ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\overline{A}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A et A^* est la matrice transposée de $\overline{A}$ ($A^* = {}^t\overline{A}$) ; lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $A^* = {}^tA$.

Pour tout élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres *complexes* de A et on désigne par $\rho(A)$ le réel défini par $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$.

Pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de composantes $x_1, \dots, x_n$, on pose $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$; il s'agit d'une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et il n'est pas demandé de le redémontrer.

Pour tout $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose : $N_\infty(A) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ et $N(A) = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$.

On rappelle enfin qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

1ère Partie

1. Montrer que N_∞ et N sont des normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que $\|AX\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\|X\|_\infty$, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

   (b) Montrer que $N_\infty(AB) \leqslant N_\infty(A)N_\infty(B)$. Cette inégalité est-elle valable avec la norme N ?

3. (a) On suppose que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$, d'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, converge vers une matrice A ; montrer que pour tout $(B, C) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$, la suite $(BA_kC)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice BAC.

   (b) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $A_k = \big(a_{ij}^{(k)}\big)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $A = (a_{ij})$ si et seulement si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\}$, la suite $\big(a_{ij}^{(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers a_{ij}.

   (c) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de M pour que la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

4. (a) Soit $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer T^k et en déduire que la suite $(T^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si ($|\alpha| < 1$) ou ($\alpha = 1$ et $\beta = 0$).

   (b) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(M) < 1$. En cas de convergence, préciser la limite de cette suite.

   (c) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(M)$ pour que la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (a) Montrer que si la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle alors pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la suite $(M^k X)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul.

   (b) En déduire que si la suite $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle alors $\rho(M) < 1$.

   Dans toute la suite du problème, on admettra la réciproque de ce résultat.

2ème Partie

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on rappelle que A est symétrique si $A^* = A$. Si A est symétrique, elle est dite *positive* si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^*AX \geqslant 0$; elle est dite *définie positive* si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ X^*AX > 0$.

On muni $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique défini par $<X,Y>= X^*Y$, où X^* désigne la matrice ligne transposée de la matrice colonne X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X^* = {}^tX$).

1. Soit S une matrice réelle symétrique et positive. Montrer que pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice C^*SC est aussi symétrique et positive.

2. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer que la matrice UU^* est symétrique et positive.

   (b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $UU^*X = 0$ si et seulement si $U^*X = 0$.

   (c) Soit $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; à quelle condition a-t-on $UU^* = VV^*$?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où a est un nombre réel.

   (a) Justifier que A est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

   (b) Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de A.

   (c) Soit (U_1, U_2, U_3) une telle base ; pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note λ_i la valeur propre associée au vecteur propre U_i. Comparer alors la matrice $\lambda_1 U_1 U_1^* + \lambda_2 U_2 U_2^* + \lambda_3 U_3 U_3^*$ avec A.

   (d) À quelle condition A est-elle positive, définie positive ?

4. Soit R une matrice réelle symétrique.

   (a) Montrer l'existence d'une base orthonormée $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n)$ de $\big(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), <.,.>\big)$ et d'un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de réels tels que $R = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathcal{E}_i \mathcal{E}_i^*$.

   (b) Que représentent pour R les λ_i et les $\mathcal{E}_i$?

   (c) À quelle condition R est-elle positive, définie positive ?

5. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que R est symétrique et positive si et seulement s'il existe n éléments $U_1, \ldots, U_n$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $R = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_i U_i^*$.

6. Soient $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; montrer alors que $RX = 0$ si et seulement si $X^*RX = 0$. À quelle condition R est-elle définie positive ?

3$^{\text{ème}}$ Partie

A- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(M) < 1$; on désigne par φ l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & Z & \longmapsto & Z - M^*ZM \end{array}$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $Z \in \operatorname{Ker} \varphi$; montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $Z = (M^*)^p Z M^p$.
3. (a) Montrer que $\rho(M^*) = \rho(M)$.
   (b) Déduire de ce qui précède que φ est injective.
4. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A - M^*AM = B$.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$; montrer que $(M^*)^k A M^k - (M^*)^{k+1} A M^{k+1} = (M^*)^k B M^k$, puis en déduire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la relation
   $$A = (M^*)^{p+1} A M^{p+1} + \sum_{k=0}^{p} (M^*)^k B M^k.$$
   (c) Justifier alors que la série $\sum\limits_{p \geqslant 0} (M^*)^p B M^p$ est convergente de somme A.

B- Ici on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on conserve les notations et les hypothèses de **A**.

1. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive et soit $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\Delta - M^*\Delta M = S$.
   (a) Montrer, sans l'exprimer en fonction de S, que Δ est une matrice symétrique.
   (b) Montrer que Δ est une matrice positive.
   (c) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; montrer que $\Delta X = 0$ si et seulement si $SM^kX = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
2. Soient $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et R la matrice symétrique telle que $R - M^*RM = UU^*$.
   (a) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; montrer que $RX = 0$ si et seulement si $< (M^*)^k U, X >= 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
   (b) En déduire que la matrice R est définie positive si et seulement si $\big(U, M^*U, \ldots, (M^*)^{n-1}U\big)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Soit $P = X^n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme à coefficients réels dont les racines réelles ou complexes sont toutes de module < 1. On note C la matrice
   $$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

On admet que le polynôme caractéristique de C est égal à $(-1)^n P$, ce qui donne $\rho(C) < 1$.

On désigne enfin par $\mathcal{B} = (E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on considère la matrice symétrique réelle Ω telle que

$$\Omega - C^*\Omega C = E_n E_n^*.$$

(a) i. Pour tout entier k compris entre 1 et n, exprimer le vecteur $C^* E_k$ dans la base $\mathcal{B}$.

ii. Montrer par récurrence que $(C^*)^p E_n - E_{n-p} \in \mathrm{Vect}(\{E_{n-p+1}, \ldots, E_n\})$ pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.

iii. Montrer alors que la famille $(E_n, C^* E_n, \ldots, (C^*)^{n-1} E_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(b) En déduire que Ω est définie positive.

(c) Soient $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $R - C^*RC = UU^*$. Montrer qu'il existe un polynôme réel Q, de degré $\leqslant n-1$, tel que $U = (Q(C))^* E_n$ et en déduire que $R = (Q(C))^*\Omega Q(C)$.

(d) $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice $\Delta - C^*\Delta C$ est symétrique et positive si et seulement s'il existe n polynômes réels $Q_1, \ldots, Q_n$, tous de degré $\leqslant n-1$, tels que

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} (Q_i(C))^*\Omega Q_i(C).$$

FIN DE L'ÉPREUVE