ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2001

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions

Pour tout le problème, on définit une famille de fonctions $(J_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta)d\theta.$$

On définit aussi une famille d'équations différentielles $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \qquad (E_n)$$

Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles*.

1ère Partie
Premières propriétés de J_n

1. Montrer que pour tout entier n, la fonction J_n est définie et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Établir l'égalité $J_{-n} = (-1)^n J_n$.
3. Montrer que pour tout entier n, la fonction J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $J_n^{(p)}(x)$ pour tout entier naturel p et tout réel x.
4. Montrer que pour tout entier n, J_n est une solution de (E_n) définie sur $\mathbb{R}$.
5. Pour tout entier n, quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de (E_n) qui sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$?

2ème Partie
Étude du comportement de J_n au voisinage de $+\infty$

1. Soient u et v deux applications définies et continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs positives ; soit $A \geqslant 0$. On suppose que pour tout $x > 0$, les applications v et uv sont intégrables sur $[x, +\infty[$ et que

$$u(x) \leqslant \alpha(x) = A + \int_x^{+\infty} u(t)v(t)dt.$$

Soit $y > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $w(x) = \left(\int_y^x u(t)v(t)dt\right) \exp\left(\int_y^x v(t)dt\right)$.

   (a) Montrer que w est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$w'(s) \leqslant \alpha(y)\frac{d}{ds}\left[\exp\left(\int_y^s v(t)dt\right)\right].$$

(b) En déduire que

$$\forall\, x \in]0, y], \quad u(x) \leqslant \alpha(y) \exp\left(\int_x^y v(t)dt\right),$$

puis que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u(x) \leqslant A \exp\left(\int_x^{+\infty} v(t)dt\right).$$

2. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et p une application continue définie sur $]a, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Par la suite, b désigne un élément fixé de $]a, +\infty[$. On considère l'équation différentielle :

$$y'' + (1 + p)y = 0. \tag{F_p}$$

(a) On prend $a = -\infty$ et $p = 0$; résoudre l'équation différentielle (F_0).

(b) Soit f une application définie et continue sur $]a, +\infty[$ à valeurs réelles. Montrer que toute solution y de l'équation différentielle $y''(x) + y(x) = -p(x)f(x)$ s'écrit sous la forme :

$$\forall\, x \in]a, +\infty[,\ y(x) = A\cos x + B\sin x + \int_b^x f(t)k_p(x, t)dt$$

où A et B sont des constantes réelles et k_p est une application que l'on déterminera en fonction de p. (*On pourra chercher* $y(x)$ *sous la forme* $A(x)\cos x + B(x)\sin x \dots$)

(c) En déduire que pour toute solution z de (F_p) il existe un couple (A, B) de réels tel que :

$$\forall\, x \in]a, +\infty[,\ z(x) = A\cos x + B\sin x + \int_b^x z(t)k_p(x, t)dt.$$

3. Soit $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Déterminer une application q définie sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathcal{C}^2$, telle que l'application $I_n = \dfrac{J_n}{q}$ soit solution d'une équation différentielle du type (F_{p_n}), où p_n est une application, définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on déterminera. (*Ici on a* $a = 0$.)

(b) On reprend les notations de la question 2. avec $p = p_n$. Montrer que pour tout réel x, l'application $t \mapsto I_n(t)k_{p_n}(x, t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que $x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt$ est une application définie sur $\mathbb{R}$ qui s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions sinus et cosinus.

(c) Montrer alors qu'il existe un couple (C, D) de réels tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ I_n(x) = C\cos x + D\sin x - \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt.$$

(d) Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ |I_n(x)| \leqslant |C| + |D| + \int_x^{+\infty} |I_n(t)||p_n(t)|dt,$$

puis en déduire que $(C, D) \neq (0, 0)$ et que I_n est bornée sur $[1, +\infty[$.(*Utiliser la question 1.*)

(e) En déduire l'existence de deux réels A_n et β_n, avec $A_n \neq 0$, tels que :

$$J_n(x) = \frac{A_n}{\sqrt{x}}\sin(x + \beta_n) + O\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \quad \text{au voisinage de } +\infty.$$

(*On montrera que* $\displaystyle\int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$ *au voisinage de* $+\infty$.)

3^{ème} Partie

Existence d'une solution N_n de (E_n) définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} N_n(x) = +\infty$.

Dans toute cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Montrer que pour tout couple (m, k) d'entiers naturels non nuls on a la relation :
$$2J_m^{(k)}(0) = J_{m-1}^{(k-1)}(0) - J_{m+1}^{(k-1)}(0).$$
   (b) Si $n \geqslant 1$ montrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ on a $J_n^{(k)}(0) = 0$.
   (*On pourra faire un raisonnement par récurrence*.)
   (c) Calculer $J_n^{(n)}(0)$.
   (d) En déduire l'existence de $\alpha > 0$ tel que $J_n(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \alpha]$.

   Par la suite, pour toute application f définie sur $]0, \alpha]$ à valeurs réelles, on notera ϕ_f l'application définie sur $]0, \alpha]$ par : $f = J_n \phi_f$.

2. Vérifier qu'il existe une équation différentielle du premier ordre, notée (ε_n), telle que :
   y est solution de (E_n) sur $]0, \alpha]$ si et seulement si $\dfrac{d\phi_y}{dx}$ est solution de (ε_n) sur $]0, \alpha]$.

3. Établir l'existence d'une application ψ_n définie, continue et bornée sur $]0, \alpha]$ telle que (ε_n) s'écrive :
$$z' = \left(-\frac{2n+1}{x} + \psi_n(x)\right) z. \qquad (\varepsilon_n)$$

4. (a) Exprimer la solution générale z de (ε_n) sous forme intégrale.
   (b) En déduire l'existence d'une solution y_n de (E_n) définie sur $]0, \alpha]$ telle que :
$$\frac{d\phi_{y_n}}{dx}(x) = -\frac{1}{x^{2n+1}}(1 + \zeta_n(x)),$$
   où ζ_n est une application définie, continue et bornée sur $]0, \alpha]$ telle que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \zeta_n(x) = 0$.
   (c) Dans le cas $n = 0$, montrer que y_0 vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y_0(x) = +\infty$.
   (d) Dans le cas $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que y_n vérifie $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y_n(x) = +\infty$.

5. Établir alors l'existence d'une application N_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$, solution de (E_n) sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} N_n(x) = +\infty.$$

6. Déterminer l'ensemble V des solutions de (E_n), définies sur $\mathbb{R}_+^*$, qui sont bornées.

4^{ème} Partie

Un développement en série de FOURIER

Soient f et g les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodiques de période 2, telle que
$$\forall\, x \in [-1, 1[,\ f(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x f(t)dt - x\int_0^1 f(t)dt.$$

On note $\Big((a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}, (b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}\Big)$ et $\Big((a_n(g))_{n\in\mathbb{N}}, (b_n(g))_{n\in\mathbb{N}^*}\Big)$ les coefficients de Fourier de f et g respectivement. On rappelle que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$.

1. Après avoir justifié la nullité des suites $(a_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$, établir une relation entre les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(g)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^\pi \cos(x\ \sin\theta)\cos\theta\, d\theta = 0$.

3. (a) Établir que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ J_1(x) = \frac{2x}{\pi}\int_0^1 \cos(xt)\sqrt{1-t^2}\, dt.$$
   (b) Exprimer les coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ à l'aide de valeurs prise par la fonction J_1.

4. (a) À l'aide des résultats obtenus à la $2^{\text{ème}}$ partie, établir que $a_n(f) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$.
   (b) En déduire la convergence uniforme de la série de Fourier de f.

5. (a) Montrer que g est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier le fait que g soit égale à la somme de sa série de Fourier.

6. En justifiant soigneusement votre réponse, conclure que f est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier.

$5^{\text{ème}}$ Partie
Transformée de LAPLACE de J_0

1. Établir que, pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto J_0(t)e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   On définit alors l'application F par $F(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}\, dt$ pour tout $p > 0$.

2. Soit a un réel positif et p un réel strictement positif. Établir les majorations :
$$\left|\int_a^{+\infty} J_0(t)e^{-pt}\, dt\right| \leqslant \frac{e^{-ap}}{p},$$
$$\forall\ \theta \in [0,\pi],\ \left|\int_a^{+\infty} e^{-pt}\cos(t\sin\theta)\, dt\right| \leqslant \frac{e^{-ap}}{p}.$$

3. En déduire l'égalité :
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*,\ F(p) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt}\cos(t\sin\theta)\, dt\right) d\theta.$$

4. Prouver la formule :
$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*,\ F(p) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{p}{p^2 + sin^2\theta}\, d\theta,$$
   et en déduire une expression simple de F.

FIN DE L'ÉPREUVE