CnC2003-Maroc : Epreuve de mathématiques I- Corrigé
Par M. Taibi professeur en MP* à Rabat

Partie I : Etude d'un exemple

1. x et α sont des réels strictement positifs.
   (a) On a : $\frac{1-e^t}{t} \underset{0+}{\sim} 1$, l'application $t \mapsto \frac{1-e^t}{t}$ est continue sur $]0;\alpha]$ et prolongeable par continuité en 0, donc intégrable sur $]0,\alpha]$.
   (b) L'applicaion $t \mapsto \frac{e-t}{t}$ est continue sur $[x,+\infty[$ $(x>0)$. D'autre part $t^2\dfrac{e^{-t}}{t} = te^t \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, donc $\dfrac{e^{-t}}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$ et par suite $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$ est $[x,+\infty[-$intégrable.

2. Pour tout $x \in R_+^*$, on pose $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}dt = \int\limits_{]x,+\infty[} \dfrac{e^{-t}}{t}dt$.

   a) Pour tout x et tout $t > x$, on a :
   - $\dfrac{e^{-t}}{t} > 0$, donc $\varphi(x) > 0$.
   - $\frac{1}{t} < \frac{1}{x} \Rightarrow \varphi(x) = \int\limits_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}dt < \int\limits_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{x}dt = \frac{1}{x}e^{-x}$

     En conclusion : $0 < \varphi(x) < \dfrac{1}{x}e^{-x}$ pour tout $x > 0$.

   b) Posons $F(x) = \int\limits_1^x \dfrac{e^{-t}}{t}dt$ pour tout $x > 0$, alors F est une primitive de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{t}$, sur R_+^*. Pour $x > 0$, on a : (*) $\varphi(x) = \int\limits_x^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}dt = \int\limits_x^1 \dfrac{e^{-t}}{t}dt + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{e^{-t}}{t}dt}_{\varphi(1)} = \varphi(1) - F(x)$, donc φ est de classe C^1 sur R_+^*, avec :

   $$\forall x > 0; \varphi'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

   c) Pour $x > 0$, $\ln(x)$ s'écrit : $\ln(x) = \int\limits_1^x \dfrac{1}{t}dt$ et par la relation (*) de $2.b)$, on a :
   $\varphi(x) + \ln(x) = \int\limits_x^1 \dfrac{e^{-t}}{t}dt + \varphi(1) + \int\limits_1^x \dfrac{1}{t}dt = \varphi(1) - \int\limits_x^1 \dfrac{1-e^{-t}}{t}dt.$
   Par $1.a)$ et passage à la limite lorsque x tend vers 0^+, on obtient :

   $$\lim_{t\to 0^+} (\varphi(x) + \ln(x)) = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt = C$$

   d) Pour tout $x > 0$, on a :

   $$\begin{aligned}\varphi(x) + \ln(x) &= \varphi(1) - \int\limits_x^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt &&= \varphi(1) - \left(\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt - \int\limits_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt\right)\\ & &&= \underbrace{\varphi(1) - \int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}dt}_{=C} + \int\limits_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt\\ & &&= C + \int\limits_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}dt\end{aligned}$$

Le développement en série entière de l'application $t \mapsto h(t) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-t}}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$, donne :

$h(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-t)^{k+1}}{k!} t^{k-1}$ pour tout t réel et par intégration sur le compact $[0, x]$, on obtient :

$$\varphi(x) + \ln(x) = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{x^k}{k}$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(|x|)$

 (a) L'application ψ est paire, il suffit de vérifier l'ingrabilité sur $]0; +\infty[$. Or $|\psi(x)| = \psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) < \dfrac{e^{-x}}{2x}$ et $x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{2x}$ intégrable sur $[1; +\infty[$, donc ψ est intégrable sur $[1, +\infty[$.
 Au voisinage de 0^+, on a, par 2.c) : $\varphi(x) \sim -\ln(x)$ et $x \mapsto -\ln(x)$ est $]0, 1]-$intégrable. Ceci permet de conclure que ψ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc aussi sur $]-\infty; 0[$.

 (b) Par : $\forall t > 0$; $\left|\psi(t)e^{-ixt}\right| = \psi(t) =< \dfrac{e^{-t}}{2t}$ et 3.a) l'application $t \mapsto \psi(t)e^{-ixt}$ est intégarble sur $]0, +\infty[$.
 En échangeant t en $-t$ et via la parité de ψ, on déduit que $t \mapsto \psi(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $]-\infty, 0[$.
 On posera par définition $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{0} \psi(t)e^{-ixt}dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt$ et on a alors :
 $$\begin{aligned} \hat{\psi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt &= \int_{-\infty}^{0} \psi(t)e^{-ixt}dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt \\ &= \int_0^{+} \psi(-t)e^{ixt}dt + \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-ixt}dt \quad \text{chgt de variable } t \leftrightarrow -t \\ &= \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2}\varphi(t)\left(e^{-ixt} + e^{ixt}\right)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt \end{aligned}$$

 (c) Caractère C^∞ de $\hat{\psi}$:

 - L'application $g : (x, t) \mapsto \varphi(t)\cos(xt)$ est définie et de Classe C^∞ sur $]0; +\infty[\times\mathbb{R}$; avec : $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) = \varphi(t)(-t^k)\cos(xt + k\frac{\pi}{2})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $(x, t) \in]0; +\infty[\times\mathbb{R}$
 - $\forall k \in \mathbb{N}, \forall (x, t) \in]0; +\infty[\times\mathbb{R}$; $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)\right| \leqslant t^k\varphi(t)$ et $t \mapsto t^k\varphi(t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ ($t^k\varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$)
 Le théorème de dérivation sous le signe intégral permet de conclure que $\hat{\psi}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $\hat{\psi}^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)(-t^k)\cos(xt + k\frac{\pi}{2})dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

 (d) On utilise une intégartion par parties, en posant : $U(t) = \varphi(t)$ et $V(t) = \frac{1}{x}\sin(xt)$ qui sont de classe C^1 avec $\lim_{t\to+\infty}(U(t)V(t)) = 0$ car $|U(t)V(t)| \leqslant \frac{1}{xt}e^{-t}$ et $\lim_{t\to 0} U(t)V(t) = 0$ car φ est bornée, on obtient alors :
 $\hat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\frac{\sin(xt)}{x}dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\frac{\sin(xt)}{x}d$ car $\varphi'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}$.
 Par 3.b) et la continuité sous le signe intégral, on a : $\hat{\psi}(0) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$.

4. L'expression $\hat{\psi}(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$

 (a) L'application $h : (x, t) \mapsto \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)$ est définie, continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
 Pour tout $a > 0$ et tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times\mathbb{R}_+^*$, $|h(x, t)| \leqslant \frac{1}{a}e^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
 h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x, t) = e^{-t}\cos(xt)\right| \leqslant e^{-t}$ qui est $\mathbb{R}_+^* - intégrable$.
 Par le théorème de dérivation sous le signe intégral, $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est de classe C^1 sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*$ et
 $$\begin{aligned} \Phi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x, t)dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(xt)dt \\ &= \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{-t}e^{ixt}dt\right) \\ &= \Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt\right) \\ &= \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$
 car $\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dt = \frac{1}{x^2+1} + i\frac{x}{x^2+1}$ et x réel.

(b) On a $\Phi(x) = x\hat{\psi}(x)$ et $\hat{\psi}$ est définie en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} \Phi(x) = 0$. D'autre part $\Phi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x > 0$, donc $\Phi(x) = \arctan(x)$ pour tout $x > 0$ et par suite : $\hat{\psi}(x) = \frac{1}{x}\arctan(x)$ pour tout $x > 0$.

Partie II :Quelques propriétés de la transformée de Fourier d'une fonction

1. *Transformation de Fourier d'une fonction intégrable*

a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on a alors :
$\forall(x,t) \in R^2$; $\left|f(t)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$ et par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, avec $\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt.$
Conclusion : $\hat{f}$ est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.

(a) Si f est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, alors l'application $h : (x,t) \mapsto f(t)e^{-ixt}$ définie sur $\mathbb{R}^2$ vérifie :
$\cdot$ h est continue sur $\mathbb{R}^2$
$\cdot\forall(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $|h(x,t)| \leqslant |f(t)|$ et f est $\mathbb{R}-$intégrable
Le théorème de continuité sous le signe intégral s'applique, donc $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. *Transformations*

(a) L'application $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$ est linéaire (par linéairité de l'intégrale) sur l'espace des fonctions continues par morceaux et $R-$intégrables.

(b) Pour tout $(x,t) \in R^2$, on a : $\left|f(t-a)e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t-a)|$ et conmme $t \mapsto t-a$ est un C^1-difféomorphisme de R sur lui même, il en résulte que $t \mapsto f(t-a)$ est intégrable (car f est $R-intégrable$) sur R et par suite $f_a(x)$ est définie pour tout x réel., avec

$$\hat{f}_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-ixt}dt \overset{u=t-a}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ix(u+a)}du = e^{-ixa}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ixu}du = e^{-ixa}\hat{f}(x)$$

Pour tout $a \neq 0$, l'application $t \mapsto at$ est un C^1 -difféomorphisme de R sur lui même, comme précédement, on déduit que pour tout $x \in R$, $\overset{\wedge}{{}_af}\,(x)$ est déinie et

$$\begin{aligned} \overset{\wedge}{{}_af}\,(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-ixt}dt \overset{u=at}{=} \begin{cases} \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ix(u/a)}du & \text{si } a>0 \\ \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} f(u)e^{-ix(u/a)}du & \text{si } a<0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{x}{a}u}du = \frac{1}{|a|}\hat{f}(\frac{x}{a}) \end{aligned}$$

(c) Posons $g(t) = f(t)e^{iat}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\left|g(t)e^{-ixt} = f(t)e^{iat}e^{-ixt}\right| \leqslant |f(t)|$ pour tout t et tout x et l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$, on déduit que $\hat{g}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iat}e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} fte^{-it(-a+x)}dt = \hat{f}(x-a).$$

(d) Si f est paire, alors : $\forall x \in R$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ixt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt$. Or $\int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-ixt}dt \overset{u=-t}{=} \int_{+\infty}^{0} f(-t)e^{ixt}(-dt) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt$, donc :

$$\hat{f}(x) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt + \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(xt)dt$$

De même si f est impaire, on a : $\hat{f}(x) = 2i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt$

(e) Si f est réelle et paire (resp. impaire) par 2.d) l'application $\hat{f}$ est paire (resp. impaire

3. *Dérivation*
Ici $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(a) Soient x et y deux réels tels que $x > y$, alors : $|f(x) - f(y)| = \left|\int_y^x f'(t)dt\right| \leqslant \int_y^x |f'(t)|\,dt$. Par cette inégalité et l'intégrabilité de f' sur $\mathbb{R}$, on déduit que f vérifie le critère de Cauchy au voisinage de l'infini, et par suite $L = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.
Supposons $L \neq 0$, par exemple $L > 0$, il existe alors $C > 0$ tel que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geqslant C \Rightarrow |f(x)| \geqslant \frac{L}{2} > 0$. En particulier : $\forall x \geqslant C;\ \int_C^x |f(t)|\,dt \geqslant \frac{L}{2}(x - C) \underset{x\to+\infty}{\rightarrow} +\infty$ ce qui contredit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$. On conclut, donc que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

(b) Soit $x \in R$, on a : $\hat{f'}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}dt$.
Une intégration par partie, en posant : $U(t) = f(t)$ et $V(t) = e^{-ixt}$ qui sont de classe C^1 sur R et vérifient : $\lim\limits_{\pm\infty} U(t)V(t) = 0$ pour tout x, donne :

$$\begin{aligned}\hat{f'}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-ixt}dt &&= [U(t)V(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} U(t)V'(t)dt \\ & &&= ix\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt \\ & &&= ix\hat{f}(x)\end{aligned}$$

Par $\hat{f'}(x) = ix\hat{f}(x)$ pour tout $x \in R$, on déduit : $\forall x \neq 0,\ \left|\hat{f}(x)\right| = \left|\frac{\hat{f'}(x)}{ix}\right| = \frac{|\hat{f'}(x)|}{|x|}$ et comme $\hat{f'}$ est bornée sur R (question), il en résulte que : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \hat{f}(x) = 0$.

(c) On suppose $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur R :
L'application $h : (x,t) \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2$, avec $\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = -itf(t)e^{-ixt} = -ig(t)$, donc pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$; $\left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant |g(t)|$ et $g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par suite le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique et l'on a : $\hat{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $\hat{f}'(x) = -i\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)e^{-ixt}dt = -i\hat{g}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Partie III : Formule d'inversion

A- *Un exemple :*
On pose $h(t) = e^{-t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et on admet la formule : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$.

1. L'application h est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ car paire et $t^2e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$, donc $\hat{h}$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus $t \mapsto th(t) = te^{-t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ (car impaire et $t^2th(t) = t^3e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\rightarrow} 0$) et par 3.c) $\hat{h}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\begin{aligned}\hat{h}'(x) &= -i\int_{-\infty}^{+\infty} th(t)e^{-ixt}dt &&= -i\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-(t^2+ixt)}dt \\ & &&= -i\int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2}(2t+ix)e^{-(t^2+ixt)}dt + \tfrac{1}{2}i(ix)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t^2+ixt)}dt \\ & &&= \left[e^{-(t^2+ixt)}\right]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \tfrac{1}{2}x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-ixt}dt \\ & &&= -\tfrac{1}{2}x\hat{h}(x)\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{h}'(x) + \frac{1}{2}x\hat{h}(x) = 0$ ie : $\hat{h}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (1) : $y' + \frac{1}{2}xy = 0$.

2. L'équation différentielle (1) est linéaire d'ordre un, sans second mambre. la solution générale de (1) est donc de la forme : $y(x) = \lambda e^{\int \frac{1}{2}x\,dx} = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Comme $\hat{h}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (1), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$.
Pour $x = 0$, on a : $\lambda = \hat{h}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$. d'où : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\hat{h}(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

3. Si $h : t \mapsto e^{-t^2}$ et $\varepsilon > 0$, on a : ${}_{\sqrt{\varepsilon}}h : t \mapsto e^{-(\sqrt{\varepsilon}t)^2} = e^{-\varepsilon t^2}$. Les hypothèses de $II - 2.b$) sont satisfaites, et donc $\widehat{{}_{\sqrt{\varepsilon}}h}\,(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\hat{h}(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{1}{4}(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}})^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

B- *Application à la formule d'inversion*
Soit f une fonction continue, bornée , intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs et tendant vers 0

a) Soit v une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$: $v_n(y) = v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}$, on a :
$\cdot\ \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}$, v_n est continue sur $\mathbb{R}$ et (v_n) converge simplement vers v sur $\mathbb{R}$
$\cdot \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}$, $|v_n(y)| = \left|v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}\right| \leqslant |v(y)|$ et v est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Le théorème de convergence dominée s'applique et on a bien la formule demandée.

b) Soit w une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{R}$, posons $w_n(y) = w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}$, on a alors :
$\cdot(w_n)$ est une suite de fonctions continues et converge simplement vers $y \mapsto w(x)e^{-y^2}$
$\cdot \forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}$, $|w_n(y)| = \left|w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}\right| \leqslant \|w\|_\infty e^{-y^2}$ et $y \mapsto \|w\|_\infty e^{-y^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Donc par le théorème de convergence dominée et la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\pi}$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x+\varepsilon_n y)e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)e^{-y^2}dy = w(x)\sqrt{\pi}.$$

2. Pour tous x, y et t réels , on a :
$\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}e^{-\varepsilon_n y^2}dy = \overset{\wedge}{\sqrt{\varepsilon}h}\ (t-x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon}}$
$\cdot \left|f(t)\ \overset{\wedge}{\sqrt{\varepsilon}h}\ (t-x)\right| \leqslant \|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon}}$ et $t \mapsto \|f\|_\infty \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et puis

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon}}dt &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}}\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-(\frac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}})^2}dt \\
&\overset{s=\frac{t-x}{2\sqrt{\varepsilon_n}}}{=} 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n}s)e^{-s^2}ds \quad \text{(chgt de variable qui est un C}^1\text{-difféo)}
\end{aligned}$$

D'où finalement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}e^{-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\pi}e^{-\frac{(t-x)^2}{4\varepsilon}}dt = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n}s)e^{-s^2}ds$$

3. x désigne un nombre réel et $\varepsilon > 0$.
a) Posons $g(y,t) = f(t)e^{ixy-\varepsilon y^2}e^{-iyt} = f(t)e^{-iy(t-x)}e^{-\varepsilon y^2}$ pour tout $(y,t) \in \mathbb{R}^2$.
Pour p, $q \in \mathbb{N}^*$, l'application g est contiunue sur la pavé $K = [-p;p] \times [-q;q]$ et le théorème de fubini s'applique et on a alors la relation demandée.
b) Pour pour $q \in \mathbb{N}^*$, l'application $f_q : y \mapsto \int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt$ est continue car $(y,t) \mapsto f(t)e^{-iyt}$ est continue sur $\mathbb{R} \times [-q;q]$ et que $(f_q)_q$ converge simplement vers $\hat{f}$.
D'autre part, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, al suite d'applications continues $(h_q : y \mapsto e^{ixy-\varepsilon y^2}f_q(y))_q$ converge simplement vers $h : y \mapsto e^{ixy-\varepsilon y^2}\hat{f}(y)$ et puisque $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, il en résulte que h est intégrable (car $\left|h(y) = e^{ixy-\varepsilon y^2}\hat{f}(y)\right| \leqslant e^{-\varepsilon y^2}\left|\hat{f}(y)\right| \leqslant \left|\hat{f}(y)\right|$) et on a (via le th de convergence dominée) l'expression demandée.
c) Le même principe que précédement, mais ici encore plus simple :La suite l'applications continues $(f_p : t \mapsto f(t)\int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}dy)_p$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $t \mapsto f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}dy$ et que $|f_p(t)| \leqslant |f(t)|\int_{-p}^{p} e^{-\varepsilon y^2}dy \leqslant |f(t)|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon y^2}dy = C^{te}\,|f(t)|$ et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$, encore par le th. de convergence dominée, l'dentité demandée en résulte.
d) On applique à $a)$ le $c)$ et $b)$ pour déduire $d)$:

$$\begin{aligned}
\lim_q\left(\lim_p \int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy\right) &= \lim_q\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy\right) \\
&= \lim_q \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-iyt-\varepsilon y^2}dy\right)dt \\
&\overset{b)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-iyt-\varepsilon y^2}dy\right)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Or}\quad \lim_q\left(\lim_p \int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy\right) &= \lim_p\left(\lim_q \int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy\right) \\
&= \lim_p \int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\hat{f}(y)dy
\end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-iyt-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\hat{f}(y)dy.$

4. Par 2., on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}e^{-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n}s)e^{-s^2}ds$ et 3.$d)$
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)}e^{-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\hat{f}(y)dy$. Donc :

$2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+2\sqrt{\varepsilon_n}s)e^{-s^2}ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-\varepsilon_n y^2}\hat{f}(y)dy$ et on fait tendre n vers $+\infty$, pour obtenir : $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\hat{f}(y)dy$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (remarquer que la suite de fonctions sous le signe intégral vérifie les hypothèses du th. de convegence dominée).