CNC-Maroc 2003—Epreuve de math II : Corrigé
Par M.Taibi professeur en MP* à Rabat

Partie I

1. . Notons par P_A le polynôme caractéristique d'une matrice carrée A.
   Pour tout $C \in M_n(\mathbb{K})$, $\quad P_C(\lambda) = \det(C - \lambda I_n) = \det({}^t(C - \lambda I_n)) = \det({}^tC - \lambda I_n) = P_{{}^tC}(\lambda)$.
   Donc $Sp_{\mathbb{K}}(C) = Sp_{\mathbb{K}}({}^tC)$.

2. Les applications $X \mapsto AX$ et $X \mapsto XB$ sont linéaires, donc $\Phi_{A,B}$ est linéaire.

3. Soient $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de A associe à la valeur propre a
   $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre de ${}^tB$ associe à la valeur propre b.
   Comme $V \neq 0$ et $W \neq 0$, il existe $(i_0, j_0) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $v_{i_0} \neq 0$ et $w_{j_0} \neq 0$.
   a) Pa calcul simple : $V\ {}^tW = (v_i w_j)$ et comme $v_{i_0} w_{j_0} \neq 0$, la matrice $V\ {}^tW$ est non nulle.
   b) On $\Phi_{A,B}(V\ {}^tW) = AV\ {}^tW + V\ {}^tWB = (AV)\ {}^tW + V\ {}^t({}^tBW) = aV\ {}^tW + V\ {}^t(bW) = (a+b)V\ {}^tW$. Et donc , par 3.$a$) , $V{}^tW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associe à la valeur propre $a + b$.

4. Soient $\lambda \in Sp(\Phi_{A,B})$ et Y un vecteur propre associé.
   a) Par $\Phi_{A,B}(Y) = \lambda Y$, on a : $AY + YB = \lambda Y$, donc $AY = \lambda Y - YB = Y(\lambda I_n - B)$
   Soit $k \in N$, supposons que $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$, on a alors :
   $A^{k+1}Y = A(A^kY) = A(Y(\lambda I_n - B)^k) = Y(\lambda I_n - B)(\lambda I_n - B)^k = Y(\lambda I_n - B)^{k+1}$ et la relation est démontrée par récurrence.
   b) Par a), on a $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$ pour tout entier naturel k et par combinaison linéaire, on obtient : $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$ pour tout polyôme $P \in \mathbb{K}[X]$.
   c) On suppose que le polyôme caractérisyique P_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$: $P_A(X) = (-1)^n \prod\limits_{\mu \in Sp(A)} (X - \mu)^{\beta_m}$
   où β_μ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre μ. En utilisan 4.b) et le théorème de Cayley-Hamilton, on déduit que : $YP_A(\lambda I_n - B) = 0$.
   Comme Y est une matrice non nulle, il en résulte que $P_A(\lambda I_n - B)$ est non inversible (car sinon Y serait nulle).
   Mais $P_A(\lambda I_n - B) = (-1)^n \prod\limits_{\mu \in Sp(A)} ((\lambda - \mu)I_n - B)^{\beta_\mu}$, donc l'une des matrices facteurs n'est pas inversible, d'où l'existence de $a \in Sp(A)$ tel que $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible.

5. Soit $\lambda \in Sp(\Phi_{A,B})$. Si le le polyôme caractérisyique P_A de A est scindé sur $\mathbb{K}$, par 4.c) il existe $a \in Sp(A)$ tel que $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible cad $b = (\lambda - a)$ est valeur propre de B et puis $\lambda = a + b \in Sp(A) + Sp(B)$.
   D'où l'inclusion : $Sp(\Phi_{A,B}) \subset Sp(A) + Sp(B)$
   Par 3.b) on a aussi $Sp(A) + Sp(B) \subset Sp(\Phi_{A,B})$, ce qui permet d'écrure :$Sp(\Phi_{A,B}) = Sp(A) + Sp(B)$.

6 On suppose que la famille $(Y_1, ..., Y_n\ )$ est libre dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $(Z_1, ..., Z_n) \in (M_{n,1}(\mathbb{K}))^n$ tel que : $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i{}^tZ_i = 0$, alors, pour tout vecteur $Z \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a: $0 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i{}^tZ_i\right) Z = \sum\limits_{i=1}^{n} \underbrace{({}^tZ_iZ)}_{scalaire} Y_i$ et comme la famille $(Y_1, ..., Y_n\ )$ est libre, on en déduit que : $\forall i, \forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{K})$; ${}^tZ_iZ = 0$ et puis (en prenant $Z = \bar{Z}_i$) en obtient $Z_i = 0$ pour tout i.

7. Soient $(U_1, ..., U_n)$ une base de vecteurs propres de A et $(W_1, ..., W_n)$ une base de vecteurs propres de ${}^tB$. Montrons d'abord que la famille $(U_i\,{}^tW_j)_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{K})$.
Soient $(\alpha_{i,j})$ une famille de scalaires telle que : $\sum_{i,j} \alpha_{i,j} U_i\,{}^tW_j = 0$ et soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a alors :

$$0 = \left(\sum_{i,j} \alpha_{i,j}\, U_i\,{}^tW_j\right) X = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\, U_i\ ({}^tW_j X) = \sum_i \underbrace{(\sum_j \alpha_{i,j}\ {}^tW_j X)}_{\mu_i} U_i$$ et comme (U_i) est libre on en déduit que : $\mu_i = (\sum_j \alpha_{i,j}\ {}^tW_j)X = 0$ pour tout i et tout X, d'où : $\sum_j \alpha_{i,j}\ {}^tW_j = 0$ pour tout i et puisque (W_j) est libre on a : $\forall (i,j);\ \alpha_{i,j} = 0$ et par conséquent $(U_i\,{}^tW_j)_{i,j}$ est une famille libre de $M_n(\mathbb{K})$, de cardinal n^2, donc c'est une base de $M_n(\mathbb{K})$. De plus , par la question 3.b) cette famille est une base de vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$.
En conclusion : $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable.

8. Les matrices A et B sont suposées réelles et symétriques
   a) L'application $<,>$: $(M,N) \mapsto tr({}^tMN)$ est le produit scalaire standart sur $M_n(\mathbb{R})$.
   b) Question classique
   c) Soient $(X,Y) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$, on a :

$$\begin{aligned}
< \Phi_{A,B}(X), Y > &= tr({}^t(AX + XB)Y) \\
&= tr({}^tXAY + B\,{}^tXY) \\
&= tr({}^tXAY) + tr(B\,{}^tXY) && \text{car } tr \text{ est linéaire} \\
&= tr({}^tXAY) + tr({}^tXYB) && \text{d'après } 8.b) \\
&= tr({}^tX(AY + YB) && \text{encore linéairité de } tr \\
&=< X, \Phi_{A,B}(Y) >
\end{aligned}$$

   Donc $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(M_n(\mathbb{R}), <,>)$

Partie II.

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. et S est une matrice symétrique réelle définie positive.

1. Question du cours : Si $\lambda \in Sp(S)$ et X un vecteur propre associe, alors : $\lambda \|X\|^2 = {}^tXSX > 0$ car $X \neq 0$ et S est définie positive, donc $\lambda > 0$.

2. Si $X \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\Phi_S(X) = SX + XS$ est symétrique car X et S sont symétriques.(transposer pour voir..)
Réciproquement : Si $\Phi_S(X) = SX + XS$ est symétrique, alors $SX + XS = {}^tXS + S\,{}^tX$ soit : $\Phi_S(X - {}^tX) = 0$ et comme Φ_S est définie, on en déduit que : $X = {}^tX$ et par suite $X \in S_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $A : \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$.
   a) On suppose A est définie positive et soient λ et μ ses valeurs propres (elles sont strictement positives), on a : $0 < \lambda\mu = \det(A) = ac - b^2$ (*) et $0 < \lambda + \mu = tr(A) = a + c$, donc a ne peut-être négatif ou nul car sinon par (*) $c \leq 0$ ce qui contredit $a + c > 0$.
   b) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$, on suppose $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$, on a :
   ${}^tUAU = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 - \frac{b^2}{a}y^2 + cy^2 = a(x + \frac{b}{a}y)^2 + \frac{1}{a}(ac - b^2)y^2 > 0$. Donc A est définie positive.
   c) A est supposée définie positive, $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$, on a :
   $\Phi_A(X_\lambda) = AX_\lambda + X_\lambda A \overbrace{= \cdots =}^{calcul} \begin{pmatrix} 2\lambda a & (\lambda+1)b \\ (\lambda+1)b & 2c \end{pmatrix}$. Comme $\lambda > 0$, on a, par 3.a et 3.b), $\Phi_A(X_\lambda)$ n'est pas définie positive si et seulement si $4\lambda ac - (\lambda + 1)^2b^2 \leq 0$ et puisque $\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} \leq 1$, on choisit λ et b tel que : $\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} < 1$ et $\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2}ac \leq b^2 < ac$ ce qui toujours possible.

5. Résultat du cours : S est une matrice symétrique réelle, il existe donc $P \in O_n(\mathbb{R})$ (P orthogonale)et $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où les λ_i sont réels telles que : $S = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$.

6. Soit $X \in M_n(\mathbb{R})$, $M = \Phi_S(X)$, $Y = P^{-1}XP = (y_{ij})$et $N = P^{-1}MP = (n_{ij})$.

a) $$\begin{aligned}\Phi_D(Y) &= DY + YD &&= P^{-1}SPY + YP^{-1}SP \\ &&&= P^{-1}\left(SPYP^{-1} + PYP^{-1}S\right)P \\ &&&= P^{-1}(SX + XS)P \\ &&&= P^{-1}MP = N\end{aligned}$$

Donc $\Phi_D(Y) = N$.

La relation $DY + YD = N$ donne : $(\lambda_i + \lambda_j)y_{ij} = n_{ij}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, soit : $y_{ij} = \frac{n_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Dans la suite de la question 6. la matrice M est supposée symétrique définie positive.

b) Par $N = P^{-1}MP$ et M symétrique définie positive, on a : N est symétrique dédinie positive car ${}^tN = {}^t({}^tPMP) = {}^tP{}^tMP = {}^tPMP = N$ et pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$, on a : ${}^tXNX = {}^t(PX)M(PX) > 0$ ($X \neq 0$ et P inversible).

c) Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

– ${}^tUYU = \sum\limits_{i,j} y_{ij}.u_iu_j = \sum\limits_{i,j} \frac{n_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}.u_iu_j$ d'après 6.a).

– Pour $\alpha > 0$, on a : $1 - \alpha < 1$, donc l'application $t \mapsto \frac{1}{t^{1-\alpha}} = t^{\alpha-1}$ (qui est définie et continue sur $]0,1]$) est $]0,1]-$intégrable .

– Pour $s \in]0,1]$, posons $U(s) = \begin{pmatrix} u_1 s^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} \\ \vdots \\ u_n s^{\lambda_n - \frac{1}{2}} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :
$${}^tU(s)NU(s) = \sum_{i,j} n_{ij}(u_i s^{\lambda_i - \frac{1}{2}})(u_j s^{\lambda_j - \frac{1}{2}}) = \sum_{i,j} n_{ij}.u_iu_j s^{\lambda_i+\lambda_j-1},$$ donc l'application $s \mapsto {}^tU(s)NU(s)$ est combinaison linéaire de fonctions continues et $]0,1]-$intégrables ($\lambda_i + \lambda_j > 0$ pour tout (i,j)), donc intégrable sur $]0,1]$.

– $\int\limits_0^1 {}^tU(s)NU(s)ds = \int\limits_0^1 \sum\limits_{i,j} n_{ij}.u_iu_j s^{\lambda_i+\lambda_j-1} = \sum\limits_{i,j} \frac{n_{ij}}{\lambda_i+\lambda_j}.u_iu_j = {}^tUYU.$

Si U est non nul, alors pour tout $s \in]0;1]$ $U(s)$ est aussi non nul et puisque N est définie positive, on a : ${}^tU(s)NU(s) > 0$ pour tout $s \in]0;1]$ et puis par intégration, on a :${}^tUYU = \int\limits_0^1 {}^tU(s)NU(s)ds > 0$.

d) Par ce précède Y est une matrice symétrique définie positive et puis par la relation $X = PY{}^tP$, on déduit que X est définie positive.

Partie III Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Pour $B = -A$, on a, pour tout $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$: $\Phi_{A,B}(X) = AX - XA$

1. On prend $A = \Delta = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$ avec les μ_i deux à deux distincts.

a) Ici $n = 2$:
$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \ker(\Phi_{A,-A}) \Leftrightarrow AX - XA = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & y(\mu_2 - \mu_1) \\ (\mu_1 - \mu_2)z & 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y = z = 0.$

Donc $X \in \ker(\Phi_{A,-A}) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$. En conclusion : $\ker(\Phi_{A,-A}) = vect(E_{11}, E_{22})$ où $(E_{ij})_{i,j}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ et $\dim(\ker(\Phi_{A,-A})) = 2$.

b) Ici n est quelconque :
Soit $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, on a : $X \in \ker(\Phi_{A,-A}) \Leftrightarrow XA - AX = 0 \Leftrightarrow \forall i,j; (\mu_i - \mu_j)x_{ij} = 0 \Leftrightarrow \forall i,j; (i \neq j \Rightarrow x_{ij} = 0)$. Donc $\ker(\Phi_{A,-A}) = vect(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ où $(E_{ij})_{i,j}$ est la base canonique de $M_n(\mathbb{C})$ et par suite $\dim(\ker(\Phi_{A,-A})) = n$.

On peut aussi démntrer que $\ker(\Phi_{A,-A}) = C[A] = vect(I_n, A, ..., A^{n-1})$

2. A est une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distinctes.

a) cours : par exemple :Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$ et à racines simples, donc A est diagonalisable

b) Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = P\Delta P^{-1}$, $\Delta = diag(\mu_1, ..., \mu_n)$
Soit $X \in \ker(\Phi_{A,-A})$, posons $Y = P^{-1}XP$, on a alors $\Delta Y = Y\Delta$, donc $Y \in \ker \Phi_{\Delta,-\Delta} = vect(E_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$
Soit $X = PDP^{-1}$ où $D = diag(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ alors X commute avec A, donc $X \in \ker(\Phi_{A,-A})$.
Conclusion : $\ker(\Phi_{A,-A}) = \Psi(\ker \Phi_{\Delta,-\Delta})$ où Ψ est l'isomorphisme d'espace vectoriel $M \mapsto PMP^{-1}$ et $\dim(\ker(\Phi_{A,-A})) = n$.

3. Soit $||.||$ une norme quelconque sur $M_n(\mathbb{C})$.

a) L'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est linéaire (evident) et $\dim M_n(\mathbb{C}) < +\infty$, donc continue.

b) Soit $q \in [\![1,n]\!]$, l'application $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto \det\left((a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p}\right)$ est continue car polynomiale en les coefficients de A.

4. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$, Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, M est trigonalisabe : $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$; $P^{-1}MP = T$ avec
$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Soit $\mu = \min\{|\lambda_i - \lambda_j|, \lambda_i \neq \lambda_j\} > 0$ et $\mu = 1$ si les λ_i sont tous égaux. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, posons $T_p = T + \frac{\mu}{p}D$ avec $D = diag(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n})$.
Posons $\delta_i = \lambda_i + \frac{\mu}{ip}$, on a pour $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$:

* Si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $\delta_i \neq \delta_j$
* Si $\lambda_i \neq \lambda_j$, supposons $\delta_i = \delta_j$, alors $|\lambda_i - \lambda_j| = \mu \left|\frac{1}{ip} - \frac{1}{jp}\right| < \mu$ impossible, donc $\delta_i \neq \delta_j$

Les valeurs propres de T_p, a savoir les δ_i, sont deux à deux distinctes, donc T_p est diagonalisable.
Or $T = \lim\limits_p T_p$ et par suite $M = PTP^{-1} = \lim\limits_{p\to+\infty} PT_pP^{-1}$. La conclusion en résulte.

5. Soit $r \in [\![0,n]\!]$.

a) Si $r = n$, alors $O_r = \{C \in M_n(\mathbb{C}),\ rg(C) > r\} = \emptyset$ donc c'est un ouvert
Supposons $r \leqslant n-1$, soit $M = (m_{ij})_{i,j}$ un élément de $O_r = \{C \in M_n(C), rg(C) \geqslant r+1\}$, comme $rg(M) \geqslant r+1$, il existe une matrice carrée extraite de M d'ordre $r+1$ qui soit inversible ie : il existe I, $J \subset [\![1,n]\!]$ avec $card(I) = card(J) = r+1$ tel que la matice $M' = (m_{ij})_{(i,j)\in I\times J}$ soit inversible, donc $\det(M') \neq 0$.
L'application $\Psi : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $X = (x_{ij})_{i,j} \mapsto \det(X' = (x_{ij})_{(i,j)\in I\times J})$ est continue et comme $\Psi(M)$ est non nulle, il exist V voisinage de M dans $M_n(\mathbb{C})$ tel que : $\forall X \in V$, $\Psi(X) \neq 0$ c'est à dire tout point de V est de rang$\geqslant r+1 > r$, donc $V \subset O_r$.
En conclusion : O_r est un ouvert de $M_n(\mathbb{C})$.

b) Soit $m \geqslant 2$ et $s \in [\![1,m]\!]$, Notons $\Gamma = \{M \in M_m(\mathbb{C}); rg(M) = s\}$, on a : $\Gamma \subset \Gamma' = \complement_{M_m(C)}^{O_s}$
Γ' est fermé dans $M_m(\mathbb{C})$ (complémentaire d'un ouvert de $M_m(\mathbb{C})$), donc $\bar{\Gamma} = adh(\Gamma) \subset \Gamma'$ ce qui permet de conclure que si $(A_p)_p$ est une suite de points de Γ ($\forall p$, $rg(A_p) = s$), convergeant vers A, alors $A \in \Gamma'$ ie $rg(A) \leqslant s$.

6. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, par 4., il existe une suite $(A_p)_p$ de matrices diagonalisable à valeurs propres deux à deux distinctes telle que $\lim\limits_p A_p = A$.
Si $X \in \ker \Phi_{A_p,-A_p}$, alors $\Phi_{A_p,-A_p}(X) = 0$ et par 3.$a)$ $0 = \lim\limits_p \Phi_{A_p,-A_p}(X) = \Phi_{A,-A}(X)$ et par suite $X \in \ker \Phi_{A,-A}$. D'où $\forall p \in \mathbb{N}$, $\ker \Phi_{A_p,-A_p} \subset \ker \Phi_{A,-A}$ et puis $n = \dim\ker \Phi_{A_p,-A_p} \leqslant \dim\ker \Phi_{A,-A}$.