# Concours Marocain 2005 : *Maths I, MP.*

**Maths-MP.**
**Mr Mamouni** : *myismail@altern.org*

*Dimanche 26 Février 2006.*

## I. Résultats préliminaires.

**A- Un résultat de dérivation.**

**1)** La formule de Taylor-Young à l'ordre 2, s'écrit :
$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f``(x_0) + o(h^2)$ (1)
$f(x_0-h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f``(x_0) + o(h^2)$ (2)

**2)** En faisant (1)+(2), on obtient : $\dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f``(x_0) + o(1) \longrightarrow f''(x_0)$, quand $h \longrightarrow 0^+$.

**3)** Si $f`` = 0$, on peut affirmer que $f$ est affine.

**A- Un résultat de convergence.**

**1)** a) ?

b) $$\begin{aligned} ds \int_0^{2\pi} b_n^2 \sin^2(nx)dx &= \frac{b_n^2}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos(2nx))dx \\ &= \frac{b_n^2}{2}\left[x - \frac{\sin(2nx)}{2n}\right]_{x=0}^{x=2\pi} \\ &= \pi b_n^2 \end{aligned}.$$

Ainsi $b_n^2 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v_n^2(x)dx \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$.

**2)** a) $c_n = \min(1, |b_n|)$, d'où $0 \leq c_n \leq 1$, donc $(c_n)$ est bornée.
D'autre part $|w_n(x)| \leq |v_n(x)|$, et $(v_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0, donc $(w_n)_{n\geq 1}$ aussi.

b) Ainsi $(c_n)_{n\geq 1}$ est bornée et $(w_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0, en faisant jouer à $c_n$ le rôle joué par $b_n$ dans la question précédente, on déduit que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} c_n = 0$, donc à partir d'un certain rang $c_n < 1$, pour cela utilier la définition de la limite pour $c_n$ avec $\varepsilon = 1$, et alors $c_n = |b_n|$ à partir d'un certain rang, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n| = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0$.

## II. Série trigonométrique dont la somme est continue.

**1)** a) Pour tout réel, $x$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergent, donc son terme génbéral $u_n(x)$ converge vers 0.

b) En particulier $u_n(0) = a_n$ converge vers 0.

c) $0 \leq |v_n(x)| = |u_n(x) - a_n\cos(nx)| \leq |u_n(x)| + |a_n| \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow +\infty$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n(x) = 0$, pour tout réel, $x$. Ainsi $(v_n)$ converge simplement vers 0, et d'aprés la partie **I.B**, on peut conclure que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0$.

**2)** a) $|u_n(x)| = |a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n| \leq M$, car $(|a_n|+|b_n|)$ est bornée, puisqu'elle converge vers 0, ainsi $\left|\dfrac{u_n(x)}{n^2}\right| \leq \dfrac{M}{n^2}$ et d'autre part $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{u_n(x)}{n^2}$ converge normalement, dont le terme général est continue donc sa somme est aussi continue.

b) Pour tout réel, $x$ et tout entier, $N$, on a $\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n(x+2\pi)}{n^2}=\sum_{n=1}^{N}\frac{u_n(x)}{n^2}$, quand on fait tendre $N$ vers $+\infty$, on obtient $F(x+2\pi)=F(x)$, donc $F$ est $2\pi$-périodique.
Calculons les coéfficients de Fourrier de $F$

$$\begin{aligned} a_n(F) &= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{u_p(x)}{p^2}\cos(nx)dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\sum_{p\geq 1}\frac{1}{p^2}\int_{-\pi}^{\pi}u_p(x)\cos(nx)dx \end{aligned}$$

On peut permuter signes somme et intégrale vu qu'il y a convergence normale sur $[-\pi,\pi]$.
D'autre part :

$$\int_{-\pi}^{\pi}u_p(x)\cos(nx)dx = a_p\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx+b_p\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\cos(nx)dx$$

Et on sait que : $\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$, donc $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+p)x+\cos(n-p)x)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p}+\frac{\sin(n-p)x}{n-p}\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=0$ si $n\neq p$

Si $n=p$, alors $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(n+p)x+1)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+p)x}{n+p}+x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}=\pi$.

$\int_{-\pi}^{\pi}\sin(px)\cos(nx)dx=0$ car il s'agit d'intégrer sur $[-\pi,\pi]$ une fonction impaire.

Conclusion : $a_n(F)=-\frac{1}{n^2}$. Et pareil pour le calcul de $b_n(F)$.

**3)** a) On a $\varphi$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, avec $\varphi'(t)=\frac{2\sin t(t\cos t-\sin t)}{t^3}\sim_0 -\frac{t}{3}\longrightarrow 0$ quand $t\longrightarrow 0$, donc $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

b) $|\varphi'(t)|=\left|\frac{2\sin t(t\cos t-\sin t)}{t^3}\right|\leq\frac{2t+1}{t^3}\sim_{+\infty}\frac{2}{t^2}$, intégrable au voisinage de $+\infty$, donc $\varphi'$ aussi.

**4)** a) $\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}$

*On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple*

$$= -\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(\cos(nx+2nh)+\cos(nx-2nh)-2\cos(nx))$$
$$-\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n(\sin(nx+2nh)+\sin(nx-2nh)-2\sin(nx))$$

*Utiliser les formules :*
$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, $\sin a+\sin b=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$$= -\frac{1}{4(nh)^2}\sum_{n=1}^{+\infty}2(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))(\cos(2nh)-1)$$

*Utiliser la formule :* $\cos(2\theta)-1=-2\sin^2(\theta)$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\varphi(nh)$$

b) Commençons par le 2 ème membre de l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))$$
*On peut se permettre de séparer les sommes vu qu'il y a convergence simple*
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi((n+1)h)$$
$$-f(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))$$
On remplace $n+1$ par $n$ dans la 2 ème somme et on remarque que la 3 ème est telescopique, et que $\varphi(0)=1,\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\varphi(nh)=0$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty}S_n(x)\varphi(nh)-\sum_{n=1}^{+\infty}S_{n-1}(x)\varphi(nh)-f(x)$$
*On peut se permettre de regrouper les sommes vu qu'il y a convergence simple*
$$=S_0(x)\varphi(0)+\sum_{n=1}^{+\infty}(S_n(x)-S_{n-1}(x))\varphi(nh)-f(x)$$
On remarque que : $S_0(x)=0, S_n(x)-S_{n-1}(x)=u_n(x)$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\varphi(nh)-f(x)$$
On utilise la question précédente et le fait que : $u_n(x)=a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$
$$=\frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}-f(x)$$

c) i. Découle de la définition de la limite : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}S_n(x)=f(x)$ pour $x$, fixé.

ii. On a :$\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)=\displaystyle\int_{nh}^{(n+1)h}\varphi'(t)dt$, donc
$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))\right|$$
$$\leq\sum_{n=N}^{+\infty}|(S_n(x)-f(x))|\,|(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\sum_{n=N}^{+\infty}\left|\int_{nh}^{(n+1)h}\varphi'(t)dt\right|$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\sum_{n=N}^{+\infty}\int_{nh}^{(n+1)h}|\varphi'(t)|\,dt$$
$$=\frac{\varepsilon}{2A}\int_{Nh}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt$$
$$\leq\frac{\varepsilon}{2A}\int_{0}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt$$
$$=\frac{\varepsilon}{2}\text{ car }\int_{0}^{+\infty}|\varphi'(t)|\,dt=A$$

iii. D'aprés la question précédente, on peut conclure que $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\displaystyle\sum_{n=N}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))=0$, d'autre part $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\varphi(nh)-\varphi((n+1)h)=0$ pour tout $0\leq n\leq N-1$, donc $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))=0$, puisqu'il s'agit d'une somme finie, et par suite $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n(x)-f(x))(\varphi(nh)-\varphi((n+1)h))=0$, donc tenant comte de la question **4.2**, on peut conclure que $\lim\limits_{h\longrightarrow0^+}\dfrac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2}=f(x)$

**5)** a) Dans cette question il semble y avoir une erreur d'énoncé, il fallait plutôt montrer que $\dfrac{F}{4}-F_1$ est affine au lieu de $F-F_1$

Posons $G(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$, et utilisons une intégration par partie dans $F_1$ où $\begin{array}{ll} u'(t)=f(t) & u=G(t) \\ v(t)=x-t & v'(t)=-1 \end{array}$, alors $F_1(x) = [(x-t)G(t)]_{t=0}^{t=x} + G(t) = \int_0^x G(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ car $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$ l'est en tant que primitive d'une fonction continue, avec $F_1' = G$ et $F_1" = G' = f$.

b) D'aprés le préliminaire $\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{F_1(x+2h)+F_1(x-2h)-2F_1(x)}{h^2} = F_1"(x) = f(x)$, on pose $F_2 = \frac{F}{4} - F_1$, alors :

$$\begin{aligned} &\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{F_2(x+2h)+F_2(x-2h)-2F_2(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{F(x+2h)+F(x-2h)-2F(x)}{4h^2} \\ &- \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{F_1(x+2h)+F_1(x-2h)-2F_1(x)}{h^2} \\ &f(x)-f(x)=0 \end{aligned}$$

, donc $F_2 = \frac{F}{4} - F_1$ est affine et par suite $F_2" = 0$, d'où $F" = 4F_1'' = 4f$.

c) $f$ est $2\pi$-périodique en tant que limite simple de fonctions $2\pi$-périodique.
Calculons les coéfficients de Fourier associés à $f$.

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(a_p\cos(pt)+b_p\sin(pt))\cos(nt)dt \end{aligned}$$

Aprés avoir justifié la permutation des signes somme et intégrale

$$= \frac{1}{\pi}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)\cos(nt)dt + b_p\int_{-\pi}^{\pi}\sin(pt)\cos(nt)dt\right)$$

Or $\cos(pt)\cos(nt) = \frac{1}{2}(\cos(p+n)t + \cos(p-n)t)$, donc :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(pt)\cos(nt)dt = \begin{array}{l} \pi \text{ si } n=p \\ 0 \text{ si } n\neq p \end{array}$$

et $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(pt)\cos(nt)dt = 0$, comme integrale sur $[-\pi,\pi]$ d'une fonction impaire.
Donc $a_n(f) = a_n$ et de même on montre que $b_n(f) = b_n$.

# III. Séries trigonométriques impaires.

## A- Une application à l'étude précédente.

**1)** Pour tout réel, $x$ fixé on a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n(x) = 0$, en tant que terme général d'une série numérique convergente, et d'aprés la partie **I.B** on peut affirmer que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0$.

**2)** La suite $(b_n)$ est bornée par un réel $M$, car convergente, donc

$$\begin{aligned} \left|\frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}\right| &= \left|\frac{b_n\sin(nx)}{n^2(n^2+1)}\right| \\ &\leq \frac{M}{n^2(n^2+1)} \\ &\leq \frac{M}{n^4} \end{aligned}$$

et $\frac{1}{n^4}$ est le terme général d'une série de Rieman convergente, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{v_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

D'autre part :

$$\begin{aligned} \left|\frac{v_n'(x)}{n^2(n^2+1)}\right| &= \left|\frac{nb_n\cos(nx)}{n^2(n^2+1)}\right| \\ &\leq \frac{M}{n(n^2+1)} \\ &\leq \frac{M}{n^3} \end{aligned}$$

et $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Rieman convergente, donc $\sum_{n\geq 1}\frac{v_n'(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et enfin

$$\begin{aligned} \left|\frac{v"_n(x)}{n^2(n^2+1)}\right| &= \left|-\frac{n^2b_n\sin(nx)}{n^2(n^2+1)}\right| \\ &\leq \frac{M}{(n^2+1)} \\ &\leq \frac{M}{n^2} \end{aligned}$$

et $\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Rieman convergente, donc $\sum_{n\geq 1} \frac{v``_n(x)}{n^2(n^2+1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Et ainsi on peut dériver sous le signe somme, d'où $\psi$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec : $\psi``(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v''_n(x)}{n^2(n^2+1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+1}$.

**3)** $g$ est bien définie car elle converge normalement d'aprés la question précédente, d'autre part $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin``(nx)}{n^2} = -f(x)$ converge simplement et continue, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et aussi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2(n^2+1)} = \psi(x)$, avec la possibilité de dériver sous le signe somme, donc $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec :

$$\begin{aligned} g``(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin``(nx)}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin``(nx)}{n^2(n^2+1)} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n \sin(nx)}{n^2+1} \\ & -f(x) + g(x) \end{aligned}$$

et donc $-g`` + g = f$.

**4)** La solution générale est de la forme $y = y_H + y_0$ où $y_H$ solution générale de l'équation sans second membre $-y``+y = 0$, alors $y_H(x) = Ae^x + Be^{-x}$ et $y_0$ solution particulière avec second membre $-y`` + y = f$, d'aprés la question précédente $g$ en est une, donc on peut prendre $y_0 = g$, d'où $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + g(x)$, or $y(0) = y(\pi) = 0$ et $y(0) = y(\pi) = 0$, d'où $y = g$.

**B- Cas où la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ des coéfficients est décroissante.**

**1)** a)

$$\begin{aligned} A_n(x) + iB_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) + i\sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{n} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ix}\right)^k \end{aligned}$$

Somme d'une suite géometrique de raison $e^{ix}$

$$= \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} e^{ix}$$

D'autre part en utilisant la relation $1 - e^{i\theta} = -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$, on a :

$$\begin{aligned} A_n(x) + iB_n(x) &= \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}} e^{ix} \\ &= \frac{-2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)e^{i\frac{nx}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}} e^{ix} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \left(\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) + i\sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

D'où $B_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \sin\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$ ,

$A_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right)$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + A_n(x) &= \frac{2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left((n+1)\frac{x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

En utilisant la formule $2\sin a\cos b = \sin(a+b) - \sin(a-b)$.

b) Il faut ajouter dans la question ceci : $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, dans ce cas $|B_n(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ nombre réel qui ne dépond pas de $n$.

**2)** a) $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx) &= \sum_{k=1}^{n} b_k(B_k(x)-B_{k-1}(x))\\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k B_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k B_{k-1}(x)\end{aligned}$$

On remplace $k-1$ par $k$ dans la 2ème somme

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{n} b_k B_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_{k+1} B_k(x)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})B_k(x) + b_n B_n(x) \qquad \text{car } B_0=0\end{aligned}$$

b) $$\sum_{p=1}^{n-1} |(b_p-b_{p+1})B_p(x)| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\sum_{p=1}^{n-1}|b_p-b_{p+1}|$$

Et comme la suite$(b_p)_{p\geq 1}$ est décroissante vers 0.

$$= \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\sum_{p=1}^{n-1} b_p - b_{p+1}$$

On se retrouve devant une somme télescopique.

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} b_0 - b_n\\ &\leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|} b_0\end{aligned}$$

D'où la convergence absolue.

c) D'aprés **2.1** $\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})B_k(x) + b_n B_n(x)$, avec $\sum_{k=1}^{n-1}(b_k - b_{k+1})B_k(x)$ qui converge absolument, $(B_n(x))_{n\geq 1}$ qui est bornée et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = 0$, d'où $\sum_{k=1}^{n} v_k(x)$ converge simplement dont la somme est impaire et $2\pi$-périodique, en tant que limite simple de fonctions impaires et $2\pi$-périodiques.

**3)** **Un exemple.**

a) D'aprés la question **III.B.1.1** on a :

$\sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = -\frac{1}{2} + \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, on integre cette inégalité entre $x$ et $\pi$ et on obtient : $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2} - \frac{1}{2}\int_x^{\pi}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}dt$

b) Ca découle d'un résultat classique dont l'énoncé est le suivant :

Si $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, alors $\lim_{\lambda\longrightarrow+\infty}\int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t)dt = 0$

En effet, en posant $u' = sin(\lambda t)dt$ $\quad u = -\frac{cos(\lambda t)}{\lambda}$ ,
$v = \varphi(t)$ $\quad v' = \varphi'(t)$

$M_0(\varphi) = \sup_{[a,b]}|\varphi(t)|$ et $M_1(\varphi) = \sup_{[a,b]}|\varphi'(t)|$ On aura :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi(t)\sin(\lambda t)dt\right| &= \left|\left[-\frac{cos(\lambda t)}{\lambda}\varphi(t)\right]_{t=a}^{t=b} + \int_a^b \frac{cos(\lambda t)}{\lambda}\varphi'(t)dt\right|\\ &\leq \frac{2M_0}{\lambda} + \frac{M_1(b-a)}{\lambda} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $\lambda \longrightarrow +\infty$

Et donc $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi-x}{2}$.

c) $S(0) = \frac{\pi}{2}$, ainsi $S$ est discontinue en 0, car $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k0)}{k} = 0$.

**4)** **Une condition nécessaire de continuité.**

a) $$\begin{aligned}G(-\theta) &= \int_0^{-\theta} f(t)dt\\ &= -\int_0^{\theta} f(-u)du \quad \text{On pose } u=-t\\ &= \int_0^{\theta} f(u)du \qquad f \text{ est impaire.}\\ &= G(\theta)\end{aligned}$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
G(\theta+2\pi) &= \int_0^{\theta+2\pi} f(t)dt \\
&= \int_0^{2\pi} f(t)dt + \int_{2\pi}^{\theta+2\pi} f(t)dt && \text{Relation de Chasles.} \\
&= \int_0^{2\pi} f(u)du + G(\theta) && u = t-2\pi, \\
& && f\ 2\pi-\text{périodique.} \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^{2\pi} \sin(nu)du + G(\theta) \\
&= G(\theta)
\end{aligned}
$$

b) Dans cette question il s'agit d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0, comme $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$, en tant que primitive d'une fonction continue, alors ce développement est $G(\theta) = G(0)+\theta G'(0)+o(\theta)$, or $G(0)=0$ et $G'(0)=f(0)=0$ car $f$ impaire. donc $G(\theta)=o(\theta)$.

c) $$
\begin{aligned}
a_n(G) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^t f(u)du\right)\cos(nt)dt
\end{aligned}
$$

On utuilise Fubini pour permuter les deux intégrales avec $-\pi \leq u \leq t \leq \pi$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\left(\int_u^{\pi} \cos(nt)dt\right)du \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\sin(nt)du \\
&= -\frac{b_n}{n}
\end{aligned}
$$

D'autre part $b_n(G) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\sin(nt)dt = 0$ car $t \mapsto G(t)\sin(nt)$ est impaire puisque $G$ paire.

d) Ainsi la série de Fourier associée à $G$ est $\left(-\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n}\cos(nx)\right)$, elle converge simplement vers $G(x)-\dfrac{a_0(G)}{2}$, puisque $G$ est de classe $\mathcal{C}^1$, ici il faut faire attention le $a_0(G)$ définie dans l'énoncé n'est pas le coéfficient de Fourier pour $n=0$ car ce dernier est donné par la formule $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} G(t)dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(t)dt = \dfrac{a_0(G)}{2}$, puisque $G$ est paire.

Pour $x=0$ la série $\left(\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n}\right)$ est convergente dont la somme est $\dfrac{a_0(G)}{2}$.

e) i. On a : $$
\begin{aligned}
E\left(\frac{k}{2}\right) &= \frac{k}{2} && \text{si } k \text{ pair} \\
&= \frac{k-1}{2} && \text{si } k \text{ impair}
\end{aligned}
$$ .

Dans tous les cas : $E\left(\dfrac{k}{2}\right) \geq \dfrac{k-1}{2}$, si $E\left(\dfrac{k}{2}\right)+1 \leq n \leq k$, alors $\dfrac{k+1}{2} \leq n \leq k$, donc $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{2k} \leq \dfrac{n\pi}{k} \leq \pi$, et alors $\dfrac{\pi}{2} \leq \dfrac{n\pi}{k} \leq \pi$, donc $\cos\left(\dfrac{n\pi}{k}\right) \leq 0$. Et donc $1-\cos\left(\dfrac{n\pi}{k}\right) \geq 1$, d'où $\dfrac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\dfrac{n\pi}{k}\right)\right) \geq \dfrac{b_n}{n}$, or $E\left(\dfrac{k}{2}\right)+1 \leq n \leq k$, donc $\dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{k}$ et $(b_n)$ est décroissante, donc $b_n \geq b_k$, d'où

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) &\geq \sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_k}{k} \\
&\geq \left(k-E\left(\frac{k}{2}\right)\right)\frac{b_k}{k} \\
&\geq \frac{b_k}{2}
\end{aligned}
$$

car $E\left(\dfrac{k}{2}\right) \leq \dfrac{k}{2}$, donc $k-E\left(\dfrac{k}{2}\right) \geq \dfrac{k}{2}$

ii. $$\begin{aligned} G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(G)\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi} \quad G\left(\frac{\pi}{k}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\ &\geq \sum_{n=E\left(\frac{k}{2}\right)+1}^{k} \frac{b_n}{n}\left(1-\cos\left(\frac{n\pi}{k}\right)\right) \\ &\geq \frac{b_k}{2} \end{aligned}$$

Et donc $0 \leq \dfrac{b_k}{2} \leq G\left(\dfrac{\pi}{k}\right) = o\left(\dfrac{\pi}{k}\right)$, d'où $0 \leq nb_n \leq 2o(\pi) = o(1)$, donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} nb_n = 0$.

$\boxed{\text{Fin du corrigé.}}$