. Le résultat en découle.

(b) On a: $\alpha^k = \dfrac{-1}{b}$, $Q_1(\alpha t_0) = 1 - t_0^k + t_0^k \alpha^k Q(\alpha t_0)$. Comme $t_0 \in \,]0,1[$, il s'en suit en utilisant l'inégalité triangulaire puis 1.(a) que

$$|Q_1(\alpha t_0)| \leq 1 - t_0^k + t_0^k \left|\alpha^k Q(\alpha t_0)\right| \leq 1 - \frac{t_0^k}{2} < 1$$

2. On considére comme indiqué le polynôme $Q_1$ tel que: pour tout $z \in \mathbb{C}$, $Q_1(z) = \dfrac{P(\gamma + z)}{P(\gamma)}$. le coefficient constant de $Q_1$ est alors 1. $Q_1$ s'écrit alors sous la forme: $Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q$, avec $Q$ un polynôme vérifiant $Q(0) = 0$, oú $k$ est la valuation du polynôme $Q_1 - 1$ et donc $k \geq 1$. On peut donc appliquer le résultat de la question précédente et déduire l'existence d'un complexe $\delta$ ($\delta = \alpha t_0$, en conservant les mêmes notations) tel que: $|Q_1(\delta)| < 1$. Ce qui entraine que $\delta$ vérifie: $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$.

3. L'existence de $z_0$ est assurée par la question I-A-2.(b). Alors $P(z_0) = 0$, Sinon, et en appliquant la question précédente il existerait un complexe $z_1$ tel que $|P(z_1)| < |P(z_0)|$ ce qui contredirait la minimalité de $|P(z_0)|$.

**C. Deuxième méthode analytique**

1. L'application $r \longmapsto P(re^{i\theta})$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ de dérivée $r \longmapsto e^{i\theta} P'(re^{i\theta})$, alors l'application partielle $r \longmapsto \dfrac{1}{P(re^{i\theta})}$ de $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'oú l'existence de la dérivée partielle de $f$ par rapport à $r$, avec pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) = -e^{i\theta}\,\frac{P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})}$$

De même $f$ admet une dérivée partielle par rapport à $\theta$ avec pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta)=-ire^{i\theta}\frac{P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})}=ir\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)$$

De plus, et comme $P$ et $P'$ sont des polynômes, $P$ ne s'annulant pas et d'après la continuité de l'application $(r,\theta)\mapsto re^{i\theta}$, on déduit que $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial\theta}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$, par suite $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2.(a) $F$ est une fonction intégrale sur le segment $[0,2\pi]$ dépendant d'un paramétre. On applique donc le théorème de dérivation sous le signe $\int$ (cas d'un segment): $f$ étant de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$ ), elle est en particulier continue sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial r}$ continue aussi. On déduit que $F$ est de classe $C^1$ et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel $r$

$$F'(r)=\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)d\theta=\int_0^{2\pi}-e^{i\theta}\frac{P'(re^{i\theta})}{P^2(re^{i\theta})}d\theta$$

Mais en remarquant que pour $r\neq0$, $\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta)=\frac{-i}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}(r,\theta)$, on déduit que

$$F'(r)=\frac{-i}{r}\int_0^{2\pi}\frac{d}{d\theta}(\theta\longmapsto f(r,\theta))d\theta$$

Comme la fonction $\theta\longmapsto f(r,\theta)$ est continue sur $[0,2\pi]$, le théorème fondamental d'intégration s'applique

$$F'(r)=\frac{-i}{r}(f(r,2\pi)-f(r,0))=0$$

et comme $F'$ est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit que $F'$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

(b) Comme $P$ n'est pas constant alors et d'après la question 1.(b) des préliminaires, il existe $R>0$ tel que pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z|\geq R$ on a: $\frac{1}{2}|a_d|\,|z|^d\leq|P(z)|$ de sorte que pour $r\geq R$, $|F(r)|\leq\frac{4\pi}{|a_d|\,r^d}$ ce qui entraine que $\lim\limits_{r\longrightarrow+\infty}F(r)=0$

(c) D'après son expression $F(0)=\frac{2\pi}{P(0)}$. Or, $F'$ est nulle sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, on déduit, du théorème de caractérisation d'une fonction de classe $C^1$ constante, que $F$ est constante de valeur $F(0)\neq0$, ce qui contredit $\lim\limits_{r\longrightarrow+\infty}F(r)=0$. On déduit donc le théorème de D'Alembert-Gauss: Tout polynôme non constant à coefficients complexes posséde au moins une racine complexe.

**Deuxième partie**

**A. Premiers résultats**

1.(a) Soit $P$ un tel polynôme. $P$ est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme $P$ est de degré impair, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}P(x)$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}P(x)$ sont infinies de signes opposés. On déduit du théorème des valeurs intermédiaires que $P(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. En particulier $P$ admet une racine réelle.

(b) Le polynôme caractéristique d'un tel endomorphisme est réel de degré égal à la dimension de l'espace donc impair. On déduit de la question précédente qu'il admet une racine réelle. Les racines réelles du polynôme caractéristique étant les valeurs propres de l'endomorphisme, on déduit que cet endomorphisme admet des valeurs propres.

(c) Supposons qu'une telle matrice $A$ existe et soit $f$ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé. Comme $\dim\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})=3$, $f$ admet bien une valeur propre $\lambda$ et soit $X$ un vecteur propre associé. On déduit alors que $(\lambda^2+\lambda+1)X=0$ avec $X$ non nul, donc $\lambda^2+\lambda+1=0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, ce qui est absurde. Une matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2+A+I_3=0$ n'existe pas!

2.(a) L'endomorphisme $u-\lambda id_E$ est un polynôme en $u$, il commute en particulier avec $u$. D'autre part, et comme $u$ et $v$ commutent, $u-\lambda id_E$ commute avec $v$ aussi. Or, le noyau et l'image de l'un de deux endomrphismes commutant est stable par l'autre. On déduit que $\ker(u-\lambda id_E)$ et $\mathrm{Im}(u-\lambda id_E)$ sont stables par $u$ et par $v$.

(b) Je distingue deux cas: Si $u$ est une homothétie alors tous les sous espaces de $E$ sont stables par $u$. Or, et d'après la question 1.(b), $v$ admet au moins un vecteur propre $x$. La droite dirigée par ce vecteur est bien stable par $v$ et par $u$ aussi.

Sinon, et d'après 1.(b) toujours, $u$ admet une valeur propre $\lambda$. D'après 2.(a), $\ker(u-\lambda id_E)$ et $\mathrm{Im}(u-\lambda id_E)$ sont stables par $u$ et par $v$ et sont distincts de $E$ puisque $u$ n'est pas une homothétie. Or, et d'après le théorème du rang, la somme des dimensions de ces deux sous espaces est égale à la dimension de $E$ laquelle est impaire par hypothèse. On déduit que $\ker(u-\lambda id_E)$ ou $\mathrm{Im}(u-\lambda id_E)$ est un sous espace strict de $E$ de dimension impaire stable par $u$ et $v$.

3. La propriété est évidente si la dimension de l'espace est 1. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ et supposons la propriété acquise pour tout espace vectoriel réel de dimension impaire strictement inférieure à $2p+1$. Soit $E$ un espace vectoriel réel de dimension $2p+1$ et soient $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$ commutant. On déduit de la question précédente qu'il existe un sous espace $F$ strict de $E$ de dimension impaire qui soit stable par $u$ et par $v$. Soient $u'$ et $v'$ les endomorphismes induits sur $F$ par $u$ et par $v$ respectivement. $u'$ et $v'$ commutent comme $u$ et $v$. L'hypothèse de la récurrence s'applique: $u'$ et $v'$ ont un vecteur propre commun. Ce même vecteur est un vecteur propre commun de $u$ et de $v$.

**B. Endomorphismes d'un $\mathbb{C}.e.v$ de dimension impaire**

1. En remarquant que $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut être considéré comme un $\mathbb{R}.e.v$ (de dimension $2n$), il suffit donc de montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace vectoriel réel de ce dernier, ce qui est évident.

2. D'abord remarquons que ces $n^2$ matrices sont des éléments de $\mathcal{F}$. Soit $M=(m_{k,l})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors on a $M=\sum\limits_{1\le k,l\le n} m_{k,l}E_{k,l}$, ${}^tM=\sum\limits_{1\le k,l\le n} m_{l,k}E_{k,l}$ et $\overline{M}=\sum\limits_{1\le k,l\le n}\overline{m_{k,l}}E_{k,l}$ et soit $m_{k,l}=a_{k,l}+b_{k,l}i$ l'écriture algébrique du complexe $m_{k,l}$. De sorte que l'on ait

$$\begin{aligned} M\in\mathcal{F} &\Longleftrightarrow \forall 1\le k,l\le n\ m_{l,k}=\overline{m_{k,l}}\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall 1\le k\le n,\ m_{k,k}=a_{k,k}\in\mathbb{R}\\ \forall 1\le k<l\le n,\ a_{l,k}=a_{k,l} \text{ et } b_{l,k}=-b_{k,l}\end{cases}\\ &\Longleftrightarrow M=\sum_{k=1}^n a_{k,k}E_{k,k}+\sum_{1\le k<l\le n}a_{k,l}(E_{k,l}+E_{l,k})+\sum_{1\le k<l\le n}b_{k,l}\left(i.(E_{k,l}-E_{l,k})\right)\end{aligned}$$

On déduit que $\mathcal{F}=vect_{\mathbb{R}}(E_{1,1},...,E_{n,n},E_{k,l}+E_{l,k},i(E_{k,l}-E_{l,k});1\le k<l\le n)$. Reste à vérifier que cette famille est libre dans $\mathcal{F}$. On considère alors une combinaison linéaire nulle de cette famille à coefficients réels: $\sum\limits_{k=1}^n a_{k,k}E_{k,k}+\sum\limits_{1\le k<l\le n}a_{k,l}(E_{k,l}+E_{l,k})+\sum\limits_{1\le k<l\le n}b_{k,l}\left(i.(E_{k,l}-E_{l,k})\right)=0$, il s'en suit, en posant pour tout $k<l$, $m_{k,l}=a_{k,l}+b_{k,l}i$, que $\sum\limits_{k=1}^n a_{k,k}E_{k,k}+\sum\limits_{k<l}m_{k,l}E_{k,l}+\sum\limits_{k<l}\overline{m_{k,l}}E_{l,k}=0$ et comme la famille des $(E_{k,l})_{1\le k,l\le n}$ est libre dans le $\mathbb{C}.e.v$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on déduit que pour tout $1\le k\le n$, $a_{k,k}=0$ et pour tout $k<l$, $m_{k,l}=0$. L'unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe entraine enfin que tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls et que la famille considérée est libre. C'est une famille à la fois libre et génératrice de $\mathcal{F}$, c'est donc une base de $\mathcal{F}$. On déduit alors que $\dim_{\mathbb{R}}\mathcal{F}=n^2$ qui est impair comme $n$.

3.(a) Il faut d'abord remarquer que pour tout $M\in\mathcal{F}$, $u(M)\in\mathcal{F}$ et $v(M)\in\mathcal{F}$ de sorte que $u$ et $v$ appliquent $\mathcal{F}$ dans lui même. La linéarité de $u$ et de $v$ découlent des propriétés des opérations matricielles.

(b) On vérifie aussitôt que pour tout $M$ de $\mathcal{F}$, $u\circ v(M)=\dfrac{1}{4i}(A^2M-M({}^t\overline{A})^2)=v\circ u(M)$. Donc $u$ et $v$ sont deux endomorphismes, du $\mathbb{R}.e.v$ de dimension impaire $\mathcal{F}$, qui commutent, on déduit de la question II-A-3 que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.

(c) On a donc: $AM_0+M_0{}^tA=2\lambda M_0$ et $AM_0-M_0{}^tA=2i\mu M_0$, on déduit que $AM_0=(\lambda+i\mu)M_0$. D'autre part, les colonnes d'un produit matriciel $MN$ s'obtiennent en multipliant à droite de $M$ par les colonnes correspondantes de $N$. Comme la matrice $M_0$ n'est pas nulle, $M_0$ contient au moins une colonne non nulle $C$, on obtient en particulier: $AC=(\lambda+i\mu)C$ ce qui justifie que $(\lambda+i\mu)$ est une valeur propre complexe de $A$ de vecteur propre associé $C$.

4.(a) Il suffit de considérer une matrice $A$ associée à cet endomorphisme dans une base. L'ordre de $A$ étant impair, on déduit de la question précédente que $A$ admet au moins une valeur propre qui est aussi une valeur propre de l'endomorphisme considéré.

(b) On raisonne comme dans la question II-A-3 en démontrant que le résultat de la question II-A-2.(b) est encore valable lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

**C. Etude du cas général**

**C.I. Etude de l'assertion (i)**

1. $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2.(a) On vérifie que pour tout $M \in \mathcal{G}$, $u(M)$ et $v(M)$ sont dans $\mathcal{G}$. La linéarité de $u$ et de $v$ est évidente. De plus, pour tout $M \in \mathcal{G}$, on a: $u \circ v(M) = A^2 M^t A + AM(^t A)^2 = v \circ u(M)$ et donc $u$ et $v$ commutent.

(b) Avec $n = 2^k p$ on obtient $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = \dfrac{n(n-1)}{2} = 2^{k-1}p(2^k p - 1)$ et comme $k \in \mathbb{N}^*$ et $p$ est impair on déduit que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{G} = 2^{k-1}p'$ oú $p'$ est un entier impair. On applique alors l'assertion (ii) de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_{k-1}$ pour conclure que $u$ et $v$ ont un vecteur propre commun.

(c).i. On a donc: $AN_0 + N_0{}^t A = \lambda N_0$ et $AN_0{}^t A = \mu N_0$. En multipliant la première à gauche par $A$, on obtient: $A^2 N_0 + AN_0{}^t A = \lambda A N_0$, on déduit en utilisant la deuxième formule que:
$A^2 N_0 + \mu N_0 = \lambda A N_0$ soit que: $(A^2 - \lambda A + \mu I_n) N_0 = 0$.

ii. Comme dans la question II-B-3.(c), on a ici: $(A^2 - \lambda A + \mu I_n) W = 0$. Or, $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) = A^2 - \lambda A + \mu I_n$ donc: $(A - \alpha I_n)(A - \beta I_n) W = 0$.

iii. Si $\alpha$ n'est pas une valeur propre de $u$ alors $A - \alpha I_n$ est inversible et donc $(A - \beta I_n) W = 0$ avec $W$ vecteur colonne non nul et donc $\beta$ est une valeur propre de $A$. Ainsi $\alpha$ ou $\beta$ est une valeur propre de $A$. On conclut que $A$ et donc $f$ aussi admettent au moins une valeur propre complexe.

**C.II. Etude de l'assertion (ii)**

1. D'après ce qui précéde $g$ admet au moins un vecteur propre $x$ et comme $f$ est une homothétie, $x$ est aussi un vecteur propre de $f$.

2.(a) En considérant les endomorphismes $f'$ et $g'$ induits sur ce sous espace par $f$ et $g$ respectivement et en exploitant l'assertion $(ii)$ de l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_l$.

(b) Du théorème du rang, on déduit que: $2^k(q+r) = \dim F_1 + \dim F_2 = \dim E = n = 2^k p$ et donc $q + r = p$. Or, $r \neq 0$ car sinon et comme $F_1 \neq \{0\}$ on aura $F_2 = \{0\}$ et donc $\dim F_1 = n$ soit que $f = \lambda id_E$ ce qui contredit le fait que $f$ ne soit pas une homothétie. On conclut que $r \in \mathbb{N}^*$ et que $q < p$. On considère alors les endomorphismes $f'$ et $g'$ induits par $f$ et $g$ sur ce sous espace de dimension $2^k q$ : Si l'un de ces deux endomorphismes est une homothétie on conclut comme dans la question 1. ci-dessus, les vecteurs propres communs à $f'$ et $g'$ étant des vecteurs propres communs à $f$ et $g$, sinon c'est qu'il existe un sous espace stable par $f$ et $g$ de dimension $2^k q_1$ tel que $q_1$ est impair et $q_1 < q < p$ ainsi de suite. Ce procédé s'arrête au bout d'un nombre fini d'itérations (on s'arrête lorsqu'un des endomorhismes induits obtenus est une homothétie) car sinon, on obtiendra une suite d'entiers naturels strictement décroissants compris entre 1 et $p$, ce qui est absurde. Ce qui montre l'assertion (ii) de $\mathcal{P}_k$. D'oú la récurrence. On déduit que tout endomorphisme sur un $\mathbb{C}.e.v$ de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre et que deux endomorphismes de cet espace commutant ont au moins un vecteur propre en commun.

**D. Retour au théorème fondamental de l'algèbre**

1. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon: Question classique! Si $\chi_A$ est le polynôme caractéristique de $A$, alors il existe plusieurs façons pour montrer que $\chi_A = (-1)^n P$.

2. Les racines de $P$ ne sont autres que les valeurs propres de $A$. Or, et d'après l'étude de la partie II-C, $A$ admet des valeurs propres et donc $P$ admet bien des racines complexes.

3. Soit $Q$ un polynôme non constant à coefficients complexes. Alors $Q$ est de la forme $Q = aP$ tel que $a$ est le coefficient dominant de $Q$ et $P$ est un polynôme unitaire pouvant prendre la forme ci-dessus. On déduit de la question précédente que $P$ aussi bien que $Q$ admet au moins une racine complexe. Ce qui démontre le théorème de D'Alembert-Gauss.