2020 - Centrale-Supélec - MP - Mathématiques 1
Un corrigé

I Quelques résultats utiles.

I.A - Propriétés générales de la loi $*$.

Q1. La fonction δ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}.$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \delta(n) \neq 0 \Leftrightarrow n = 1$. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ une fonction arithmétique.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (\delta * f)(n) &= \sum_{d \mid n} \delta(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d=1} \delta(d) f\left(\frac{n}{d}\right) &= \delta(1) f\left(\frac{n}{1}\right) &= f(n).\\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (f * \delta)(n) &= \sum_{d \mid n} f(d) \delta\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d=n} f(d) \delta\left(\frac{n}{d}\right) &= f(n) \delta\left(\frac{n}{n}\right) &= f(n).\end{aligned}$$

Pour toute fonction arithmétique f, on a $\boxed{\delta * f = f * \delta = f}$ donc $\boxed{\delta \text{ est un élément neutre pour la loi } *.}$

Q2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application

$$\Psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n & \to & \mathcal{C}_n \\ d & \mapsto & \left(d, \dfrac{n}{d}\right) \end{array} \right.$$

est une bijection de $\mathcal{D}_n$ sur $\mathcal{C}_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2, d_1 d_2 = n\}$. Donc

$$(f * g)(n) = \sum_{d \in \mathcal{D}_n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d_1, d_2) = \Psi(d), d \in \mathcal{D}_n} f(d_1) g(d_2) = \boxed{\sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}_n} f(d_1) g(d_2).}$$

Q3. Soient f et g deux fonctions arithmétiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque $\{(d_1, d_2), (d_1, d_2) \in \mathcal{C}_n\} = \{(d_2, d_1), (d_1, d_2) \in \mathcal{C}_n\}$, on a :

$$(f * g)(n) = \sum_{(d_1, d_2) \in \mathcal{C}_n} f(d_1) g(d_2) = \sum_{(d_2, d_1) \in \mathcal{C}_n} f(d_1) g(d_2) = \sum_{(d_2, d_1) \in \mathcal{C}_n} g(d_2) f(d_1) = (g * f)(n).$$

Pour toutes fonctions arithmétiques f et g, on a $\boxed{f * g = g * f}$ donc $\boxed{\text{la loi } * \text{ est commutative.}}$

Q4. On considère $\mathcal{C}'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3, d_1 d_2 d_3 = n\}$. Soient f, g et h trois fonctions arithmétiques. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$[(f * g) * h](n) = \sum_{d \mid n} (f * g)(d) h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \sum_{k \mid d} f(k) g\left(\frac{d}{k}\right) h\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d_1, d_2, d_3) \in \mathcal{C}'_n} f(d_1) g(d_2) h(d_3).$$

De même,

$$[f * (g * h)](n) = [(g * h) * f](n) = \sum_{d \mid n} (g * h)(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \sum_{k \mid d} g(k) h\left(\frac{d}{k}\right) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d_1, d_2, d_3) \in \mathcal{C}'_n} f(d_1) g(d_2) h(d_3).$$

Ainsi $\boxed{(f * g) * h = f * (g * h)}$ et $\boxed{* \text{ est associative.}}$

Q5. On considère l'ensemble $\mathbb{A}$ muni des lois $+$ et $*$.

- $(\mathbb{A}, +)$ est un groupe.
- $* : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{A} \times \mathbb{A} & \to & \mathbb{A} \\ (f, g) & \mapsto & f * g \end{array} \right.$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{A}$.
- D'après la question **Q4.**, $*$ est associative.
- D'après la question **Q1.**, $*$ admet un élément neutre δ.
- $*$ est distributive à gauche et à droite par rapport à $+$.

Ainsi $(\mathbb{A}, +, *)$ est un anneau. De plus, $*$ est commutative (question **Q3.**). Donc $\boxed{(\mathbb{A}, +, *) \text{ est un anneau commutatif.}}$

I.B - Groupe des fonctions multiplicatives.

Q6. Soit f une fonction multiplicative. Alors $f(1) = f(1)^2$ donc $f(1)$ vaut 0 ou 1, or $f(1) \neq 0$ donc $\boxed{f(1) = 1.}$
Soient f et g deux fonctions multiplicatives telles que $\forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, f(p^k) = g(p^k)$.
On a donc $f(1) = g(1) = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$. D'après le théorème sur la décomposition en facteurs premiers d'un entier,

$$\exists! k \in \mathbb{N}, \quad \exists!(p_1, \dots, p_k) \in \mathcal{P}^k, \text{les } p_i \text{ étant deux à deux distincts}, \quad \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k, \quad n = (p_1)^{\alpha_1} \dots (p_k)^{\alpha_k}.$$

Pour $i \neq j$, on a $p_i \neq p_j$, donc $(p_i)^{\alpha_i} \wedge (p_j)^{\alpha_j} = 1$. En utilisant que les fonctions f et g sont multiplicatives, on en déduit que $f((p_i)^{\alpha_i}(p_j)^{\alpha_j}) = f((p_i)^{\alpha_i})f((p_j)^{\alpha_j})$. Par une récurrence immédiate, il vient :

$$f(n) = f\left(\prod_{i=1}^{k}(p_i)^{\alpha_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} f\Big((p_i)^{\alpha_i}\Big) = \prod_{i=1}^{k} g\Big((p_i)^{\alpha_i}\Big) = g\left(\prod_{i=1}^{k}(p_i)^{\alpha_i}\right) = g(n).$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = g(n)$.
$\boxed{\text{Soient } f \text{ et } g \text{ multiplicatives. Alors} \quad (\forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, f(p^k) = g(p^k)) \quad \Rightarrow \quad f = g.}$

Q7. Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, premiers entre eux.

- Montrons que π est bien définie. Soit $d_1 \in \mathcal{D}_n$ et $d_2 \in \mathcal{D}_m$. Alors $\exists a \in \mathbb{N}^*, n = ad_1$ et $\exists b \in \mathbb{N}^*, m = bd_2$, d'où

$$mn = (ad_1)(bd_2) = (ab)(d_1 d_2),$$

  donc $d_1 d_2$ est un diviseur de mn et $d_1 d_2 \in \mathcal{D}_{mn}$. Donc $\boxed{\pi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m & \to & \mathcal{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) & \mapsto & d_1 d_2 \end{array} \right. \text{ est bien définie.}}$

- Montrons que π est surjective.
  Soit $d \in \mathcal{D}_{mn}$. Alors d divise mn.
  D'après le théorème sur la décomposition en facteurs premiers d'un entier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \exists! k \in \mathbb{N}, \\ \exists!(p_1, \dots, p_k) \in \mathcal{P}^k, \text{les } p_i \text{ étant deux à deux distincts}, \\ \exists!(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k, \end{cases} \quad n = (p_1)^{\alpha_1} \dots (p_k)^{\alpha_k}.$$

  On écrit la décomposition de n et m en facteurs premiers : $n = (p_1)^{\alpha_1} \dots (p_k)^{\alpha_k}$ et $m = (q_1)^{\beta_1} \dots (q_l)^{\beta_l}$.
  n et m sont premiers entre eux donc $\{p_1, \dots, p_k\} \cap \{q_1, \dots, q_l\} = \emptyset$.
  d divise mn donc est de la forme :

$$d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \prod_{j=1}^{l} q_j^{b_j} \qquad \text{avec } 0 \leq a_i \leq \alpha_i \text{ et } 0 \leq b_j \leq \beta_j.$$

  En posant $d_1 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \in \mathcal{D}_n$ et $d_2 = \prod_{j=1}^{l} q_i^{b_j} \in \mathcal{D}_m$, on a $d = d_1 d_2 = \pi(d_1, d_2)$ donc π est surjective.

- Montrons que π est injective. Soit $(d_1, d_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$ et $(e_1, e_2) \in \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m$, tels que $\pi(d_1, d_2) = \pi(e_1, e_2)$. Alors $d_1 d_2 = e_1 e_2$.
  Soit d un diviseur commun de d_1 et e_2. d_1 est un diviseur de n et e_2 est un diviseur de m donc d est un diviseur commun de n et m. Or $n \wedge m = 1$ donc $d = 1$.
  Donc $d_1 \wedge e_2 = 1$ et d_1 divise $e_1 e_2$. Ainsi d_1 divise e_1.
  Par symétrie des rôles joués par d_1 et e_1, on montre de même que e_1 divise d_1.
  On a donc $d_1, e_1 \in \mathbb{N}^*$, avec $d_1 | e_1$ et $e_1 | d_1$, donc $d_1 = e_1$.
  La relation $d_1 d_2 = d_1 e_2$ nous donne $d_2 = e_2$.
  Finalement $(d_1, e_1) = (d_2, e_2)$ et $\boxed{\pi \text{ est injective.}}$

Ainsi $\boxed{\pi \text{ est bien définie et bijective de } \mathcal{D}_n \times \mathcal{D}_m \text{ sur } \mathcal{D}_{mn}.}$

Q8. Soient f et g deux fonctions multiplicatives. Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux.
Soit $d_1 \in \mathcal{D}_n$ et $d_2 \in \mathcal{D}_m$, alors $d_1 \wedge d_2 = 1$. Puisque f est multiplicative, $f(d_1 d_2) = f(d_1)f(d_2)$.
De même, $\dfrac{n}{d_1} \in \mathcal{D}_n$ et $\dfrac{m}{d_2} \in \mathcal{D}_m$ donc $\dfrac{n}{d_1} \wedge \dfrac{m}{d_2} = 1$. Puisque g est multiplicative, $g\left(\dfrac{n}{d_1}\dfrac{m}{d_2}\right) = g\left(\dfrac{n}{d_1}\right) g\left(\dfrac{m}{d_2}\right)$.
Il vient alors, en utilisant la bijection π :

$$\begin{aligned}
(f*g)(nm) &= \sum_{d\in\mathcal{D}_{nm}} f(d)g\left(\frac{nm}{d}\right)\\
&= \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}_n\times\mathcal{D}_m} f(d_1d_2)g\left(\frac{n}{d_1}\frac{m}{d_2}\right)\\
&= \sum_{(d_1,d_2)\in\mathcal{D}_n\times\mathcal{D}_m} f(d_1)f(d_2)g\left(\frac{n}{d_1}\right)g\left(\frac{m}{d_2}\right)\\
&= \left[\sum_{d_1\in\mathcal{D}_n} f(d_1)g\left(\frac{n}{d_1}\right)\right]\left[\sum_{d_2\in\mathcal{D}_m} f(d_2)g\left(\frac{n}{d_2}\right)\right]\\
&= (f*g)(n)\ (f*g)(m).
\end{aligned}$$

Donc $f*g$ est multiplicative.
$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux fonctions multiplicatives, alors } f*g \text{ est encore multiplicative.}}$

Q9. Soit f une fonction multiplicative. On définit une fonction arithmétique $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ par récurrence en posant :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
g(1) &=& 1.\\
\forall p\in\mathcal{P}, \forall k\in\mathbb{N}^*,\quad g(p^k) &=& -\displaystyle\sum_{i=1}^{k} f(p^i)g(p^{k-i}).
\end{array}\right.$$

Alors g est bien définie sur tous les p^k.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, dont la décomposition en facteurs premiers est : $m = \displaystyle\prod_{i=1}^{k}(p_i)^{\alpha_i}$, on pose $g(m) = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} g(p^i)$.

Montrons que g est multiplicative. Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, premiers entre eux.
On écrit la décomposition de m et n en facteurs premiers : $m = (p_1)^{\alpha_1}\dots(p_k)^{\alpha_k}$ et $n = (q_1)^{\beta_1}\dots(q_l)^{\beta_l}$.
m et n sont premiers entre eux donc $\{p_1,\dots,p_k\} \cap \{q_1,\dots,q_l\} = \emptyset$.

$$g(mn) = g\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\prod_{j=1}^{l} q_j^{\beta_j}\right) = \prod_{i=1}^{k} g(p_i^{\alpha_i})\prod_{j=1}^{l} g(q_j^{\alpha_j}) = g\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\right) g\left(\prod_{j=1}^{l} q_j^{\alpha_j}\right) = g(m)g(n).$$

Donc $\boxed{g \text{ est multiplicative.}}$
Soit $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Les diviseurs de p^k sont : $\mathcal{D}_{p^k} = \{p^i, 0 \le i \le k\}$. D'où :

$$\begin{aligned}
(f*g)(p^k) &= \sum_{d|p^k} f(d)g\left(\frac{p^k}{d}\right) &&= \sum_{i=0}^{k} f(p^i)g\left(\frac{p^k}{p^i}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{k} f(p^i)g(p^{k-i}) &&= f(1)g(p^k) + \sum_{i=1}^{k} f(p^i)g(p^{k-i})\\
&= g(p^k) - g(p^k) &&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\forall p\in\mathcal{P}, \forall k\in\mathbb{N}^*,\quad (f*g)(p^k) = \delta(p^k) = 0.}$
D'après la question **Q6.**, puisque les fonctions $f*g$ et δ sont multiplicatives, on en déduit que $\boxed{f*g = \delta.}$

Q10. On considère l'ensemble $\mathbb{M}$ muni de $*$.

- D'après la question **Q8.**, si $f \in \mathbb{M}$ et $g \in \mathbb{M}$, alors $f*g \in \mathbb{M}$.
  Donc $* : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{M}\times\mathbb{M} & \to & \mathbb{M}\\ (f,g) & \mapsto & f*g \end{array}\right.$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{M}$.
- D'après la question **Q4.**, $*$ est associative.
- D'après la question **Q1.**, $*$ admet un élément neutre δ.

- D'après la question **Q8.**, tout élément $f \in \mathbb{M}$ admet un inverse. En effet, $\exists g \in \mathbb{M}, f * g = g * f = \delta$.

Ainsi $(M, *)$ est un groupe. De plus, $*$ est commutative (question **Q3.**).
Donc $\boxed{(\mathbb{M}, *) \text{ est un groupe abélien (ou commutatif).}}$

I.C - La fonction de Möbius.

Q11. La fonction de Möbius est définie par :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1. \\ (-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres premiers distincts.} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, premiers entre eux.

- Si $m = 1$, alors $\mu(m) = 1$ donc $\mu(mn) = \mu(n) = 1 \times \mu(n) = \mu(m)\mu(n)$.
- Si $n = 1$, on procède de même et $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.
- Supposons que $m \neq 1$ et $n \neq 1$.
  Soit $m = (p_1)^{\alpha_1} \dots (p_k)^{\alpha_k}$ et $n = (q_1)^{\beta_1} \dots (q_l)^{\beta_l}$ la décomposition en facteurs premiers de m et n.
  Puisque $m \wedge n = 1$, on a $\{p_1, \dots, p_k\} \cap \{q_1, \dots, q_l\} = \emptyset$.
  - ⋆ Supposons que soit m, soit n contient plusieurs fois le même nombre premier p dans sa décomposition.
    Alors $\mu(m) = 0$ ou $\mu(n) = 0$ donc le produit est nul : $\mu(m)\mu(n) = 0$.
    De plus, mn contient plusieurs fois le même nombre premier p dans sa décomposition, donc $\mu(mn) = 0$. Dans ce cas, on a donc $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n) = 0$.
  - ⋆ Supposons que m et n contiennent chaque nombre premier une seule fois. m et n s'écrivent donc :

$$\begin{cases} m &= p_1 \dots p_k. \\ n &= q_1 \dots q_l. \\ mn &= p_1 \dots p_k q_1 \dots q_l. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(m) &= (-1)^k. \\ \mu(n) &= (-1)^l. \\ \mu(mn) &= (-1)^{k+l} = (-1)^k(-1)^l = \mu(m)\mu(n). \end{cases}$$

On a $\mu(1) = 1$ et $m \wedge n = 1 \Rightarrow \mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$, donc $\boxed{\mu \text{ est multiplicative.}}$

Q12. Soit $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Les diviseurs de p^k sont : $\mathcal{D}_{p^k} = \{p^i, 0 \leq i \leq k\}$.
On a $\mu(1) = 1, \mu(p) = (-1)$ et $\mu(p^k) = 0$ si $k \geq 2$. D'où :

$$(\mu * \mathbf{1})(p^k) = \sum_{d \mid p^k} \mu(d)\mathbf{1}\left(\frac{p^k}{d}\right) = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i) \times 1 = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i) = \mu(1) + \mu(p) + 0 = 1 + (-1) = 0.$$

Les fonctions μ et $\mathbf{1}$ sont multiplicatives. D'après la question **Q8.**, $\mu * \mathbf{1}$ est encore multiplicative.
On a montré que $\boxed{\forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (\mu * \mathbf{1})(p^k) = \delta(p^k) = 0.}$
D'après la question **Q6.**, puisque les fonctions $\mu * \mathbf{1}$ et δ sont multiplicatives, on en déduit que $\boxed{\mu * \mathbf{1} = \delta.}$

Q13. Soit $f \in \mathbb{A}$ et $F \in \mathbb{A}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, F(n) = \sum_{d \mid n} f(d)$. Calculons $f * \mathbf{1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(f * \mathbf{1})(n) = \sum_{d \mid n} f(d)\mathbf{1}\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} f(d) \times 1 = \sum_{d \mid n} f(d) = F(n).$$

On a donc $\boxed{f * \mathbf{1} = F.}$
D'après la question **Q12.**, $\mu * \mathbf{1} = \delta$.
D'après la question **Q1.**, δ est l'élément neutre pour $*$. En composant par μ :

$$f = f * \delta = (f * \mathbf{1}) * \mu = F * \mu = \mu * F.$$

Ainsi $\boxed{f = \mu * F}$ ce qui équivaut à $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).}$

Q14. • Montrons que la fonction indicatrice d'Euler φ est multiplicative.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ l'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. D'après le cours,

$$\varphi(n) = \text{Card}\{i \in [|1, p^k|], \quad i \wedge p^k = 1\} = \text{Card}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})).$$

Soit $(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, premiers entre eux. Par le théorème chinois, on a :

$$\begin{array}{rrcll} & \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \simeq & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}. & \\ \Rightarrow & \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) & \simeq & \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) & = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})) \times \mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}). \\ \Rightarrow & \varphi(mn) = \mathcal{U}(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}) & = & \text{Card}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))) \times \text{Card}(\mathcal{U}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})) & = \varphi(m)\varphi(n). \end{array}$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est multiplicative.}}$

• Soit $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculons $\varphi(p^k)$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(p^k) & = & \text{Card}\{i \in [|1, p^k|], \quad i \wedge p^k = 1\} \\ & = & p^k - \text{Card}\{i \in [|1, p^k|], \quad i \wedge p^k \neq 1\} \\ & = & p^k - \text{Card}\{i \in [|1, p^k|], \quad p \text{ divise } i\} \\ & = & p^k - p^{k-1}. \end{array}$$

En effet, pour $i \in i \in [|1, p^k|]$, p divise i si et seulement si $\exists l \in [|1, p^{k-1}|], i = pl$ et il y a p^{k-1} tels entiers i.

• Soit $p \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Les diviseurs de p^k sont : $\mathcal{D}_{p^k} = \{p^i, 0 \leq i \leq k\}$.
On a $\mu(1) = 1, \mu(p) = (-1)$ et $\mu(p^k) = 0$ si $k \geq 2$. D'où :

$$(\mu * \mathbf{I})(p^k) = \sum_{d|p^k} \mu(d)\mathbf{I}\left(\frac{p^k}{d}\right) = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i)\frac{p^k}{p^i} = \sum_{i=0}^{k} \mu(p^i)p^{k-i} = \mu(1)p^k + \mu(p)p^{k-1} + 0 = p^k - p^{k-1}.$$

• On a montré que $\boxed{\forall p \in \mathcal{P}, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (\mu * \mathbf{I})(p^k) = \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.}$
D'après la question **Q6.**, puisque les fonctions $\mu * \mathbf{I}$ et φ sont multiplicatives, on en déduit que $\boxed{\mu * \mathbf{I} = \varphi.}$

I.D - Déterminant de Smith.

Q15. Calculons le produit matriciel $M'D^T$. Soit $(i,j) \in [|1,n|]^2$:

$$\begin{array}{rcl} (M'D^T)_{i,j} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (M')_{i,k}(D^T)_{k,j} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} m'_{i,k} d_{j,k} \\ & = & \displaystyle\sum_{k \in [|1,n|], k \text{ divise } j} m'_{i,k} \quad = \quad \sum_{k \in [|1,n|], k \text{ divise } j \text{ et } i} g(k) \\ & = & \displaystyle\sum_{k \text{ divise } (i \wedge j)} g(k). \end{array}$$

• Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n) = \displaystyle\sum_{k|n} g(k)$. D'après la question **Q13.**, $g = \mu * G$.
• D'après l'énoncé, $g = \mu * f$ donc $\mu * G = \mu * f$.
• D'après la question **Q12.**, $\mu * \mathbf{1} = \delta$.
• D'après la question **Q1.**, δ est l'élément neutre pour $*$.
• En composant la relation $\mu * G = \mu * f$ par $\mathbf{1}$, il vient :

$$G = \delta * G = \mathbf{1} * (\mu * G) = \mathbf{1} * (\mu * f) = \delta * f = f,$$

donc $G = f$.
• On peut alors conclure :

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, \quad (M'D^T)_{i,j} = \sum_{k \text{ divise } (i \wedge j)} g(k) = G(i \wedge j) = f(i \wedge j) = m_{i,j} = (M)_{i,j}.$$

On a montré que $\boxed{M'D^T = M.}$

Q16. Puisque $M = M'D^T$, on obtient en prenant le déterminant :

$$\det(M) = \det(M'D^T) = \det(M')\det(D^T) = \det(M')\det(D).$$

D'une part, on remarque que la matrice D vérifie :

- pour $i < j$, j ne divise pas i donc $d_{i,j} = 0$.
- pour $i = j$, j divise i donc $d_{i,i} = 1$.

La matrice D est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale, donc $\boxed{\det(D) = 1.}$
D'autre part, on remarque que la matrice M' vérifie :

- pour $i < j$, j ne divise pas i donc $m'_{i,j} = 0$.
- pour $i = j$, j divise i donc $m'_{i,i} = g(i)$.

La matrice M' est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux valent $m'_{k,k} = g(k)$, donc $\boxed{\det(M') = \prod_{k=1}^{n} g(k).}$

Finalement,

$$\boxed{\det(M) = \det(M')\det(D) = \prod_{k=1}^{n} g(k).}$$

I.E - Séries de Dirichlet.

Q17. Soit $s > A_c(f)$. Par définition de A_c, qui est la borne inférieure des réels pour lesquels la série converge absolument, il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tel que $s_0 < s$ et la série $\sum_{k \geq 1} \frac{f(k)}{k^{s_0}}$ converge absolument. Alors

$$\left| \frac{f(k)/k^s}{f(k)/k^{s_0}} \right| = \frac{1}{k^{s-s_0}} \underset{k \to +\infty}{\to} 0 \quad \text{car} \quad s - s_0 > 0.$$

Puisque $\left|\frac{f(k)}{k^s}\right| = o\left(\left|\frac{f(k)}{k^{s_0}}\right|\right)$, par règle des petits o pour les séries à termes positifs, $\sum \frac{f(k)}{k^s}$ converge absolument.

$$\boxed{\text{Si } s > A_c(f), \text{ alors la série } \sum_{k \geq 1} \frac{f(k)}{k^s} \text{ converge absolument.}}$$

Q18. Soient f et g deux fonctions multiplicatives d'abscisses de convergence finies.
On suppose que $\forall s > \max(A_c(f), A_c(g)), L_f(s) = L_g(s)$. Alors

$$\forall s > \max(A_c(f), A_c(g)), \quad L_f(s) - L_g(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{f(k) - g(k)}{k^s} = 0.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(k) \neq g(k)$. Notons

$$k_0 = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f(k) \neq g(k)\}.$$

Alors

$$0 = L_f(s) - L_g(s) = \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{f(k) - g(k)}{k^s} = \frac{f(k_0) - g(k_0)}{k_0^s} + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{f(k) - g(k)}{k^s}.$$

On multiplie cette égalité par k_0^s :

$$\forall s > \max(A_c(f), A_c(g)), \quad 0 = f(k_0) - g(k_0) + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (f(k) - g(k)) \left(\frac{k_0}{k}\right)^s.$$

On fixe $s_0 > \max(A_c(f), A_c(g))$. Soit $s > s_0$.

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}(f(k)-g(k))\left(\frac{k_0}{k}\right)^s\right| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty}|f(k)-g(k)|\left(\frac{k_0}{k}\right)^s \\
&= \sum_{k=k_0+1}^{+\infty}|f(k)-g(k)|\left(\frac{k_0}{k}\right)^{s_0}\left(\frac{k_0}{k}\right)^{s-s_0} \\
&\leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty}|f(k)-g(k)|\left(\frac{k_0}{k}\right)^{s_0}\left(\frac{k_0}{k_0+1}\right)^{s-s_0} \\
&= \left(\frac{k_0}{k_0+1}\right)^{s-s_0}\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}|f(k)-g(k)|\left(\frac{k_0}{k}\right)^{s_0}.
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\lim_{s\to+\infty}\left(\frac{k_0}{k_0+1}\right)^{s-s_0} = 0$ donc

$$\lim_{s\to+\infty}\left(\sum_{k=k_0+1}^{+\infty}(f(k)-g(k))\left(\frac{k_0}{k}\right)^s\right) = 0.$$

On obtient $f(k_0) - g(k_0) = 0$, ce qui est absurde. Donc $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) = g(k) \text{ et } f = g.}$

Q19. Soient f et g deux fonctions multiplicatives d'abscisses de convergence finies.

Soit $s > \max(A_c(f), A_c(g))$. Alors les deux séries $\displaystyle\sum_{d\geq 1}\frac{f(d)}{d^s}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\frac{g(k)}{k^s}$ convergent absolument.

On en déduit que en posant

$$\forall (d,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad a_{d,k} = \frac{f(d)}{d^s}\frac{g(k)}{k^s},$$

la famille $(a_{d,k})_{(d,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \{(d,k) \in (\mathbb{N}^*)^2, dk = n\}.$$

Alors $(I_n)_{n\geq 1}$ est une partition de $I = (\mathbb{N}^*)^2$:

$$I = \{(d,k) \in (\mathbb{N}^*)^2\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n.$$

En appliquant le théorème de sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
L_f(s)L_g(s) &= \left(\sum_{d=1}^{+\infty}\frac{f(d)}{d^s}\right)\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{g(k)}{k^s}\right) &&= \sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{f(d)g(k)}{(dk)^s} \\
&= \sum_{(d,k)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{f(d)g(k)}{(dk)^s} &&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(d,k)\in I_n}\frac{f(d)g(k)}{(dk)^s} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{(d,k)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ dk=n}\frac{f(d)g(k)}{(dk)^s} &&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{d|n}f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}(f*g)(n) &&= L_{f*g}(s).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall s > \max(A_c(f), A_c(g)), \quad L_f(s)L_g(s) = L_{f*g}(s).}$

II Matrices et endomorphismes de permutation.

II.A - Similitude de deux matrices de permutation.

Q20. • On a $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n}$ où δ désigne le symbole de Kronecker.
Soit $(\rho,\rho') \in \mathfrak{S}_n^2$. Soit $(i,j) \in [|1,n|]^2$:

$$(P_\rho P_{\rho'})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(P_\rho)_{i,k}(P_{\rho'})_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}\delta_{i,\rho(k)}\delta_{k,\rho'(j)} = \sum_{k=\rho'(j)}\delta_{i,\rho(k)} = \delta_{i,\rho\circ\rho'(j)} = P_{\rho\rho'}(i,j)$$

Donc $\boxed{\forall(\rho,\rho')\in\mathfrak{S}_n^2,\quad P_\rho P_{\rho'} = P_{\rho\rho'}.}$

• Soit $\rho \in \mathfrak{S}_n$. Alors l'égalité $\rho\circ\rho^{-1} = \mathrm{Id}_{[|1,n|]}$ montre que

$$P_\rho P_{\rho^{-1}} = P_{\rho\circ\rho^{-1}} = P_{\mathrm{Id}_{[|1,n|]}} = I_n.$$

Donc $\boxed{\forall\rho\in\mathfrak{S}_n,\quad P_\rho \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } (P_\rho)^{-1} = P_{\rho^{-1}}.}$

• Soient deux permutations $(\sigma,\tau)\in\mathfrak{S}_n^2$ qui sont conjuguées. Alors $\exists\rho\in\mathfrak{S}_n$, telle que $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$. D'où

$$P_\tau = P_{\rho\sigma\rho^{-1}} = P_\rho P_\sigma P_{\rho^{-1}} = P_\rho P_\sigma (P_\rho)^{-1}.$$

$\boxed{\text{Si } \tau \text{ et } \sigma \text{ sont conjuguées, alors } P_\tau \text{ et } P_\sigma \text{ sont semblables.}}$

Q21. Ici $n=7$, $\gamma_1 = (1,3,7)$, $\gamma_2 = (2,6,4)$ et $\rho\in\mathfrak{S}_7$ avec $\left\{\begin{array}{lcl}\rho(1) & = & 2.\\ \rho(3) & = & 6.\\ \rho(7) & = & 4.\end{array}\right.$

• Pour $k\in\{2,4,6\}$:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Pour } k=2: & \rho\gamma_1\rho^{-1}(2) & = & \rho\gamma_1(1) = \rho(3) = 6 = \gamma_2(2).\\ \text{Pour } k=4: & \rho\gamma_1\rho^{-1}(4) & = & \rho\gamma_1(7) = \rho(1) = 2 = \gamma_2(4).\\ \text{Pour } k=6: & \rho\gamma_1\rho^{-1}(6) & = & \rho\gamma_1(3) = \rho(7) = 4 = \gamma_2(6).\end{array}$$

• Soit $k\in\{1,3,5,7\}$. Alors $\gamma_2(k) = k$ car k est un point fixe de γ_2. De plus, on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\rho^{-1}(2) & = & 1.\\ \rho^{-1}(6) & = & 3.\\ \rho^{-1}(4) & = & 7.\end{array}\right.$$

Puisque ρ^{-1} est une permutation de $[|1,7|]$ donc une bijection, pour $k\in\{1,3,5,7\}$, on a $\rho^{-1}(k)\notin\{1,3,7\}$, d'où $\rho^{-1}(k)\in\{2,4,5,6\}$. Or $\{2,4,5,6\}$ est l'ensemble des points fixes de γ_1. Il vient :

$$\forall k\in\{1,3,5,7\},\quad \gamma_1(\rho^{-1}(k)) = \rho^{-1}(k) \quad \text{donc} \quad \rho\gamma_1\rho^{-1}(k) = \rho\rho^{-1}(k) = k = \gamma_2(k).$$

Finalement, on a $\boxed{\rho\gamma_1\rho^{-1} = \gamma_2.}$

Q22. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $l\in[|2,n|]$. Soient $\gamma_1 = (a_1,\ldots,a_l)$ et $\gamma_2 = (b_1,\ldots,b_l)$ deux cycles de longueur l.
Montrons que γ_1 et γ_2 sont conjugués. On définit une permutation $\rho\in\mathfrak{S}_n$ en deux étapes. Tout d'abord, on pose :

$$\forall i\in[|1,l|],\quad \boxed{\rho(a_i) = b_i.}$$

D'autre part, soient les ensembles finis :

$$A = [|1,n|]\setminus\{a_1,\ldots,a_l\},\quad B = [|1,n|]\setminus\{b_1,\ldots,b_l\}.$$

A et B sont finis de même cardinal $n-l$ donc il existe une bijection ρ' de A sur B. On définit alors ρ sur A par :

$$\forall k\in A,\quad \rho(k) = \rho'(k).$$

Alors ρ est bien une permutation : $\boxed{\rho\in\mathfrak{S}_n.}$ On procède ensuite comme dans la question **Q21.**

- Pour $k \in \{b_1, \ldots, b_l\}$:

$$\forall i \in [|1, l|], \quad \rho\gamma_1\rho^{-1}(b_i) = \rho\gamma_1(a_i) = \rho(a_{i+1}) = b_{i+1} = \gamma_2(b_i).$$

(Si $i = l$, on note par convention $a_{l+1} = a_1$ et $b_{l+1} = b_1$.)
Donc $\boxed{\forall k \in \{b_1, \ldots, b_l\}, \quad \rho\gamma_1\rho^{-1}(k) = \gamma_2(k).}$

- Soit $k \in B = [|1, n|] \setminus \{b_1, \ldots, b_l\}$. Alors $\gamma_2(k) = k$ car k est un point fixe de γ_2.
Puisque ρ^{-1} est une permutation de $[|1, n|]$ donc une bijection, pour $k \in [|1, n|] \setminus \{b_1, \ldots, b_l\}$,
on a $\rho^{-1}(k) \notin \{a_1, \ldots, a_l\}$, d'où $\rho^{-1}(k) \in A = [|1, n|] \setminus \{a_1, \ldots, a_l\}$. Or A est l'ensemble des points fixes de γ_1.
Il vient :

$$\forall k \in B = [|1, n|] \setminus \{b_1, \ldots, b_l\}, \quad \gamma_1(\rho^{-1}(k)) = \rho^{-1}(k) \quad \text{donc} \quad \rho\gamma_1\rho^{-1}(k) = \rho\rho^{-1}(k) = k = \gamma_2(k).$$

Donc $\boxed{\forall k \in B = [|1, n|] \setminus \{b_1, \ldots, b_l\}, \quad \rho\gamma_1\rho^{-1}(k) = \gamma_2(k).}$

Finalement, on a $\boxed{\rho\gamma_1\rho^{-1} = \gamma_2.}$ $\boxed{\text{Dans } \mathfrak{S}_n\text{, deux cycles de même longueur sont conjugués.}}$

Q23. Soient γ_1 et γ_2 dans $\mathfrak{S}_n$ deux cycles à supports disjoints, et soit $\rho \in \mathfrak{S}_n$. On note $A = \mathrm{Supp}(\gamma_1)$ et $B = \mathrm{Supp}(\gamma_2)$. On a donc $A \cap B = \emptyset$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Supp}(\rho\gamma_1\rho^{-1}) & = & \rho(A). \\ \mathrm{Supp}(\rho\gamma_2\rho^{-1}) & = & \rho(B). \end{array}$$

Puisque $A \cap B = \emptyset$ et ρ est bijective, on a $\rho(A) \cap \rho(B) = \emptyset$. Ainsi $\rho\gamma_1\rho^{-1}$ et $\rho\gamma_2\rho^{-1}$ sont encore à supports disjoints.

$\boxed{\text{Soient } \gamma_1 \text{ et } \gamma_2 \text{ dans } \mathfrak{S}_n \text{ deux cycles à supports disjoints, } \rho \in \mathfrak{S}_n,}$

$\boxed{\text{alors } \rho\gamma_1\rho^{-1} \text{ et } \rho\gamma_2\rho^{-1} \text{ sont encore des cycles à supports disjoints.}}$

Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Montrons l'équivalence : (σ et τ sont conjugués) $\Leftrightarrow$ ($\forall l \in [|1, n|],\ c_l(\sigma) = c_l(\tau)$).

- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que σ et τ sont conjugués. Alors $\exists \rho \in \mathfrak{S}_n, \tau = \rho\sigma\rho^{-1}$.
Soit $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_r$ la décomposition unique de σ en produit de cycles à supports disjoints. Alors

$$\tau = \rho\sigma\rho^{-1} = \rho(\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_r)\rho^{-1} = (\rho\gamma_1\rho^{-1})(\rho\gamma_2\rho^{-1}) \ldots (\rho\gamma_r\rho^{-1}).$$

Chaque $(\rho\gamma_i\rho^{-1})$ est un cycle de même longueur que le cycle γ_i. De plus, on a montré que ces cycles $(\rho\gamma_i\rho^{-1})_{1 \leq i \leq r}$ sont encore à supports disjoints.
Donc τ se décompose en un produit de cycles à supports disjoints de même longueur que ceux de σ. Ainsi $\forall l \in [|2, n|], c_l(\sigma) = c_l(\tau)$. Puisque le nombre de points fixes de σ est égal à n auquel on retire la somme des longueurs des cycles, σ et τ ont aussi le même nombre de points fixes : $c_1(\sigma) = c_1(\tau)$.
Donc $\forall l \in [|1, n|],\ c_l(\sigma) = c_l(\tau)$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\forall l \in [|1, n|],\ c_l(\sigma) = c_l(\tau)$. Dans une décomposition en un produit de cycles à supports disjoints, tous les cycles commutent. On peut donc échanger l'ordre des cycles. On décompose σ et τ en produit de cycles à supports disjoints :

$$\begin{array}{rcl} \sigma & = & \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_r. \\ \tau & = & \eta_1\eta_2 \ldots \eta_r. \end{array}$$

Quitte à permuter l'ordre des cycles, on suppose que $\forall i \in [|1, r|],\ \gamma_i$ et η_i sont de même longueur.
On a montré que deux cycles de même longueur sont conjugués. Par la même technique que dans la question **Q22.**, on construit une permutation $\rho \in \mathfrak{S}_n$ de la manière suivante :

$$\begin{array}{lrcl} \rho : & \mathrm{Supp}(\gamma_1) & \rightarrow & \mathrm{Supp}(\eta_1), \\ & & \vdots & \\ \rho : & \mathrm{Supp}(\gamma_r) & \rightarrow & \mathrm{Supp}(\gamma_r), \\ \rho : & \{\text{points fixes de } \sigma\} & \rightarrow & \{\text{points fixes de } \tau\}, \end{array}$$

de sorte que $\forall i \in [|1, r|], \rho\gamma_i\rho^{-1} = \eta_i$. Alors

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \rho(\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_r)\rho^{-1} = (\rho\gamma_1\rho^{-1})(\rho\gamma_2\rho^{-1}) \ldots (\rho\gamma_r\rho^{-1}) = \eta_1\eta_2 \ldots \eta_r = \tau.$$

Donc $\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$ et σ et τ sont conjugués.

Ainsi $\boxed{(\sigma \text{ et } \tau \text{ sont conjugués}) \Leftrightarrow (\forall l \in [|1,n|],\ c_l(\sigma) = c_l(\tau)).}$

Q24. Soit $\ell \in [|2,n|]$ et $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur ℓ. Posons $\sigma = (1, 2, \ldots, \ell)$.
γ et σ sont deux cycles de même longueur (ℓ) donc sont conjugués (par la question **Q22.**).
γ et σ sont conjugués donc P_γ et P_σ sont semblables (par la question **Q20.**).
P_γ et P_σ sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique :

$$\chi_\gamma(X) = \chi_\sigma(X) = \det(XI_n - P_\sigma) = \det(XI_n - \Gamma_\ell) \text{ avec } \Gamma_\ell = P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_\ell(\mathbb{C}).$$

Calculons le polynôme caractéristique de Γ_ℓ, en effectuant un développement par rapport à la première ligne.

$$\chi_\gamma(X) = \det(XI_\ell - \Gamma_\ell) = \det \begin{pmatrix} X & & & -1 \\ -1 & X & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & X \end{pmatrix} = XX^{\ell-1} + (-1)^{\ell-1} \times (-1)(-1)^{\ell-1} = X^\ell - 1.$$

$\boxed{\text{Si } \gamma \in \mathfrak{S}_\ell \text{ est un cycle de longueur } \ell, \text{ alors } \chi_\gamma(X) = X^\ell - 1.}$

Q25. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soit $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_r$ la décomposition unique de σ en produit de cycles à supports disjoints.
On note $\ell(\gamma_i)$ la longueur du cycle γ_i.
Soit $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Pour $i \in [|1,r|]$, en notant le cycle $\gamma_i = (a_1, \ldots, a_{\ell(\gamma_i)})$, on note $\mathcal{B}_i = (e_{a_1}, \ldots, e_{a_{\ell(\gamma_i)}})$ une famille de vecteurs incluse dans $\mathcal{B}_{\text{can}}$.
De plus, notons $A = \{\text{points fixes de } \sigma\}$ et $\mathcal{B}_0 = (e_k, k \in A)$.
Alors $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ obtenue par permutation des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_{\text{can}}$, donc c'est encore une base de $\mathbb{C}^n$. De plus, en notant $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_{\text{can}}$ à $\mathcal{B}$, on a :

$$P^{-1}P_\sigma P = \begin{pmatrix} I_{c_1(\sigma)} & & & \\ & \Gamma_{\ell(\gamma_1)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma_{\ell(\gamma_r)} \end{pmatrix} = D.$$

Donc P_σ est semblable à cette matrice D qui est diagonale par blocs :

- avec des blocs de la forme Γ_ℓ pour $\ell \geq 2$: ce sont les r blocs $\Gamma_{\ell(\gamma_1)}, \ldots, \Gamma_{\ell(\gamma_r)}$, qui proviennent des r cycles à supports disjoints de σ ;
- et avec $c_1(\sigma)$ blocs de la forme $\Gamma_1 = (1) \in M_1(\mathbb{C})$, qui proviennent des $c_1(\sigma)$ points fixes de σ.

P_σ et D sont semblables donc ont le même polynôme caractéristique. En utilisant la question **Q24.**, et en regroupant les $c_\ell(\sigma)$ cycles de même longueur $\ell \in [|1,n|]$, on obtient :

$$\chi_\sigma(X) = \chi_{P_\sigma}(X) = \chi_D(X) = (X-1)^{c_1(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} \chi_{\Gamma_{\ell(\gamma_i)}}(X) = (X-1)^{c_1(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} \left(X^{\ell(\gamma_i)} - 1\right) = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}.$$

Donc $\boxed{\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}.}$

Q26. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Pour $\ell \in [|1,n|]$, les racines de $X^\ell - 1$ sont toutes simples et valent

$$\{ \text{ racines de } X^\ell - 1\} = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{\ell}}, 1 \leq k \leq \ell \right\}.$$

On décompose le polynôme caractéristique χ_σ en un produit de polynômes de degré 1 :

$$\chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)} = \prod_{l=1}^{n} \prod_{k=1}^{\ell} \left(X - e^{ik\frac{2\pi}{\ell}} \right)^{c_\ell(\sigma)}.$$

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'aux racines de χ_σ qui sont de la forme $\omega_q = e^{i2\pi/q}$, pour $q \in [|1,n|]$ (même si χ_σ possède aussi d'autres racines).

$$(\omega_q \text{ est racine de } X^\ell - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_q^\ell = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{i2\pi\frac{\ell}{q}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ell}{q} \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad q \text{ divise } \ell.$$

Donc le facteur $(X - \omega_q)$ apparaît $c_\ell(\sigma)$ fois pour chaque $\ell \in [|1,n|]$ tel que q divise ℓ. Ainsi

$$\boxed{\text{La multiplicité de } \omega_q = e^{i2\pi/q} \text{ en tant que racine de } \chi_\sigma \text{ vaut :}} \quad \boxed{\sum_{\ell \in [|1,n|], q|\ell} c_\ell(\sigma).}$$

Soient σ et τ dans $\mathfrak{S}_n$ telles que P_σ et P_τ sont semblables. Alors $\chi_\sigma = \chi_\tau$. Donc $\forall q \in [|1,n|]$, le nombre complexe $\omega_q = e^{i2\pi/q}$ a la même multiplicité comme racine de χ_σ et comme racine de χ_τ. On obtient :

$$\boxed{\forall q \in [|1,n|], \qquad \sum_{\ell \in [|1,n|], q|\ell} c_\ell(\sigma) = \sum_{\ell \in [|1,n|], q|\ell} c_\ell(\tau).}$$

Q27. Montrons la propriété (S) :
(Les matrices de permutation P_σ et P_τ sont semblables) $\Leftrightarrow$ (les permutations σ et τ sont conjuguées.)

- $\boxed{\Leftarrow}$ On l'a déjà montré dans la question **Q20.**
- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que P_σ et P_τ sont semblables.
  Soit le type cyclique de σ : $T_\sigma = \begin{pmatrix} c_1(\sigma) & c_2(\sigma) & \dots & c_n(\sigma) \end{pmatrix}$. Calculons le produit matriciel $T_\sigma D$. Soit $j \in [|1,n|]$:

  $$(T_\sigma D)_{1,j} = \sum_{k=1}^n (T_\sigma)_{1,k}(D)_{k,j} = \sum_{k=1}^n c_k(\sigma) d_{k,j} = \sum_{k \in [|1,n|], j \text{ divise } k} c_k(\sigma).$$

  D'après la question **Q26.**,

  $$\forall j \in [|1,n|], \qquad \sum_{k \in [|1,n|], j \text{ divise } k} c_k(\sigma) = \sum_{k \in [|1,n|], j \text{ divise } k} c_k(\tau),$$

  donc $(T_\sigma D)_{1,j} = (T_\tau D)_{1,j}$ et $T_\sigma D = T_\tau D$. Or on a montré dans la question **Q16.** que $\det(D) = 1$.
  En particulier, la matrice D est inversible, d'où en composant à gauche par D^{-1} : $\boxed{T_\sigma = T_\tau.}$ Ainsi σ et τ ont le même type cyclique, ce qui entraîne $\forall l \in [|1,n|],\ c_l(\sigma) = c_l(\tau)$. Par la question **Q23.**, les permutations σ et τ sont conjuguées.

$\boxed{\text{(Les matrices de permutation } P_\sigma \text{ et } P_\tau \text{ sont semblables)} \Leftrightarrow \text{(les permutations } \sigma \text{ et } \tau \text{ sont conjuguées.)}}$

II.B - Endomorphismes de permutation.

Q28.

$$\begin{aligned}
u \text{ est un endomorphisme de permutation} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, \exists \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E, \quad \forall j \in [|1,n|], u(e_j) = e_{\delta(j)} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, \exists \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \text{ base de } E, \\
&\qquad \forall j \in [|1,n|], u(e_j) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} e_j \text{ avec } a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n, \exists \mathcal{B} \text{ base de } E, \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_\sigma.}
\end{aligned}$$

Q29. Soit u un endomorphisme de permutation.
Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_\sigma$.
$(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est un groupe de cardinal $n!$, donc par le théorème de Lagrange, on a

$$\sigma^{\mathrm{Card}(\mathfrak{S}_n)} = \sigma^{n!} = \mathrm{Id}_{[|1,n|]}.$$

On en déduit que

$$(P_\sigma)^{n!} = P_{\sigma^{n!}} = P_{\mathrm{Id}_{[|1,n|]}} = I_n.$$

Le polynôme $X^{n!}-1$ annule P_σ, donc annule u : $\boxed{u^{n!}=\mathrm{Id}_E.}$
Or $X^{n!}-1$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont les racines $(n!)$-ièmes de l'unité.
Donc $\boxed{u \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{L}(E).}$
D'après la question **Q25.**, la matrice P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$D=\mathrm{Diag}(\Gamma_{\ell_1},\dots,\Gamma_{\ell_k}),\quad k\le n,\quad \forall i\in[|1,k|],\ell_i\ge 1.$$

Or on a :

$$\forall \ell\ge 1,\quad \mathrm{Tr}(\Gamma_\ell)=\begin{cases}1 & \text{si } \ell=1,\\ 0 & \text{si } \ell\ge 2.\end{cases}$$

Donc $\mathrm{Tr}(u)\in\mathbb{N}$ et de plus :

$$\mathrm{Tr}(u)=\mathrm{Tr}(P_\sigma)=\mathrm{Tr}(D)=\sum_{i=1}^{k}\mathrm{Tr}(\Gamma_{\ell_i})\le\sum_{i=1}^{k}1=k\le n.$$

Ainsi $\boxed{\mathrm{Tr}(u)\in[|0,n|].}$

Q30. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.
Montrons que (A et B sont semblables) $\Leftrightarrow$ $(\chi_A=\chi_B)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que A et B sont semblables. Alors $\exists P\in GL_n(\mathbb{C}), B=P^{-1}AP$. D'où

$$\chi_B(X)=\det(XI_n-B)=\det(XI_n-P^{-1}AP)=\det(P^{-1}(XI_n-A)P)=\det(P^{-1})\det(P)\det(XI_n-A)=\chi_A(X).$$

Donc $\chi_A=\chi_B$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\chi_A=\chi_B$. On note $\chi_A(X)=\prod_{k=1}^{p}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$.
Soit $k\in[|1,p|]$ et $\mathcal{B}_k$ une base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda_k I_n)$. Alors $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\ldots\cup\mathcal{B}_p$ est une base de E et A est semblable à :

$$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{\alpha_p}\end{pmatrix}.$$

De même, B est semblable à D.
Par symétrie et transitivité de la relation de similitude, A et B sont semblables.
Ainsi $\boxed{\text{si } A \text{ et } B \text{ sont diagonalisables dans } M_n(\mathbb{C}), \text{ alors } (A \text{ et } B \text{ sont semblables}) \Leftrightarrow (\chi_A=\chi_B).}$

Q31. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $u^2=\mathrm{Id}_E$.
Montrons que (u est un endomorphisme de permutation) $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{Tr}(u)\in\mathbb{N})$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Par la question **Q29.**, si u est un endomorphisme de permutation, alors $\mathrm{Tr}(u)\in[|0,n|]\subset\mathbb{N}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Tr}(u)\in\mathbb{N}$.
Le polynôme $X^2-1=(X-1)(X+1)$ annule u et est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc u est diagonalisable et ses valeurs propres sont incluses dans les racines de P : $\mathrm{Sp}(u)\subset\{1,-1\}$.
Le polynôme caractéristique de u est de la forme

$$\chi_u(X)=(X-1)^{\alpha_1}(X+1)^{\alpha_2},\ \text{avec}\ \begin{cases}\alpha_1 &= \dim(E_1(u))=\dim(\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E))\ge 0,\\ \alpha_2 &= \dim(E_{-1}(u))=\dim(\mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}_E))\ge 0,\\ n &= \alpha_1+\alpha_2.\end{cases}$$

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u vaut

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=D=\begin{pmatrix}I_{\alpha_1} & 0\\ 0 & -I_{\alpha_2}\end{pmatrix}.$$

Or $\mathrm{Tr}(u)=\mathrm{Tr}(D)=\alpha_1-\alpha_2\ge 0$ donc $\alpha_1\ge\alpha_2$.
En permutant les éléments de la base, on obtient une matrice semblable à D, diagonale par blocs, qui contient α_2 blocs A :

$$D=\begin{pmatrix}I_{\alpha_1} & 0\\ 0 & -I_{\alpha_2}\end{pmatrix}\overset{\text{sim}}{\sim}\begin{pmatrix}I_{\alpha_1-\alpha 2} & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A\end{pmatrix}\ \text{avec}\ A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Rappelons que $\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $\chi_A(X) = X^2 - 1 = \chi_{\Gamma_2}(X)$, et puisque A et Γ_2 sont diagonalisables, elles sont semblables. Donc D est semblable à

$$D \overset{\text{sim}}{\sim} \begin{pmatrix} I_{\alpha_1 - \alpha 2} & & & \\ & \Gamma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma_2 \end{pmatrix}.$$

C'est bien une matrice de permutation. Donc u est un endomorphisme de permutation.

Finalement l'équivalence est vraie : $\boxed{\text{si } u^2 = \mathrm{Id}_E, \text{ alors } (u \text{ est un endomorphisme de permutation}) \Leftrightarrow (\mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}).}$

Q32. • $\boxed{\textbf{Cas } k = 3.}$ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}_E$.

Montrons que (u est un endomorphisme de permutation) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}$).

$\boxed{\Rightarrow}$ Par la question **Q29.**, si u est un endomorphisme de permutation, alors $\mathrm{Tr}(u) \in [|0, n|] \subset \mathbb{N}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}$.

Le polynôme $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ annule u et est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc u est diagonalisable et ses valeurs propres sont incluses dans les racines de P : $\mathrm{Sp}(u) \subset \{1, j, j^2\}$.

Le polynôme caractéristique de u est de la forme

$$\chi_u(X) = (X-1)^{\alpha_1}(X-j)^{\alpha_2}(X-j^2)^{\alpha_3}, \text{ avec } \begin{cases} \alpha_1 &= \dim(E_1(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) \geq 0, \\ \alpha_2 &= \dim(E_j(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u - j\mathrm{Id}_E)) \geq 0, \\ \alpha_3 &= \dim(E_{j^2}(u)) = \dim(\mathrm{Ker}(u - j^2\mathrm{Id}_E)) \geq 0, \\ n &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

Il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u vaut

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D = \begin{pmatrix} I_{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & jI_{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & j^2 I_{\alpha_3} \end{pmatrix}.$$

On utilise la relation $1 + j + j^2 = 0$ qui donne $j^2 = -1 - j$:

$$\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(D) = \alpha_1 + \alpha_2 j + \alpha_3 j^2 = \alpha_1 + \alpha_2 j - \alpha_3(1+j) = (\alpha_1 - \alpha_3) + j(\alpha_2 - \alpha_3) \in \mathbb{N}.$$

Donc $\alpha_2 - \alpha_3 = 0$ et $\alpha_1 - \alpha_3 \geq 0$. Autrement dit, on a $\boxed{\alpha_1 \geq \alpha_2 = \alpha_3.}$

En permutant les éléments de la base, on obtient une matrice semblable à D, diagonale par blocs, qui contient α_2 blocs A :

$$D = \begin{pmatrix} I_{\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & jI_{\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & j^2 I_{\alpha_3} \end{pmatrix} \overset{\text{sim}}{\sim} \begin{pmatrix} I_{\alpha_1 - \alpha 2} & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que $\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Puisque $\chi_A(X) = X^3 - 1 = \chi_{\Gamma_3}(X)$, et puisque A et Γ_3 sont diagonalisables, elles sont semblables. Donc D est semblable à

$$D \overset{\text{sim}}{\sim} \begin{pmatrix} I_{\alpha_1 - \alpha 2} & & & \\ & \Gamma_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma_3 \end{pmatrix}.$$

C'est bien une matrice de permutation. Donc u est un endomorphisme de permutation.

$\boxed{\text{Pour } k = 3, \text{ cette équivalence est vraie.}}$

$\boxed{\text{Si } u^3 = \mathrm{Id}_E, \text{ alors } (u \text{ est un endomorphisme de permutation}) \Leftrightarrow (\mathrm{Tr}(u) \in \mathbb{N}).}$

- $\boxed{\textbf{Cas } k = 4.}$ On suppose que $n \geq 2$. On pose $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$.
  On a $A^4 = I_2$ donc $D^4 = I_n$.
  De plus $\mathrm{Tr}(A) = 0$ donc $\mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(A) + (n-2) = n - 2 \in \mathbb{N}$.
  Cependant, on a $\chi_D(X) = (X - i)(X + i)(X - 1)^{n-2} = (X^2 + 1)(X - 1)^{n-2}$.
  Montrons que ce polynôme caractéristique n'est pas de la forme donnée dans la question **Q25.**
  Supposons par l'absurde qu'il soit de cette forme. Alors il existe $\ell \in [|1, n|]$, tel que le terme $(X - i)$ provient de la décomposition en polynômes de degré 1 du polynôme $(X^\ell - 1)$. Puisque $i^\ell = 1$, 4 divise ℓ. Mais alors -1 est aussi racine de $(X^\ell - 1)$, donc de χ_D, ce qui est absurde.
  Donc χ_D n'est pas de la forme donnée dans **Q25.**
  Or si D était semblable à une matrice de permutation P_σ, puisqu'elles sont diagonalisables, elles auraient le même polynôme caractéristique, d'après la question **Q30.**
  Donc $D^4 = I_4, \mathrm{Tr}(D) \in \mathbb{N}$ et pourtant D n'est pas la matrice d'un endomorphisme de permutation.
  $\boxed{\text{Pour } k = 4\text{, cette équivalence est fausse.}}$

Q33.
- Démontrons le résultat préliminaire suivant.
  $$\boxed{\text{Si } (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n \text{ vérifie } \sum_{\ell=1}^{n} \ell c_\ell = n\text{, alors il existe une permutation } \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ de type cyclique } \begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix}.}$$
  On construit σ en définissant $\sigma(k)$ pour $k \in [|1, n|]$.
  - ⋆ Les $c_1(\sigma)$ premiers éléments de $[|1, n|]$ sont les points fixes de σ : $\forall k \in [|1, c_1(\sigma)|], \sigma(k) = k$.
  - ⋆ Les $2c_2(\sigma)$ éléments suivants sont utilisés pour construire $c_2(\sigma)$ 2-cycles, de la forme $(k, k+1)$.
  - ⋆ Les $3c_3(\sigma)$ éléments suivants sont utilisés pour construire $c_3(\sigma)$ 3-cycles, de la forme $(k, k+1, k+2)$.
  - ⋆ ...
  - ⋆ Les $nc_n(\sigma)$ éléments suivants sont utilisés pour construire $c_n(\sigma)$ n-cycles (remarque : $c_n(\sigma)$ vaut 0 ou 1).
  - ⋆ On définit σ comme la composée de ces cycles à supports disjoints. σ possède bien $c_l(\sigma)$ cycles de longueur ℓ, pour tout $\ell \in [|1, n|]$.

  On a démontré l'existence d'une permutation de type cyclique $\begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$.
- Montrons maintenant que (u est un endomorphisme de permutation) $\Leftrightarrow$ (u vérifie (a) et (b)).
- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que u est un endomorphisme de permutation.
  Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_\sigma$. Alors $\chi_u = \chi_\sigma$.
  D'après la question **Q25.**,
  $$\chi_u(X) = \chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell(\sigma)}.$$
  Donc la condition (a) est remplie.
  On a montré à la question **Q29.** que $u^{n!} = \mathrm{Id}_E$. Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^N = \mathrm{Id}_E$ et la condition (b) est remplie.
- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que les conditions (a) et (b) sont remplies.
  D'après (b), il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^N = \mathrm{Id}_E$. Le polynôme $X^N - 1$ annule u et est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc u est diagonalisable.
  D'après (a), il existe $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $\chi_u(X) = \displaystyle\prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell}$.
  χ_u est de degré n, d'où : $\deg(\chi_u) = n = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \ell c_\ell$.
  D'après le résultat préliminaire, il existe $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ de type cyclique $T_\sigma = \begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$. D'après la question **Q25.**,
  $$\chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^{n} (X^\ell - 1)^{c_\ell} = \chi_u(X).$$
  Soit $\mathcal{C}$ une base quelconque de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. u est diagonalisable donc A est diagonalisable.
  $\chi_A = \chi_u = \chi_{P_\sigma}$ et les matrices A et P_σ sont diagonalisables.

D'après la question **Q30.**, les matrices $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et P_σ sont semblables. Donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP = P_\sigma$. P représente la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à une autre base $\mathcal{B}$ de E, donc

$$P_\sigma = P^{-1}AP = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_\sigma$ et u est un endomorphisme de permutation.

Finalement, $\boxed{(u \text{ est un endomorphisme de permutation}) \Leftrightarrow (u \text{ vérifie (a) et (b)}).}$

Q34. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de u comptées avec multiplicité. χ_u est scindé sur $\mathbb{C}$ donc u est trigonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit triangulaire supérieure, avec les λ_i sur la diagonale :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & t_{i,j} \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad T^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}.$$

D'où

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \boxed{\mathrm{Tr}(u^k) = \mathrm{Tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i)^k.}$$

Notons σ_k le k-ième polynôme symétrique élémentaire en les variables $(\lambda_i)_{1 \le i \le n}$:

$$\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\dots\lambda_{i_k}.$$

Alors le polynôme caractéristique s'exprime comme :

$$\chi_u(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i) = X^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)X^{n-k}.$$

D'autre part, le polynôme symétrique $\sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ s'exprime comme un polynôme en les sommes de Newton $\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i)^k = \mathrm{Tr}(u^k)$.

Soit maintenant u et v deux endomorphismes de E tels que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathrm{Tr}(u^k) = \mathrm{Tr}(v^k)$. Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres de u et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ les valeurs propres de v, comptées avec multiplicité. Alors leurs polynômes symétriques sont égaux :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sigma_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sigma_k(\mu_1, \dots, \mu_n).$$

Donc leurs polynômes caractéristiques ont les mêmes coefficients, donc sont égaux : $\boxed{\chi_u = \chi_v.}$

Q35. • Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et P_σ sa matrice de permutation. On a montré dans la question **Q25.** que P_σ est semblable à une matrice diagonale par blocs D, telle que pour $\ell \in [|1, n|]$, D contient $c_\ell(\sigma)$ blocs du type Γ_ℓ :

$$P_\sigma \overset{\text{sim}}{\sim} D = \mathrm{Diag}(\Gamma_{\ell_1}, \dots, \Gamma_{\ell_p}), \quad p \le n, \quad \forall i \in [|1, p|], \ell_i \ge 1,$$

Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P_\sigma^k \overset{\text{sim}}{\sim} D^k = \mathrm{Diag}((\Gamma_{\ell_1})^k, \dots, (\Gamma_{\ell_p})^k).$$

Si $\ell = 1$, alors $\Gamma_1 = (1)$ donc $\forall k \in \mathbb{N}, (\Gamma_1)^k = (1)$ et $\mathrm{Tr}(\Gamma_1)^k = 1$.
Si $\ell \ge 2$, les coefficients des matrices Γ_ℓ et $(\Gamma_\ell)^k$ de $M_\ell(\mathbb{C})$ valent :

$$\begin{aligned} (\Gamma_\ell)_{i,j} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+1 \mod (\ell), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \\ ((\Gamma_\ell)^k)_{i,j} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j+k \mod (\ell), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

- ⋆ Si ℓ divise k, alors $(\Gamma_\ell)^k = I_\ell$ donc $\mathrm{Tr}((\Gamma_\ell)^k) = \ell$.
- ⋆ Si ℓ ne divise pas k, alors $\mathrm{Tr}((\Gamma_\ell)^k) = 0$ car il s'agit d'une matrice avec une sous-diagonale de 1 et une sur-diagonale de 1, qui ont des coefficients diagonaux tous nuls.

Il vient :

$$\mathrm{Tr}(P_\sigma^k) = \mathrm{Tr}(D^k) = c_1(\sigma) + \sum_{\ell\in[|2,n|]} \mathrm{Tr}((\Gamma_l)^k)c_\ell(\sigma) = c_1(\sigma) + \sum_{\ell\in[|2,n|],\ell|k} \ell c_\ell(\sigma).$$

Ainsi

$$\boxed{\forall\sigma\in\mathfrak{S}_n,\quad \forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Tr}(P_\sigma^k) = \sum_{\ell\in[|1,n|],\ell|k} \ell c_\ell(\sigma).}$$

- Soit maintenant u un endomorphisme diagonalisable de E.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que u est un endomorphisme de permutation. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E et une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_\sigma$. D'après ce qui précède,

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Tr}(u^k) = \mathrm{Tr}(P_\sigma^k) = \sum_{\ell\in[|1,n|],\ell|k} \ell c_\ell(\sigma).}$$

Donc il existe bien des entiers naturels $(c_\ell)_{1\leq\ell\leq n}$ tels que $\quad \forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\ell\in[|1,n|],\ell|k} \ell c_\ell.$

- $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons qu'il existe des entiers naturels $(c_\ell)_{1\leq\ell\leq n}$ tels que

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\ell\in[|1,n|],\ell|k} \ell c_\ell.$$

En particulier, pour $k=0$, il vient :

$$\mathrm{Tr}(u^0) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_E) = n = \sum_{\ell\in[|1,n|],\ell|0} \ell c_\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \ell c_\ell.$$

D'après le résultat préliminaire démontré dans la question **Q33.**, puisque $\sum_{\ell=1}^{n} \ell c_\ell = n$, il existe $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ de type cyclique $T_\sigma = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & c_n\end{pmatrix}$. Alors

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\ell\in[|1,n|],\ell|k} \ell c_\ell = \mathrm{Tr}(P_\sigma^k).$$

D'après la question **Q34.**, on en déduit que u et P_σ ont même polynôme caractéristique, d'où :

$$\boxed{\chi_u(X) = \chi_\sigma(X) = \prod_{\ell=1}^{n}(X^\ell - 1)^{c_\ell}.}$$

Soit $\mathcal{C}$ une base quelconque de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$. u est diagonalisable donc A est diagonalisable.
$\chi_A = \chi_u = \chi_{P_\sigma}$ et les matrices A et P_σ sont diagonalisables.
D'après la question **Q30.**, les matrices $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$ et P_σ sont semblables. Donc $\exists P\in GL_n(\mathbb{C}), P^{-1}AP = P_\sigma$.
P représente la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à une autre base $\mathcal{B}$ de E, donc

$$P_\sigma = P^{-1}AP = P^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u).$$

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_\sigma$ et u est un endomorphisme de permutation.

Finalement, $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de permutation si et seulement si il existe } (c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{N}^n \text{ tels que :}}$

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathrm{Tr}(u^k) = \sum_{\ell\in[|1,n|],\ell|k} \ell c_\ell.}$$

III Valeurs propres de la matrice de Redheffer.

Q36. La matrice A_n est triangulaire supérieure, donc son déterminant vaut :

$$A_n = \begin{pmatrix} \mu(1) & \mu(2) & \dots & \dots & \mu(n) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \det(A_n) = \mu(1) = 1.$$

La matrice H_n est de la forme :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \dots & 1 \\ 1 & & & & \\ \vdots & & h_{i,j} = \delta_{i|j} & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \delta_{i|j} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $(i,j) \in [|1,n|]^2$. Calculons $(C_n)_{i,j} = (A_n H_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} h_{k,j}$. On distingue quatre cas :

- Si $i = j = 1$:

$$(C_n)_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} h_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) \times 1 = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) = M(n). \quad \boxed{(C_n)_{1,1} = M(n).}$$

- Si $i > 1$ et $j = 1$:

$$(C_n)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} h_{k,1} = a_{i,i} \times 1 = 1. \quad \boxed{(C_n)_{i,1} = 1.}$$

- Si $i > 1$ et $j > 1$:

$$(C_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} h_{k,j} = a_{i,i} h_{i,j} = h_{i,j}. \quad \boxed{(C_n)_{i,j} = h_{i,j}.}$$

- Si $i = 1$ et $j > 1$ (cas oublié dans l'énoncé) :

$$(C_n)_{1,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} h_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \mu(k) h_{k,j} = \sum_{k|j} \mu(k) = (\mu * \mathbf{1})(j) = 0 \text{ car } j \neq 1. \quad \boxed{(C_n)_{1,j} = 0.}$$

Donc les coefficients de C_n sont égaux aux coefficients de H_n, sauf ceux de la première ligne :

$$C_n = \begin{pmatrix} M(n) & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & & & & \\ \vdots & & h_{i,j} = \delta_{i|j} & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M(n) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \delta_{i|j} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le déterminant de C_n en développant suivant la première ligne. La sous-matrice carrée $((C_n)_{i,j})_{2 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale, donc de déterminant égal à 1, d'où : $\det(C_n) = M(n)$. Puisque $\det(A_n) = 1$, on obtient :

$$\det(C_n) = M(n) = \det(A_n H_n) = \det(A_n)\det(H_n) = \det(H_n).$$

Donc $\boxed{\det(H_n) = M(n).}$

Q37. La matrice $B_n(\lambda)$ est triangulaire supérieure, donc son déterminant vaut :

$$B_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}(1) & \mathbf{b}(2) & \dots & \dots & \mathbf{b}(n) \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \det(B_n(\lambda)) = \mathbf{b}(1) = 1.$$

Soit $(i,j) \in [|1,n|]^2$. Calculons $(B_n(\lambda)H_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}h_{k,j}$. On distingue trois cas :

- Si $i > 1$ et j est quelconque :

$$(B_n(\lambda)H_n)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}h_{k,j} = b_{i,i}h_{i,j} = h_{i,j}. \quad \boxed{(B_n(\lambda)H_n)_{i,j} = h_{i,j}.}$$

- Si $i = j = 1$:

$$(B_n(\lambda)H_n)_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} b_{1,k}h_{k,1} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}(k) \times 1 = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}(k) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \mathbf{b}(k). \quad \boxed{(B_n(\lambda)H_n)_{1,1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \mathbf{b}(k).}$$

- Si $i = 1$ et $j > 1$:

$$(B_n(\lambda)H_n)_{1,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{1,k}h_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}(k)h_{k,j} = \sum_{k|j} \mathbf{b}(k) = \mathbf{b}(j) + \sum_{k|j, k\neq j} \mathbf{b}(k) = \mathbf{b}(j) + (\lambda-1)\mathbf{b}(j) = \lambda\mathbf{b}(j).$$

$\boxed{(B_n(\lambda)H_n)_{1,j} = \lambda\mathbf{b}(j).}$

On obtient

$$B_n(\lambda)H_n = \begin{pmatrix} 1 + \sum_{k=2}^{n} \mathbf{b}(k) & \lambda\mathbf{b}(2) & \dots & \dots & \lambda\mathbf{b}(n) \\ 1 & 1 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \delta_{i|j} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n) = \lambda B_n(\lambda) - B_n(\lambda)H_n = \begin{pmatrix} \lambda - 1 - \sum_{k=2}^{n} \mathbf{b}(k) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \lambda - 1 & & & \\ \vdots & 0 & \ddots & -\delta_{i|j} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -1 & 0 & \dots & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule ce déterminant en développant suivant la première ligne.
Puisque $\det(B_n(\lambda)) = 1$, on obtient :

$$\det(B_n(\lambda)(\lambda I_n - H_n)) = \det(B_n(\lambda))\det(\lambda I_n - H_n) = \chi_n(\lambda) = (\lambda-1)^{n-1}\left(\lambda - 1 - \sum_{k=2}^{n} \mathbf{b}(k)\right).$$

Finalement,

$$\boxed{\chi_n(\lambda) = (\lambda-1)^n - (\lambda-1)^{n-1}\sum_{k=2}^{n} \mathbf{b}(k).}$$

Q38. On a $\mathbf{f} = (1+w)\delta - w\mathbf{1}$ donc $\mathbf{f} * b = (1+w)(\delta * \mathbf{b}) - w(\mathbf{1} * \mathbf{b})$. Or :

$$\begin{array}{rrcl} & \delta * \mathbf{b} & = & \mathbf{b}. \\ \text{Si } n=1 : & (\mathbf{1} * \mathbf{b})(1) & = & \displaystyle\sum_{d|1} \mathbf{b}(d) = \mathbf{b}(1) = 1. \\ \text{Si } n \geq 2 : & (\mathbf{1} * \mathbf{b})(n) & = & (\mathbf{b} * \mathbf{1})(n) = \displaystyle\sum_{d|n} \mathbf{b}(d) = \mathbf{b}(n) + \sum_{k|n, k \neq n} \mathbf{b}(k) = \mathbf{b}(n) + (\lambda - 1)\mathbf{b}(n) = \lambda \mathbf{b}(n). \end{array}$$

Si $n = 1$:

$$\mathbf{f} * \mathbf{b}(1) = (1+w)(\delta * \mathbf{b})(1) - w(\mathbf{1} * \mathbf{b})(1) = (1+w)\mathbf{b}(1) - w = 1.$$

Si $n \geq 2$:

$$\mathbf{f} * \mathbf{b}(n) = (1+w)(\delta * \mathbf{b})(n) - w(\mathbf{1} * \mathbf{b})(n) = (1+w)\mathbf{b}(n) - w\lambda\mathbf{b}(n) = (1 + w(1-\lambda))\mathbf{b}(n) = 0.$$

Donc $\boxed{\mathbf{f} * \mathbf{b} = \delta.}$

Q39. Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathbf{f}(k)}{k^s} = \frac{1}{k^s}((1+w)\delta(k) - w\mathbf{1}(k)) = (1+w)\frac{\delta(k)}{k^s} - w\frac{1}{k^s} = (1+w)\delta(k) - w\frac{1}{k^s}.$$

La série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{\mathbf{f}(k)}{k^s}$ converge absolument si et seulement si la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^s}$ converge, si et seulement si $s > 1$. On en déduit que l'abscisse de convergence $\boxed{A_c(\mathbf{f}) = 1.}$ De plus,

$$\boxed{\forall s > 1, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{f}(k)}{k^s} = (1+w) - w\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}.} \qquad \text{Donc } \boxed{L_{\mathbf{f}}(s) = (1+w) - wL_{\mathbf{1}}(s).}$$

Q40. • Pour $m \geq 2$, $D_k(m)$ est le nombre de manières de décomposer l'entier m en un produit de k facteurs supérieurs ou égaux à 2, où l'ordre des facteurs compte.
Remarquons que $\forall m \geq 2$, $\boxed{D_1(m) = 1}$ car m est la seule écriture de m en produit d'un seul terme.
Supposons qu'il existe au moins une manière de décomposer m en un produit de k facteurs $m_1, \ldots, m_k \geq 2$. Alors

$$m = \prod_{i=1}^{k} m_i \geq \prod_{i=1}^{k} 2 = 2^k.$$

On vient de montrer que $D_k(m) \neq 0 \Rightarrow m \geq 2^k$. Par contraposée, $2^k > m \Rightarrow D_k(m) = 0$. Or

$$2^k > m \Leftrightarrow k\ln(2) > \ln(m) \Leftrightarrow k > \frac{\ln(m)}{\ln(2)} = \log_2(m) \Leftrightarrow k > \lfloor \log_2(m) \rfloor.$$

Ainsi :

$$\forall m \geq 2, \forall k \geq 2, \quad \boxed{k > \lfloor \log_2(m) \rfloor \quad \Rightarrow \quad D_k(m) = 0.}$$

Par abus de notation, on notera parfois $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} a_k D_k(m) = \sum_{k=2}^{\lfloor \log_2(m) \rfloor} a_k D_k(m)$ mais il s'agira toujours d'une somme finie, donc convergente.

• On admet que les fonctions **f** et **b** sont multiplicatives.

• On a $\mathbf{f} * \mathbf{b} = \delta$. De plus $A_c(f) = 1$. D'après la question **Q19.**, on a

$$\forall s > \max(A_c(\mathbf{f}), A_c(\mathbf{b})) = \max(1, A_c(\mathbf{b})), \quad L_{\mathbf{f}}(s)L_{\mathbf{b}}(s) = L_{\mathbf{f}*\mathbf{b}}(s) = L_\delta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\delta(k)}{k^s} = 1.$$

On fixe $s > \max(1, A_c(\mathbf{b}))$.

$$\frac{1}{L_{\mathbf{f}}(s)} = L_{\mathbf{b}}(s) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mathbf{b}(m)}{m^s} = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} m^{-s}\mathbf{b}(m).$$

- Montrons par récurrence forte sur $m \geq 2$ que $\mathbf{b}(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m) \rfloor} w^k D_k(m)$.

  Initialisation. Pour $m = 2$, on a $\mathbf{b}(2) = w\mathbf{b}(1) = w$ et $D_1(2) = 1$ donc le résultat est vrai.
  Hérédité. Supposons le résultat vrai pour tout $d \in [|2, m-1|]$ et montrons-le pour m. Par définition de $\mathbf{b}$, puis par hypothèse de récurrence appliquée aux diviseurs de m différents de m, sauf à $d = 1$ que l'on isole :

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(m) &= w \sum_{d|m, d\neq m} \mathbf{b}(d) \\
&= w\left[\mathbf{b}(1) + \sum_{d|m,d\neq m,d\neq 1}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(d)\rfloor} w^k D_k(d)\right)\right] \\
&= w + w \sum_{d|m,d\neq m,d\neq 1}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^k D_k(d)\right) \\
&= w + w \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} \sum_{d|m,d\neq m,d\neq 1} w^k D_k(d) \\
&= w + \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^{k+1}\left(\sum_{d|m,d\neq m,d\neq 1} D_k(d)\right).
\end{aligned}$$

  car pour $d \leq m$, on a $\lfloor \log_2(d) \rfloor \leq \lfloor \log_2(m) \rfloor$ et les termes $D_k(d)$ pour k trop grand sont nuls.
  Soit $d \neq m$ un diviseur de m. Soit $d = f_1 \dots f_k$ une décomposition de d en k facteurs $f_1, \dots, f_k \geq 2$. Alors

$$m = d\,\frac{m}{d} = f_1 \dots f_k \frac{m}{d}$$

  est une décomposition de m en $k+1$ facteurs. On a de plus $\frac{m}{d} \geq 2$ puisque $d \neq m$. Toute décomposition de m en $k+1$ facteurs est de ce type. On en déduit que

$$\boxed{D_{k+1}(m) = \sum_{d|m,d\neq m,d\neq 1} D_k(d).}$$

  D'où

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}(m) &= w + \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^{k+1} D_{k+1}(m) &= wD_1(m) + \sum_{k=2}^{1+\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^k D_k(m) \\
&= wD_1(m) + \sum_{k=2}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^k D_k(m) &= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^k D_k(m).
\end{aligned}$$

  Ceci termine la récurrence. On a montré que

$$\boxed{\forall m \geq 2, \quad \mathbf{b}(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^k D_k(m).}$$

- On conclut immédiatement que

$$\forall s > \max(1, A_c(\mathbf{b})), \quad \boxed{\frac{1}{L_{\mathbf{f}}(s)} = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} m^{-s}\mathbf{b}(m) = 1 + \sum_{m=2}^{+\infty} m^{-s} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^k D_k(m).}$$

Q41. On utilise le résultat intermédiaire que l'on a démontré dans la question **Q40.** :

$$\boxed{\forall m \geq 2, \quad \mathbf{b}(m) = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(m)\rfloor} w^k D_k(m).}$$

On pose $S_k(n) = \sum_{m=2}^{n} D_k(m)$. Puisque $j \leq n$, on a $\lfloor \log_2(j) \rfloor \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor$.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{n} \mathbf{b}(j) &= \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(j) \rfloor} w^k D_k(j) &&= \sum_{j=2}^{n} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} w^k D_k(j) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \sum_{j=2}^{n} w^k D_k(j) &&= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} w^k \left(\sum_{j=2}^{n} D_k(j) \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} w^k S_k(n) &&= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (\lambda - 1)^{-k} S_k(n).
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression obtenue en **Q37.**, il vient :

$$\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - (\lambda - 1)^{n-1} \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (\lambda - 1)^{-k} S_k(n).$$

Finalement,

$$\boxed{\chi_n(\lambda) = (\lambda - 1)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (\lambda - 1)^{n-k-1} S_k(n).}$$

Q42. Par la question **Q42.**, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_n(\lambda) &= (\lambda - 1)^n - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (\lambda - 1)^{n-k-1} S_k(n) \\
&= (\lambda - 1)^{n - \lfloor \log_2(n) \rfloor - 1} \underbrace{\left((\lambda - 1)^{\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1} - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} (\lambda - 1)^{\lfloor \log_2(n) \rfloor - k} S_k(n) \right)}_{= Q(\lambda)} \\
&= (\lambda - 1)^{n - \lfloor \log_2(n) \rfloor - 1} Q(\lambda).
\end{aligned}$$

Or

$$Q(1) = 0 - S_{\lfloor \log_2(n) \rfloor}(n) = -\sum_{m=2}^{n} D_{\lfloor \log_2(n) \rfloor}(m) \neq 0.$$

Donc 1 est racine de χ_n, de multiplicité $n - \lfloor \log_2(n) \rfloor - 1$. Or χ_n est le polynôme caractéristique de la matrice H_n. Ainsi $\boxed{\text{1 est valeur propre de } H_n\text{, de multiplicité } n - \lfloor \log_2(n) \rfloor - 1.}$