

SESSION 2000

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

corrigé par Gilles Deruelle.

Première Partie

1. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+2)} = 0$$

ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n X^n$ est égal à $+\infty$.

On en déduit que celui de la série entière $\sum u_n x^{2n}$ est égal à $+\infty$. G apparaît donc comme le produit de cette série entière par la fonction $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ qui est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ .

2.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad xG'(x) + \frac{3}{2}G(x) &= x \left(x^{\frac{3}{2}} \cdot \sum_{n \geq 0} u_n x^{2n} \right)' + \frac{3}{2} \sum_{n \geq 0} u_n x^{2n + \frac{3}{2}} \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{3}{2}} \sum_{n \geq 0} u_n x^{2n} + x^{\frac{5}{2}} \sum_{n \geq 1} 2n u_n x^{2n-1} + \frac{3}{2} \sum_{n \geq 0} u_n x^{2n + \frac{3}{2}} \\ &= x^{\frac{3}{2}} \left(3 \sum_{n \geq 0} u_n x^{2n} + \sum_{n \geq 1} 2n u_n x^{2n} \right) = x^{\frac{3}{2}} \left(3u_0 + \sum_{n \geq 1} (2n+3) u_n x^{2n} \right) \\ &= x^{\frac{3}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \sqrt{x} \sin x . \end{aligned}$$

Deuxième Partie

1. (a) $\forall t \in [0, 1], K(0, t) = 0$. On en déduit que $Tf(0) = 0$. On a par ailleurs :

$$\forall x \in]0, 1], \quad Tf(x) = \int_0^x K(x, t) f(t) dt + \int_x^1 K(x, t) f(t) dt = \frac{1}{x} \int_0^x t^2 f(t) dt + x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt \quad (\star).$$

Cela donne la majoration :

$$\forall x \in]0, 1], \quad |Tf(x)| \leq \|f\|_{\infty} \left[\frac{1}{x} \int_0^x t^2 dt + x^2 \int_x^1 \frac{dt}{t} \right] = \|f\|_{\infty} \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \ln x \right] .$$

On en déduit la continuité de Tf en $x = 0$.

(b) La linéarité de l'opérateur T découle de la linéarité de l'intégrale. Par ailleurs (\star) montre, pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, la continuité de Tf sur $]0, 1]$. Enfin grâce au **1.(a)**: $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1]), Tf \in \mathcal{C}([0, 1])$. En conclusion T est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}([0, 1])$.

2. T n'est pas surjectif : la question 1.(a) a montré que pour tout $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, $Tf(0) = 0$; or une fonction de $\mathcal{C}([0, 1])$ ne s'annule pas nécessairement à l'origine.

3. (a) On a déjà montré ce résultat à la question 1.(a).

(b) (★) montre sans difficulté que F est de classe C^1 sur $]0, 1]$. On obtient précisément :

$$\forall x \in]0, 1], F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x t^2 f(t) dt + 2x \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt . (\star\star)$$

D'où la majoration :

$$\forall x \in]0, 1], |F'(x)| \leq \|f\|_\infty \left[\frac{x^2}{3} - 2x \ln x \right] .$$

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = 0$, puis classiquement par le théorème de "prolongement C^1 ",

que F est de classe C^1 sur $[0, 1]$ avec $F'(0) = 0$.

(★) et (★★) montrent que $F(1) + F'(1) = 0$.

(c) En dérivant (★★) il vient :

$$\forall x \in]0, 1], F''(x) = \frac{2}{x^3} \int_0^x t^2 f(t) dt + 2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt - 3f(x) .$$

On en déduit grâce à (★) :

$$\forall x \in]0, 1], F''(x) = \frac{2}{x^2} \left[\frac{1}{x} \int_0^x t^2 f(t) dt + x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt \right] - 3f(x) = \frac{2}{x^2} F(x) - 3f(x) .$$

4. (a) Exprimons que $x \mapsto x^\lambda$ est solution de (E_0) :

$$\forall x \in]0, 1], \lambda(\lambda - 1)x^2 x^{(\lambda-1)(\lambda-2)} - 2x^\lambda = x^\lambda \left[\lambda(\lambda - 1)x^{(\lambda-2)^2} - 2 \right] = 0 .$$

La seule possibilité est $\lambda = 2$.

(b) $x \mapsto x^2$ ne s'annulant pas sur $]0, 1]$, cherchons une autre solution sous la forme $y = x^2 z$. On est alors ramené à résoudre :

$$Z = z' \quad \text{et} \quad xZ' + 4Z = 0 .$$

On obtient : $Z = \frac{\text{Cste}}{x^4} = z'$, puis $z = \frac{\text{Cste}}{x^3} + \text{Cste}$.

Une solution de (E_0) indépendante de $x \mapsto x^2$ est par exemple : $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Toute solution de (E_0) sur $]0, 1]$ s'écrit alors sous la forme :

$$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \quad \text{où} \quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R} .$$

(c) D'après ce qui précède, f étant donnée, Tf est bien solution du problème posé. Il s'agit donc de montrer que c'est la seule. Supposons pour cela que F et G soient solutions. Alors $F - G$ est solution de (E_0) et en conséquence il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F(x) - G(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} .$$

Le fait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) - G(x) = 0$ implique que $\beta = 0$. Il vient alors $F(x) - G(x) = \alpha x^2$, puis

$F(1) - G(1) + F'(1) - G'(1) = \alpha + 2\alpha = 0$ entraîne que $\alpha = 0$. Finalement $F = G$.

5. Soit λ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associé. $Tf = \lambda f$ est alors solution du problème énoncé à la question 4.(c). En particulier :

$$\forall x \in]0, 1], \lambda f''(x) - \frac{2}{x^2} \lambda f(x) = -3f(x).$$

Ce qui donne :

$$\forall x \in]0, 1], \lambda x^2 f''(x) + (3x^2 - 2\lambda) f(x) = 0.$$

Les autres conditions du problème, étant vérifiées par λf , le sont par f .

Réciproquement, on montre par un calcul similaire que si f est une solution non identiquement nulle du problème posé dans cette question ($\lambda \neq 0$), λf est solution de celui posé à la question 4.(c) : Tf étant l'unique solution de ce problème, on obtient : $Tf = \lambda f$ avec $f \neq 0$. Ce qui montre que f est valeur propre de T associé à la valeur propre λ .

Troisième Partie.

1. et 2. Exprimons donc qu'une série entière $\sum a_n x^n$ est solution de (E_λ) sur $] -R, R[$:

$$\begin{aligned} \forall x \in] -R, R[, \lambda x^2 \sum_{n \geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2} + 3x^2 \sum_{n \geq 0} a_n x^n - 2\lambda \sum_{n \geq 0} a_n x^n \\ = -2\lambda(a_0 + a_1 x) + \sum_{n \geq 2} \lambda[n(n-1) - 2] a_n x^n + 3 \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n \\ = -2\lambda(a_0 + a_1 x) + \sum_{n \geq 2} [\lambda(n+1)(n-2) a_n + 3a_{n-2}] x^n = 0. \end{aligned}$$

Cela exige que $a_0 = a_1 = 0$. On en déduit que tous les coefficients de rang impair sont nuls. Par ailleurs a_2 peut être choisi arbitrairement et l'on a :

$$\forall n \geq 2, a_{2n} = \frac{-3}{\lambda(2n+1)(2n-2)} a_{2n-2},$$

d'où l'on tire :

$$\forall n \geq 1, a_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!} a_2.$$

La condition $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro est vérifiée pour $a_2 = 1$. La seule série entière qui répond à la question est alors :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} 3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!} x^{2n} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n(2n+3)(2n+1)!} x^{2n+2}.$$

On vérifie sans difficulté que son rayon de convergence est égal à $+\infty$.

On obtient ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_\lambda(x) = \sqrt{x} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n(2n+3)(2n+1)!} x^{2n+\frac{3}{2}} = \sqrt{x} 3^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{3}{4}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!} \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x \right)^{2n+\frac{3}{2}},$$

c'est à dire :

$$f_\lambda(x) = (3\lambda^3)^{\frac{1}{4}} \sqrt{x} G \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x \right).$$

3. (a) Cela découle directement de $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro.
- (b) Classiquement on cherche une solution de (E_λ) sur $]0, a]$ sous la forme $y = f_\lambda z$; un calcul sans difficulté montre que $Z = z'$ est solution de :

$$2f'_\lambda Z + f_\lambda Z' = 0 .$$

- (c) On obtient alors : $Z = z' = \frac{\text{Cste}}{f_\lambda^2}$, puis $y(x) = f_\lambda(x) \cdot \int_x^\star \frac{\text{Cste}}{f_\lambda^2(t)} dt$.

La fonction positive $t \mapsto \frac{1}{f_\lambda^2(t)}$ n'étant pas intégrable sur $]0, \star]$, on obtient par "intégration des relation de comparaison" , au voisinage de zéro :

$$y(x) \sim x^2 \int_x^\star \frac{dt}{t^4} \sim \frac{\text{Cste}}{x} .$$

Ceci montre qu'il existe une solution y_λ de (E_λ) sur $]0, a]$ vérifiant au voisinage de zéro :

$$y_\lambda(x) \sim \frac{1}{x} .$$

Les solutions maximales de l'équation différentielle $\lambda y'' + \frac{3x^2 - 2\lambda}{x^2} y = 0$ sont définies sur $]0, +\infty[$ ou sur $] - \infty, 0[$. Le résultat d'existence et d'unicité de telles solutions montre que y_λ se prolonge de façon unique en une solution sur $]0, +\infty[$ de (E_λ) . En particulier il existe une solution g_λ sur $]0, 1]$ qui prolonge y_λ .

4. (a) Les équivalents respectifs de f_λ et g_λ au voisinage de zéro montrent que ces deux fonctions ne peuvent être colinéaires.

- (b) Toute solution de (E_λ) sur $]0, 1]$ s'écrit sous la forme :

$$\alpha f_\lambda + \beta g_\lambda, \quad \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 .$$

- (c) Soit $h = \alpha f_\lambda + \beta g_\lambda$. La condition $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$ exige clairement $\beta = 0$. Réciproquement ...

5. (a) Utilisons la caractérisation de la question **II-5** : soit λ une valeur propre non nulle de T ; il existe alors une solution non identiquement nulle de (E_λ) sur $]0, 1]$ qui tend vers zéro à l'origine. D'après la question 4.(c), cette solution est proportionnelle à f_λ .

Voyons ce qu'entraîne la condition $f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) = 0$:

$$f'_\lambda(x) = K_\lambda \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} G \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x \right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}} \sqrt{x} G' \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x \right) \right] ,$$

donne :

$$\begin{aligned} f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) &= K_\lambda \left[G \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} \right) + \frac{1}{2} G \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} \right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}} G' \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} \right) \right] \\ &= K_\lambda \left[\sqrt{\frac{3}{\lambda}} G' \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} \right) + \frac{3}{2} G \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} \right) \right] = K_\lambda \left(\frac{3}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \sin \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} \right) = 0 . \end{aligned}$$

λ est donc nécessairement de la forme :

$$\lambda = \frac{3}{k^2 \pi^2} = \lambda_k \quad \text{avec } k \in \mathbb{N}^* .$$

- (b) Le calcul effectué dans la question précédente montre que si $\lambda = \lambda_k$, f_{λ_k} , qui est solution de (E_{λ_k}) , vérifie bien les conditions requises (cf. question **II-5**) ... : λ_k est valeur propre de T , pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- (c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est d'après ce qui précède $\text{Vect}(f_{\lambda_k})$.

Quatrième Partie

1. On obtient sans difficulté :

$$\forall (f, g) \in E, (Tf, g) = (f, Tg) = \int \int_{[0,1] \times [0,1]} K(x, y) f(y) g(x) dx dy.$$

2. (a) On a :

$$f_{\lambda_k}(x) = K_{\lambda_k} \sqrt{x} G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda_k}} x\right) = K_{\lambda_k} \sqrt{x} G(k\pi x) = (3\lambda_k^3)^{\frac{1}{4}} h_k(x) = \frac{3}{(k\pi)^{\frac{3}{2}}} h_k(x).$$

D'où :

$$Th_k = \lambda_k h_k = \frac{3}{k^2 \pi^2} h_k.$$

- (b) Il vient pour k et $m \in \mathbb{N}^*$ distincts :

$$(Th_k, h_m) = \lambda_k (h_k, h_m) = (h_k, Th_m) = \lambda_m (h_k, h_m)$$

qui montre que la famille $(h_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est orthogonale.

On en déduit que la famille $(\Phi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

3. (a) La fonction f est 2π périodique, continue, C^1 par morceaux et paire : le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que f est la somme de sa série de Fourier.

On a :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) dt = \frac{4}{3}$$

et

$$\forall n \geq 1, a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos nt dt = \frac{-2}{\pi^3} \int_0^\pi t^2 \cos nt dt = \frac{-2}{\pi^3} \cdot \frac{-2}{n} \int_0^\pi t \sin nt dt = \frac{4}{\pi^3 n} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{n} \pi.$$

On obtient finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos nt.$$

- (b) Parseval donne :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f^2(t) dt = \frac{8}{15} = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} a_n(f)^2 = \frac{4}{9} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

D'où :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{8}{15} - \frac{4}{9} \right) = \frac{\pi^4}{8} \cdot \frac{4}{45} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(c) Un calcul direct donne :

$$\int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t) dx dt = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{t^4}{x^2} dt + \int_x^1 \frac{x^4}{t^2} dt \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{5} + x^3 - x^4 \right) dx = \frac{1}{10} .$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k \geq 1} \lambda_k^2 = \frac{9}{\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^4} = \frac{9}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{10} .$$

4. (a) On observera que pour tout $x \in [0, 1]$, $K_x \in \mathcal{C}([0, 1])$. On a :

$$K_{N,x} = \sum_{k=1}^N (\Phi_k, K_x) \Phi_k = \sum_{k=1}^N \left(\int_0^1 K(x, t) \Phi_k(t) dt \right) \Phi_k = \sum_{k=1}^N T \Phi_k(x) \cdot \Phi_k = \sum_{k=1}^N \lambda_k \Phi_k(x) \cdot \Phi_k$$

(b) Il vient :

$$\begin{aligned} \|K_x - K_{N,x}\|^2 &= \|K_x\|^2 - \|K_{N,x}\|^2 \\ &= \int_0^1 K^2(x, t) dt - \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \Phi_k^2(x) . \end{aligned}$$

Puis :

$$\int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2 dx = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t) dx dt - \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 \int_0^1 \Phi_k^2(x) dx = \int_0^1 \int_0^1 K^2(x, t) dx dt - \sum_{k=1}^N \lambda_k^2 .$$

D'après ce qui précède, cette quantité admet pour limite zéro quand N tend vers $+\infty$.

(c) On a donc :

$$\forall x \in [0, 1] , F(x) = \int_0^1 K_x(t) f(t) dt = (K_x, f) = (K_{N,x}, f) + (K_x - K_{N,x}, f)$$

et

$$(\Phi_k, F) = (\Phi_k, T f) = (T \Phi_k, f) = \lambda_k (\varphi_k, f)$$

qui entraînent pour $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x \in [0, 1] , F(x) - \sum_{k=1}^N (\Phi_k, F) \Phi_k(x) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \Phi_k(x) (\Phi_k, f) - \sum_{k=1}^N \lambda_k (\Phi_k, f) \Phi_k(x) + (K_x - K_{N,x}, f) ,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|F - \sum_{k=1}^N (\Phi_k, F) \Phi_k\|^2 &= \int_0^1 \left(F(x) - \sum_{k=1}^N (\Phi_k, F) \Phi_k(x) \right)^2 dx \\ &\leq \|f\|^2 \cdot \int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2 dx . \end{aligned}$$

La question précédente montre alors que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|F - \sum_{k=1}^N (\Phi_k, F) \Phi_k\|^2 = 0 .$$

* * *