On remarque que toutes les variables aléatoires prennent un nombre fini de valeurs. Il n'y a donc pas de problème d'existence pour les espérances. Je n'évoquerai donc plus cela.

I. Fonction caractéristique

1. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a $\mathbb{E}\left(\exp\left(\mathrm{i}t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\cos\left(t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) + \mathrm{i}\mathbb{E}\left(\sin\left(t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right)$.

   La variable aléatoire $\cos\left(t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)$ est constante égale à $\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$ car cos est paire.

   Selon la formule de transfert, on a :

$$\mathbb{E}\left(\sin\left(t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = \sin\left(\frac{t}{2^k}\right)\mathbb{P}\left(\varepsilon_k = 1\right) + \sin\left(\frac{-t}{2^k}\right)\mathbb{P}\left(\varepsilon_k = -1\right) = \frac{\sin\left(\frac{t}{2^k}\right) - \sin\left(\frac{t}{2^k}\right)}{2} = 0$$

   donc $\mathbb{E}\left(\exp\left(\mathrm{i}t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\cos\left(t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) + \mathrm{i}\mathbb{E}\left(\sin\left(t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{t}{2^k}\right)\right) + 0\mathrm{i} = \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)$

   On a $\mathrm{e}^{it\mathrm{X}_n} = \prod_{k=1}^{n} \exp\left(\frac{\mathrm{i}t\varepsilon_k}{2^k}\right)$ or selon le lemme des coalitions, les variables aléatoires $\exp\left(\mathrm{i}t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)$ $(k \in [\![1,n]\!])$ sont mutuellement indépendantes.

   Ainsi $\Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\exp\left(\mathrm{i}t\frac{\varepsilon_k}{2^k}\right)\right)$ d'après le résultat admis par l'énoncé.

   On peut alors conclure que $\boxed{\Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right)}$

2. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que : $\forall u \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{t}{2^p}\right) \prod_{k=1}^{p} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$

   Initialisation : Pour $p = 0$, le produit vaut 1 et $2^0 = 1$ donc on a bien l'égalité voulue car $\sin(t) = \sin(t)$

   Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété au rang p.

   Soit $u \in \mathbb{R}$. On a $\sin\left(\frac{u}{2^{p+1}}\right) \prod_{k=1}^{p+1} \cos\left(\frac{u}{2^k}\right) = \left(\sin\left(\frac{u/2}{2^p}\right) \prod_{k=1}^{p} \cos\left(\frac{u/2}{2^k}\right)\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right)$

   Ainsi avec l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sin\left(\frac{u}{2^{p+1}}\right) \prod_{k=1}^{p+1} \cos\left(\frac{u}{2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}{2^p} \cos\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right)}{2^{p+1}} = \frac{\sin\left(u\right)}{2^{p+1}}$$

   Ce qui prouve l'hérédité.

   Conclusion : On a montré par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{t}{2^p}\right) \prod_{k=1}^{p} \cos\left(\frac{t}{2^k}\right) = \frac{\sin(t)}{2^p}$

   On peut conclure que $\boxed{\sin\left(\frac{t}{2^n}\right) \Phi_{\mathrm{X}_n}(t) = \frac{\sin(t)}{2^n}}$

3. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Premier cas : si $t \neq 0$: Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a $\dfrac{t}{2^n} \longrightarrow 0$ et pour n assez grand, on a $0 < \left|\dfrac{t}{2^n}\right| < \pi$

donc $\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) \sim \dfrac{t}{2^n}$ ainsi pour n assez grand, $\sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) \neq 0$

donc $\Phi_{X_n}(t) = \dfrac{\sin(t)}{2^n \sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right)}$ et $2^n \sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) \sim t$

d'où $2^n \sin\left(\dfrac{t}{2^n}\right) \longrightarrow t$ puis $\Phi_{X_n}(t) \longrightarrow \mathrm{sinc}(t)$

Deuxième cas : si $t = 0$: On a $\Phi_{X_n}(0) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{0}{2^k}\right) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = \mathrm{sinc}(0)$

On peut conclure que $\boxed{\text{la suite de fonctions } (\Phi_{X_n})_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement sur } \mathbb{R} \text{ vers sinc}}$

4. sinc est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par produit des fonctions continues sin et inverse

   Quand $t \to 0$, on a $\mathrm{sinc}(t) = \dfrac{\sin(t)}{t} \sim \dfrac{t}{t} = 1$

   donc $\displaystyle\lim_{t\to 0} \mathrm{sinc}(t) = 1 = \mathrm{sinc}(0)$ donc sinc est continue en 0

   Ainsi $\boxed{\text{sinc limite simple sur } \mathbb{R} \text{ de la suite } (\Phi_{X_n}) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

5. **Lemme** *Soit* X *et* Y *sont deux variables aléatoires indépendantes réelles sur le même espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *telles que* $X \sim -X$ *et* $Y \sim -Y$.
   On note $S = X + Y$. *On a alors* $S \sim -S$.

   Soit $\sigma \in \mathbb{R}$. On a
   $$(S = \sigma) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \Big((X = x) \bigcap (Y = \sigma - x)\Big)$$
   Comme il s'agit d'une réunion disjointe dénombrable et par indépendance des variables aléatoires :
   $$\mathbb{P}(S = \sigma) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}\Big((X = x) \bigcap (Y = \sigma - x)\Big) = \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = \sigma - x)$$
   Je note $I = X(\Omega) \bigcap (-X)(\Omega)$ de sorte que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in I \Longleftrightarrow -x \in I \text{ et } \forall x \in X(\Omega) \setminus I,\ \mathbb{P}(X = x) = 0 = \mathbb{P}(X = -x)$$
   car $X \sim -X$ et on a ainsi
   $$\mathbb{P}(S = \sigma) = \sum_{x \in I} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = \sigma - x)$$
   $$\mathbb{P}(S = -\sigma) = \sum_{x \in I} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = -\sigma - x) = \sum_{x \in I} \mathbb{P}(X = -x)\mathbb{P}(Y = \sigma + x)$$
   car $Y \sim -Y$.
   Comme il s'agit d'une famille sommable, et que l'application $t \mapsto -t$ est bijective de I vers I, on a :
   $$\mathbb{P}(S = -\sigma) = \sum_{x' \in I} \mathbb{P}(X = x')\mathbb{P}(Y = \sigma - x') = \mathbb{P}(S = \sigma)$$
   Ce qui prouve que $S \sim -S$

La preuve On procède par récurrence.

Pour l'initialisation, on remarque $X_1 = \varepsilon_1/2$ a même loi que $-X_1 = -\varepsilon_1/2$.

Pour l'hérédité, on utilise le lemme pour $X_{n+1} = X_n + \dfrac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}$ l'indépendance de X_n et de $\dfrac{\varepsilon_{n+1}}{2^{n+1}}$ provenant du lemme des coalitions.

Ainsi on peut conclure que $\boxed{X_n \text{ et } -X_n \text{ ont même loi pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in \mathbb{R}$.
On a $\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(\exp(\mathrm{i}tX_n)) = \mathbb{E}(\cos(tX_n)) + \mathrm{i}\mathbb{E}(\sin(tX_n))$
or $X_n \sim -X_n$ donc $\mathbb{E}(\sin(tX_n)) = \mathbb{E}(\sin(-tX_n)) = -\mathbb{E}(\sin(tX_n))$
donc $\mathbb{E}(\sin(tX_n)) = 0$ et $\Phi_{X_n}(t) = \mathbb{E}(\cos(tX_n)) = \varphi_n(t)$ ainsi $\varphi_n = \Phi_{X_n}$.
En utilisant 3, on conclut que $\boxed{\text{la suite de fonctions } (\varphi_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge simplement vers sinc sur } \mathbb{R}}$

7. Par l'absurde, on suppose que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$.
Alors la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers sa limite simple qui est sinc.
À partir d'un certain rang n_0, on a pour $n \geqslant n_0$ la fonction $\varphi_n - \mathrm{sinc}$ est bornée. et en notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme infine sur $\mathbb{R}$ on a
$$\|\varphi_n - \mathrm{sinc}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
On peut également remarquer que les fonctions φ_n et sinc sont bornées sur $\mathbb{R}$.
On considère la suite définie par $u_n = 2^{n+1}\pi$.
On a $\varphi_n(u_n) = \Phi_{X_n}(u_n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(2^{n-k}2\pi\right) = 1$ et $|\mathrm{sinc}(u_n)| = \left|\dfrac{\sin(u_n)}{u_n}\right| \leqslant \dfrac{1}{u_n}$
quand $n \to +\infty$, on a $u_n \to +\infty$ donc $\mathrm{sinc}(u_n) \to 0$ d'où
$$|\varphi_n(u_n) - \mathrm{sinc}(u_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
or on a $|\varphi_n(u_n) - \mathrm{sinc}(u_n)| \leqslant \|\varphi_n - \mathrm{sinc}\|_\infty$
donc par passage à la limite, on a $1 \leqslant 0$ ce qui est absurde
ainsi $\boxed{\text{La suite de fonctions } (\varphi_n)_{n\geqslant 1} \text{ ne converge pas uniformément sur } \mathbb{R}}$

II. Ecriture binaire

8. Soit $x = (x_j)_{j\in [\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$. On a $\forall j \in [\![1,n]\!],\ n-j \in \mathbb{N}$.
Comme $\mathbb{N}$ est stable par l'addition, la multiplication et l'exponentiation, alors $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \in \mathbb{N}\ (i)$
puis comme $\forall j \in [\![1,n]\!],\ x_j \leqslant 1$ et $2^{n-j} \geqslant 0$, on a :
$$\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} 2^{n-j} \leqslant 2^{n-1}\frac{1-(1/2)^n}{1-(1/2)} = 2^n\left(1-(1/2)^n\right) = 2^n - 1 \quad (ii)$$
On a reconnu une somme géométrique de raison $1/2 \in [0,1[$
Ainsi avec (i) et (ii), on a $\sum\limits_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} \in [\![0, 2^n-1]\!]$
Ainsi $\boxed{\Phi_n \text{ est bien définie}}$

9. Il est clair que $\boxed{\mathrm{Im}(\Phi_n) = \mathrm{A}_n}$ *En revanche la notation* Im *me semble réservée pour les morphismes en algèbre. j'écrirais plutôt :* $\Phi_n(\{0,1\}) = \mathrm{A}_n$

10. **Récurrence forte et finie** On montre par récurrence finie sur $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ que $k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$

Initilisation : On a $0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} 0 \times 2^{n-j} = \Phi_n(\tilde{0}_n)$ où $\tilde{0}_n$ est la suite finie nulle.

Ainsi $0 \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$ ce qui est l'initialisation.

Hérédité : Soit $k \in [\![1, 2^n - 1]\!]$. On suppose que $\forall p \in [\![0, k-1]\!]$, $p \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$. Montrons $k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$.

La division euclidienne de k par 2 nous fournit $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0,1\}$ tels que $k = 2q + r$

On remarque que $0 \leqslant q \leqslant k/2 < k$ car $k \in \mathbb{N}^*$ et donc $q \in [\![0, k-1]\!]$

Ceci nous fournit $(y_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ tel que $q = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j}$

De plus $q \leqslant k/2 \leqslant 2^{n-1} - 1/2 < 2^{n-1}$ donc $y_1 = 0$

Je définis alors $(x_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ par $x_n = r$ et $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $x_j = y_{j+1}$, de sorte que :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j} = \sum_{j=1}^{n-1} y_{j+1} 2^{n-j} + x_n 2^0 = \sum_{i=2}^{n} y_i 2^{n-i+1} + r = \sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j+1} + r = 2\sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j} + r = 2q + r$$

Ainsi $k = \Phi_n\left((x_j)_{j\in[\![1,n]\!]}\right) \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$

Conclusion : On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall k \in [\![0, 2^n - 1]\!],\ k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)}$

Récurrence finie avec un successeur Pour cette récurrence, l'initialisation est la même mais l'hérédité est plus laborieuse car on passe de k à $k+1$. Il faut donc avec l'écriture binaire de $k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j 2^{n-j} \in [\![0, 2^n - 2]\!]$ prouver l'existence de j_0 maximum des j tel que $y_j = 0$

On pose alors $x_{j_0} = 1$ et pour $j < j_0$, $x_j = 0$ et pour $j > j_0$, $x_j = y_j$.

Puis on prouve que $k + 1 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$ (facile mais pas drôle)

Récurrence infinie avec un successeur

On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\forall k \in [\![0, 2^n - 1]\!],\ k \in \mathrm{Im}(\Phi_n)$.

L'initialisation se fait sans problème pour $n = 1$ (fonction identité).

Pour l'hérédité, on suppose vrai la propriété pour n et on prend $k \in [\![0, 2^{n+1} - 1]\!]$.

Si $k \leqslant 2^n - 1$, on utilise l'hypothèse de récurrence avec k puis on décale les indices et on rajoute $x_1 = 0$.

Si $k > 2^n - 1$, on utilise l'hypothèse avec $k - 2^n$ puis on décale les indices et on rajoute $x_1 = 1$.

11. On montre en 8 que l'application $\Phi_n : \{0,1\}^n \longrightarrow [\![0, 2^n - 1]\!]$ est bien définie puis qu'elle est surjective en 10 de plus, on a $|\{0,1\}^n| = 2^n = |[\![0, 2^n - 1]\!]|$. Ainsi $\boxed{\Phi_n \text{ est bijective}}$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathrm{D}_n$. On peut alors trouver $(y_j)_{j\in[\![1,n]\!]} \in \{0,1\}^n$ tel que $k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{2^j}$

On définit alors $(x_j)_{j\in[\![1,n+1]\!]} \in \{0,1\}^{n+1}$ par $x_{n+1} = 0$ et $\forall j \in [\![1, n]\!],\ x_j = y_j$.

de sorte que $k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{2^j} + 0 = \sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} \in \mathrm{D}_{n+1}$

On vient de montrer que $\mathrm{D}_n \subset \mathrm{D}_{n+1}$ et donc $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{D}_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante au sens de l'inclusion}}$

Soit $k \in \mathrm{D}$. Ceci nous fournit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \in \mathrm{D}_n$ puis $(x_j)_{j \in \llbracket 1,n \rrbracket} \in \{0,1\}^n$ tel que $k = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j}$.

Comme en 8, on a $0 \leqslant k \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1-(1/2)^n < 1$

d'où $0 \leqslant k < 1$. On a bien vérifié que $\boxed{\mathrm{D} \subset [0,1[}$

13. Soit $(x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. On a $\lfloor 2^n x \rfloor \leqslant 2^n x < \lfloor 2^n x \rfloor + 1$ par définition de la partie entière.

    Par division par $2^n > 0$, on obtient $\boxed{\pi_n(x) \leqslant x < \pi_n(x) + \dfrac{1}{2^n}}$

14. Soit $x \in [0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$. On a par définition des π_j et puis par télescopage :

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j} = \sum_{j=1}^{k} 2^j \frac{(\pi_j(x) - \pi_{j-1}(x))}{2^j} = \pi_k(x) - \pi_0(x)$$

    Or $\pi_0(x) = \dfrac{\lfloor 2^0 x \rfloor}{2^0} = \lfloor x \rfloor = 0$ car $0 \leqslant x < 1$. D'où $\boxed{\pi_k(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{d_j(x)}{2^j}}$

15. En posant $\mathrm{A} = 2^j x$, on a $d_j(x) = \lfloor 2\mathrm{A} \rfloor - 2\lfloor \mathrm{A} \rfloor \in \mathbb{Z}$.
    On a $\lfloor \mathrm{A} \rfloor \leqslant \mathrm{A} < \lfloor \mathrm{A} \rfloor + 1$ donc $2\lfloor \mathrm{A} \rfloor \leqslant 2\mathrm{A} < 2\lfloor \mathrm{A} \rfloor + 2$
    d'où $2\lfloor \mathrm{A} \rfloor \leqslant \lfloor 2\mathrm{A} \rfloor < 2\lfloor \mathrm{A} \rfloor + 2$ et donc $0 \leqslant d_j(x) < 2$ ainsi $\boxed{d_j(x) \in \{0,1\}}$

16. $\Rightarrow$: On suppose que $x \in \mathrm{D}_n$.

    On peut alors écrire $2^n x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$ avec $(x_j)_{j \in \llbracket 1,n \rrbracket} \in \{0,1\}^n$

    Ainsi $2^n x = \Phi_n\left((x_j)_{j \in \llbracket 1,n \rrbracket}\right) \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ (vu en 8)

    $\Leftarrow$: On suppose que $2^n x \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$
    Comme $\Phi_n : \{0,1\}^n \longrightarrow \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ est une bijection d'après 11 (ou 10),
    cela nous fournit $(x_j)_{j \in \llbracket 1,n \rrbracket} \in \{0,1\}^n$ tel que $2^n x = \Phi_n\left((x_j)_{j \in \llbracket 1,n \rrbracket}\right) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j 2^{n-j}$

    donc $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{2^j} \in \mathrm{D}_n$

    On a bien l'équivalence $\boxed{x \in \mathrm{D}_n \iff 2^n x \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket}$

17. L'application $\Psi_n : \{0,1\}^n \longrightarrow \mathrm{D}_n$ est bien définie est surjective par définition de D_n
    D'après 16, $\mathrm{D}_n = \left\{ \dfrac{k}{2^n} \mid k \in \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket \right\}$ et l'application $t \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{t}{2^n} \in \mathbb{R}$ est bijective
    Ainsi $|\mathrm{D}_n| = 2^n = |\{0,1\}^n|$ et l'application $\boxed{\Psi_n \text{ est bien bijective}}$

18. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On a $d_i(x) = \lfloor 2^i x \rfloor - 2\lfloor 2^{i-1} x \rfloor$ (comme en 15).

    On pose pour $j \geqslant n+1$, $x_j = 0$ de sorte que $x = \sum\limits_{j=1}^{\mathrm{N}} \frac{x_j}{2^j}$ pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n$.

    On a $2^i x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j} = \sum_{j=1}^{i} \frac{2^i x_j}{2^j} + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j}$ en prenant comme convention $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j} = 0$ si $i \geqslant n$

    Si $n \geqslant i+1$, on a $0 \leqslant \displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i x_j}{2^j} \leqslant \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2^i}{2^j} = \frac{2^i}{2^{i+1}} \frac{1-(1/2)^{n-i}}{1-(1/2)} = 1-(1/2)^{n-i} < 1$

dans tous les cas, on a : $\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n}\frac{2^i x_j}{2^j}\in[0,1[$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{i}\frac{2^i x_j}{2^j}=\sum_{j=1}^{i}2^{i-j}x_j\in\mathbb{N}$

d'où $\lfloor 2^i x\rfloor=\displaystyle\sum_{j=1}^{i}2^{i-j}x_j$ et de même $\lfloor 2^{i-1}x\rfloor=\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1}2^{i-1-j}x_j$

donc $d_i(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{i}2^{i-j}x_j-\sum_{j=1}^{i-1}2^{i-j}x_j=2^0x_i=x_i$

Soit $k\in\mathbb{N}$. On a : $\pi_k(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{d_j(x)}{2^j}=\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{2^j}$ d'après 14 car $x\in\mathrm{D}_n\subset[0,1[$

Comme pour $j\geqslant n+1$, on a $x_j=0$, on peut conclure que $\boxed{\pi_k(x)=\displaystyle\sum_{j=1}^{\min(n,k)}\frac{x_j}{2^j}}$

III. Développement dyadique, loi de composition

19. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme les U_k sont presque sûrement à valeurs dans $\{0,1\}$, alors Y_n est sûrement à valeurs dans D_n or $\mathrm{D}_n\subset[0,1[$ ainsi $(\mathrm{Y}_n\in[0,1[)=\Omega$ et donc $\boxed{\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n\in[0,1[)=1}$

20. **Lemme :** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On va montrer que pour tout $(x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}$ et $(y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\in\{0,1\}^{n+1}$, on a l'équivalence :

$$\Psi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)\leqslant\Psi_{n+1}\left((y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)\iff\left(x_1<y_1\quad\text{ou}\quad\begin{cases}x_1=y_1\\\Psi_n\left((x_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)\leqslant\Psi_n\left((y_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)\end{cases}\right)$$

On va faire cette preuve par disjonctions (exhaustives) de cas.

<u>Premier cas si $x_1<y_1$:</u> Alors on a $x_1=0$ et $y_1=1$ Ainsi

$$\Psi_{n+1}\left((y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)-\Psi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)=\frac{1}{2}+\sum_{j=2}^{n+1}\frac{y_j-x_j}{2^j}\geqslant\frac{1}{2}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{2^j}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2}=(1/2)^{n+1}>0$$

donc $\Psi_{n+1}\left((y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)>\Psi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)$

<u>Deuxième cas si $x_1=y_1$ et $\Psi_n\left((x_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)\leqslant\Psi_n\left((y_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)$:</u> Alors

$$\Psi_{n+1}\left((y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)-\Psi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)=\sum_{j=2}^{n+1}\frac{y_j}{2^j}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{x_j}{2^j}=\Psi_n\left((y_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)-\Psi_n\left((x_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)\geqslant 0$$

donc $\Psi_{n+1}\left((y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)\geqslant\Psi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)$

<u>Troisième cas si $x_1>y_1$:</u> à l'aide du premier cas, on a : $\Psi_{n+1}\left((y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)<\Psi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)$

<u>Quatrième cas si $x_1=y_1$ et $\Psi_n\left((x_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)>\Psi_n\left((y_{j+1})_{1\leqslant j\leqslant n}\right)$:</u>
à l'aide du deuxième cas, on a $\Psi_{n+1}\left((y_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)\leqslant\Psi_{n+1}\left((x_j)_{1\leqslant j\leqslant n+1}\right)$

Propriété : On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que : pour tout choix de la suite (U_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, en posant Y_n et F_n comme ci-dessus on a : $\forall x \in \mathrm{D}_n,\ \mathrm{F}_n(x) = x + \frac{1}{2^n}$

Initialisation : Pour $n = 1$, On a $\mathrm{Y}_1 = \mathrm{U}_1/2$ et $\mathrm{D}_1 = \{0, 1/2\}$

On a $\mathrm{F}_1(0) = \mathbb{P}(\mathrm{U}_1/2 \leqslant 0) = \mathbb{P}(\mathrm{U}_1 = 0) = 1/2 = 0 + \dfrac{1}{2^1}$

et $\mathrm{F}_1(1/2) = \mathbb{P}(\mathrm{U}_1/2 \leqslant 1/2) = \mathbb{P}(\mathrm{U}_1 \leqslant 1) = 1 = 1/2 + \dfrac{1}{2^1}$

On a bien pour $n = 1$: $\forall x \in \mathrm{D}_n,\ \mathrm{F}_n(x) = x + \dfrac{1}{2^n}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang n.

Soit $x \in \mathrm{D}_{n+1}$. On peut écrire $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}$ avec $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n+1} \in \{0,1\}^{n+1}$.

Ainsi d'après le lemme de comparaison :

$$(\mathrm{Y}_{n+1} \leqslant x) = \left(\mathrm{U}_1 = x_1, \sum_{j=2}^{n+1} \frac{\mathrm{U}_j}{2^j} \leqslant \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}\right) \bigcup (\mathrm{U}_1 < x_1)$$

Par réunion disjointe puis par indépendance avec le lemme des coalitions, on a :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n+1} \leqslant x) = \mathbb{P}(\mathrm{U}_1 = x_1)\, \mathbb{P}\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{\mathrm{U}_j}{2^j} \leqslant \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}\right) + \mathbb{P}(\mathrm{U}_1 < x_1)$$

Je note $x' = 2\displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}}{2^{k+1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_{j+1}}{2^j} \in \mathrm{D}_n$ et on a $\left(\displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} \frac{\mathrm{U}_j}{2^j} \leqslant \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{U}_{j+1}}{2^j} \leqslant x'\right)$

On a $\mathbb{P}(\mathrm{U}_1 = x_1) = 1/2$ et on peut appliquer l'hypothèse à la suite $(\mathrm{U}_{k+1})_{k \geqslant 1}$. Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=2}^{n+1} \frac{\mathrm{U}_j}{2^j} \leqslant \sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j}\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{U}_{j+1}}{2^j} \leqslant x'\right) = x' + \frac{1}{2^n} \text{ par hypothèse de récurrence}$$

Si $x_1 = 0$, on a $\mathbb{P}(\mathrm{U}_1 < x_1) = 0$ et si $x_1 = 1$, on a $\mathbb{P}(\mathrm{U}_1 < x_1) = 1/2$. Dans tous les cas $\mathbb{P}(\mathrm{U}_1 < x_1) = \dfrac{x_1}{2}$

Ainsi $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n+1} \leqslant x) = \dfrac{1}{2}\left(x' + \dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{x_1}{2} = \dfrac{x_1}{2} + \displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} \frac{x_j}{2^j} + \frac{1}{2^{n+1}} = x + \frac{1}{2^{n+1}}$

Ce qu'il fallait démontrer

Conclusion : On a bien montré par récurrence que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathrm{D}_n,\ \mathrm{F}_n(x) = x + \dfrac{1}{2^n}}$

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathrm{D}_n$.

Si $x = 0$, on a $\mathrm{G}_n(0) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < 0) = 0$ car $(\mathrm{Y}_n \in [0, 1[\,)$ est presque sûr.

Si $x \neq 0$, alors : $\forall y \in \mathrm{D}_n,\ y < x \Longleftrightarrow y \leqslant x - \dfrac{1}{2^n}$ et $x - \dfrac{1}{2^n} \in \mathrm{D}_n$ en utilisant 16

Ainsi $(\mathrm{Y}_n < x) = \left(\mathrm{Y}_n \leqslant x - \dfrac{1}{2^n}\right)$

donc $\mathrm{G}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{Y}_n \leqslant x - \dfrac{1}{2^n}\right) = \mathrm{F}_n\left(x - \dfrac{1}{2^n}\right) = x - \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n}$

Dans tous les cas, on a $\boxed{\mathrm{G}_n(x) = x}$

22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathrm{D}_n$. On a $(\mathrm{Y}_n = x) \bigcup (\mathrm{Y}_n < x) = (\mathrm{Y}_n \leqslant x)$ (réunion disjointe) donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant x) - \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < x) = \mathrm{F}_n(x) - \mathrm{G}_n(x) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{|\mathrm{D}_n|}$$

Ainsi $\boxed{\text{pour tout entier naturel non nul } n, \mathrm{Y}_n \text{ suit une loi uniforme sur } \mathrm{D}_n}$

23. *Remarque : il est sans doute possible de faire une preuve moins formalisée.*

En utilisant 14 et regardant la preuve de 18, on voit que $\forall x \in \mathrm{D}_n,\ x = \pi_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x)}{2^k}$

Je pose alors $\mathrm{V}_k = d_k(\mathrm{X}_n)$ et on a bien $\mathrm{X}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_k}{2^k}$

On remarque que $\forall x \in \mathrm{D}_n,\ \Psi_n^{-1}(x) = (d_1(x), \dots d_n(x))$ ainsi je note $\mathrm{W} = \Psi_n^{-1}(\mathrm{X}_n) = (\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n)$.

Comme X_n suit une loi uniforme sur D_n et que $\Psi_n : \{0,1\}^n \longrightarrow \mathrm{D}_n$ bijective
alors W suit une loi uniforme sur $\{0,1\}^n$
Soit $j \in [\![1, n]\!]$. V_j est alors presque sûrement à valeurs dans $\{0,1\}$.
Soit $\varepsilon \in \{0,1\}$. On a

$$\mathbb{P}(\mathrm{V}_j = \varepsilon) = \mathbb{P}(\mathrm{W} \in \{(v_1, \dots v_n) \in \{0,1\}^n \mid v_j = \varepsilon\}) = \frac{|\{(v_1, \dots v_n) \in \{0,1\}^n \mid v_j = \varepsilon\}|}{|\{0,1\}^n|} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $\mathrm{V}_j \sim \mathcal{B}(1/2)$
En faisant de même avec $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{V}_j = \varepsilon_j)\right) = \frac{|\{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\}|}{|\{0,1\}^n|} = \frac{1}{2^n}$$

donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} (\mathrm{V}_j = \varepsilon_j)\right) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} \mathbb{P}(\mathrm{V}_j = \varepsilon_j)$;
ce qui prouve l'indépendance mutuelle des variables aléatoires $\mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe bien des variables aléatoires } \mathrm{V}_1, \dots, \mathrm{V}_n \text{ mutuellement indépendantes, suivant} \\ \text{chacune une loi de Bernoulli de paramètre } 1/2 \text{, et telles que } \mathrm{X}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{V}_k}{2^k}\end{array}}$$

IV. Développement dyadique, étude asymptotique

24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathrm{Y}_n \leqslant \mathrm{Y}_{n+1}$ donc $(\mathrm{Y}_{n+1} \leqslant x) \subset (\mathrm{Y}_n \leqslant x)$ ainsi

$$\mathrm{F}_{n+1}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_{n+1} \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant x) = \mathrm{F}_n(x)$$

ainsi $\boxed{\text{les suites } (\mathrm{F}_n(x))_{n \geqslant 1} \text{ et } (\mathrm{G}_n(x))_{n \geqslant 1} \text{ sont décroissantes}}$ (analogue pour $(\mathrm{G}_n(x))$)

25. Soit $x \in \mathbb{R}$. les suites $(\mathrm{F}_n(x))_{n \geqslant 1}$ et $(\mathrm{G}_n(x))_{n \geqslant 1}$ sont décroissantes et minorées par 0
Elles sont donc convergentes.
On en déduit $\boxed{\text{la convergence simple des suites de fonctions } (\mathrm{F}_n)_{n \geqslant 1} \text{ et } (\mathrm{G}_n)_{n \geqslant 1} \text{ sur } \mathbb{R}}$

26. Soit $x \in \mathrm{D}$. Cela nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathrm{D}_\mathrm{N}$.
D'après 11., on a alors $\forall n \geqslant \mathrm{N},\ x \in \mathrm{D}_n$.
Ainsi d'après les questions 20 et 21, on a : $\forall n \geqslant \mathrm{N},\ \mathrm{F}_n(x) = x + 1/2^n$ et $\mathrm{G}_n(x) = x$
et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n(x) = x$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{G}_n(x) = x$
De plus d'après 18, les évènements $(\mathrm{Y}_n \leqslant 1)$ et $(\mathrm{Y}_n < 1)$ sont presque sûrs
Ainsi $\mathrm{F}_n(1) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant 1) = 1 = \mathrm{G}_n(1) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < 1)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n(1) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{G}_n(1) = 1$
On a montré $\boxed{\forall x \in \mathrm{D} \cup \{1\},\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n(x) = x \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{G}_n(x) = x}$

27. Je note F (respectivement G) les limites simples de (F_n) et de (G_n) sur $\mathbb{R}$
Soit $x \leqslant y$ dans $[0,1]$. On a $\mathrm{F}_n(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant x) \leqslant \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant y) = \mathrm{F}_n(y)$ pour tout $n \geqslant 1$
Par passage à la limite, on a $\mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{F}(y)$ ainsi F est croissante sur $[0,1]$.

On suppose que $x \neq 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\pi_n(x) \leqslant x < \pi_n(x) + \dfrac{1}{2^n}$ d'après 13
De plus $\pi_n(x) \in \mathrm{D}_n \subset \mathrm{D}$ d'après 15 et 14
de plus avec 16, on a $\pi_n(x) + \dfrac{1}{2^n} \in \mathrm{D}_n \cup \{1\} \subset \mathrm{D} \cup \{1\}$
d'après la question précédente, on a donc $\mathrm{F}(\pi_n(x)) = \pi_n(x)$ et $\mathrm{F}\left(\pi_n(x) + \dfrac{1}{2^n}\right) = \pi_n(x) + \dfrac{1}{2^n}$
En utilisant la croissance de F on a $\pi_n(x) \leqslant \mathrm{F}(x) \leqslant \pi_n(x) + \dfrac{1}{2^n}$
Donc $|\pi_n(x) - x| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et $|\pi_n(x) - \mathrm{F}(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ donc $|\mathrm{F}(x) - x| \leqslant \dfrac{2}{2^n}$
Comme $\dfrac{2}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on conclut que $\mathrm{F}(x) = x$ et pour $\mathrm{G}(x) = x$ c'est analogue.
On a montré $\boxed{\forall x \in [0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{F}_n(x) = x \text{ et } \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{G}_n(x) = x}$

28. On considère un intervalle non vide $\mathrm{I} \subset [0,1]$. Je note $a = \inf \mathrm{I}$ et $b = \sup \mathrm{I}$.
On commence par un premier cas : $\mathrm{I} = [a,b] \subset [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $(\mathrm{Y}_n \in \mathrm{I}) = (\mathrm{Y}_n \leqslant b) \setminus (\mathrm{Y}_n < a)$. Comme $(\mathrm{Y}_n < a) \subset (\mathrm{Y}_n \leqslant b)$, on a
$$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in \mathrm{I}) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant b) - \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n < a) = \mathrm{F}_n(b) - \mathrm{G}_n(a)$$
Par passage à la limite, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in \mathrm{I}) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{G}(a) = b - a = \sup \mathrm{I} - \inf \mathrm{I}$
De même on trouve
$\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in]a,b[) = \mathrm{G}_n(b) - \mathrm{F}_n(a)$; $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in [a,b[) = \mathrm{G}_n(b) - \mathrm{G}_n(a)$ et $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in]a,b]) = \mathrm{F}_n(b) - \mathrm{F}_n(a)$
Dans tous les cas on conclut que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in \mathrm{I}) = \ell(\mathrm{I}) \text{ avec } \ell(\mathrm{I}) = \sup \mathrm{I} - \inf \mathrm{I}}$

29. **Sans le "En déduire" :**
En utilisant la formule de transfert on a $\mathbb{E}(f(\mathrm{Y}_n)) = \sum\limits_{y \in \mathrm{D}_n} f(y)\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = y) = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} f\left(\dfrac{k}{2^n}\right)$.
En utilisant les sommes de Riemann (méthode des rectangles à gauche) avec la fonction continue f sur le segment $[0,1]$, on a
$$\frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} f\left(\frac{k}{\mathrm{N}}\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \int_0^1 f$$

Comme toute suites extraites d'une suite convergente, convergent vers la même limite,

on a : $\boxed{\mathbb{E}(f(\mathrm{Y}_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f}$

Avec le "En déduire" : Pour tout intervalle I de $[0,1]$, on a

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\mathrm{I}}(\mathrm{Y}_n)\right) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \in \mathrm{I}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell(\mathrm{I}) = \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathrm{I}}$$

Pour g fonction en escaliers sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

on peut écrire $g = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \mathbf{1}_{\mathrm{I}_k}$ où $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, les I_k sont des intervalles de $[0,1]$ et les $a_k \in \mathbb{R}$

Comme $\mathbb{E}\left(g(\mathrm{Y}_n)\right) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\mathrm{I}_k}(\mathrm{Y}_n)\right)$ et $\int_0^1 g = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} a_k \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathrm{I}_k}$

Par linéarité, des limites des suites, de l'espérance et des intégrales, on a : $\mathbb{E}\left(g(\mathrm{Y}_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 g$.

Soit f maintenant f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Selon les théorèmes d'approximation uniforme du cours, on peut trouver g en escalier sur $[0,1]$ tels que $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$ où $\|\cdot\|_\infty$ est la norme infinie prise sur les fonctions bornées à valeurs réelles sur $[0,1]$.
D'après ce qui précède $\mathbb{E}\left(g(\mathrm{Y}_n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 g$

ce qui nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}$, $\left|\mathbb{E}\left(g(\mathrm{Y}_n)\right) - \int_0^1 g\right| \leqslant \varepsilon/3$.

Soit $n \geqslant \mathrm{N}$.
On a $|f(\mathrm{Y}_n) - g(\mathrm{Y}_n)| \leqslant \varepsilon/3$ donc $|\mathbb{E}\left(f(\mathrm{Y}_n)\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{Y}_n)\right)| = |\mathbb{E}\left(f(\mathrm{Y}_n) - g(\mathrm{Y}_n)\right)| \leqslant \varepsilon/3$.
et $\left|\int_0^1 f - \int_0^1 g\right| \leqslant \int_0^1 |f-g| \leqslant \|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon/3$ donc

$$\left|\mathbb{E}\left(f(\mathrm{Y}_n)\right) - \int_0^1 f\right| \leqslant |\mathbb{E}\left(f(\mathrm{Y}_n)\right) - \mathbb{E}\left(g(\mathrm{Y}_n)\right)| + \left|\mathbb{E}\left(g(\mathrm{Y}_n)\right) - \int_0^1 g\right| + \left|\int_0^1 g - \int_0^1 f\right| \leqslant \varepsilon$$

On vient de montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ n \geqslant \mathrm{N} \Longrightarrow \left|\mathbb{E}\left(f(\mathrm{Y}_n)\right) - \int_0^1 f\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi pour toute fonction f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, $\boxed{\text{la suite } (\mathbb{E}(f(\mathrm{Y}_n)))_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \int_0^1 f}$

30. Soit $t \in \mathbb{R}$. On considère $(\mathrm{X}_n)_n$ et $(\varepsilon_k)_k$ définies comme en I.

On pose pour $k \geqslant 1$, $\mathrm{U}_k = \dfrac{1+\varepsilon_k}{2}$ de sorte que (U_k) est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(1/2)$. On pose $\mathrm{Y}_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\mathrm{U}_k}{2^k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathrm{Y}_n = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{X}_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) = \dfrac{\mathrm{X}_n}{2} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$

donc $\mathrm{X}_n = 2\mathrm{Y}_n - 1 + \dfrac{1}{2^n}$ et $\cos(t\mathrm{X}_n) = \cos(2t\mathrm{Y}_n - t)\cos(t/2^n) - \sin(2t\mathrm{Y}_n - t)\sin(t/2^n)$ donc

$$\mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n)) = \cos(t/2^n)\,\mathbb{E}(\cos(2t\mathrm{Y}_n - t)) - \sin(t/2^n)\,\mathbb{E}(\sin(2t\mathrm{Y}_n - t))$$

On a $\cos(t/2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\sin(t/2^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

En utilisant les fonctions $x \longmapsto \cos(2tx - t)$ et $x \longmapsto \sin(2tx-t)$ qui sont bien continues sur $[0,1]$, on a d'après le résultat précédent :

$$\mathbb{E}(\cos(2t\mathrm{Y}_n - t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \cos(2tx-t)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(\sin(2t\mathrm{Y}_n - t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sin(2tx-t)\mathrm{d}x$$

donc $\mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \cos(2tx-t)\mathrm{d}x$

Si $t = 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 \cos(2tx-t)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1 = \operatorname{sinc}(0)$

Si $t \neq 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 \cos(2tx-t)\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(2tx-t)}{2t}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\sin(t) - \sin(-t)}{2t} = \operatorname{sinc}(t)$

On retrouve bien $\boxed{\mathbb{E}(\cos(t\mathrm{X}_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{sinc}(t)}$ obtenu à la question 6

31. La fonction $h : t \mapsto \dfrac{t-1}{\ln(t)}$ est continue sur $]0,1[$.

Quand $t \longrightarrow 0$, on a $t - 1 \longrightarrow -1$ et $\ln(t) \longrightarrow -\infty$ et ainsi $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 0$

Quand $t \longrightarrow 1$, on a $\ln(t) \sim t - 1$ donc $h(t) \sim 1$ et ainsi $\lim\limits_{t\to 1} h(t) = 1$

donc h admet un prolongement continue sur $[0,1]$

On en déduit $\boxed{\text{la convergence de } \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 h}$ (intégrale faussement impropre)

Soit $t \in]0,1[$. En utilisant 29 avec la fonction $f : x \longmapsto t^x$ qui est continue sur $[0,1]$.

On trouve que $\mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}x$.

or $\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln(t)}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{x\ln(t)}}{\ln(t)}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{\mathrm{e}^{\ln(t)} - \mathrm{e}^0}{\ln(t)} = h(t)$

Je note $h_n : t \longmapsto \mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}_n})$.

(i) On vient de voir que la suite de fonction $(h_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers h sur $]0,1[$

(ii) De plus h est continue sur sur $]0,1[$

(iii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $t \in]0,1[$.

On a $h_n(t) = \mathbb{E}\left(t^{\mathrm{Y}_n}\right) = \displaystyle\sum_{z\in \mathrm{D}_n} t^z \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n = z) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1} t^{j/2^n}$ par formule de transfert

ainsi h_n est continue sur $]0,1[$.

(iV) Soit $t \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leqslant t^{\mathrm{Y}_n} \leqslant 1$ car Y_n est à valeur positives.

Ainsi on a l'hypothèse de domination :

$$\forall t \in]0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |h_n(t)| = \mathbb{E}\left(t^{\mathrm{Y}_n}\right) \leqslant 1$$

et $t \longmapsto 1$ est continue et intégrable sur $]0,1[$

Conclusion : Avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique et on a l'existence des membres et l'égalité

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \mathbb{E}(t^{\mathrm{Y}_n})\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\mathrm{d}t$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_0^1 h_n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1}\int_0^1 t^{j/2^n}\mathrm{d}t = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{2^n-1}\frac{1}{1+\frac{j}{2^n}}$$

or en utilisant les sommes de Riemann avec la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ continue sur $[0,1]$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{1+k/\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln(2)$ (suite extraite) et ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$

V. Dénombrabilité

32. On remarque que chaque ensemble D_n est fini de cardinal 2^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

    Ainsi $\mathrm{D} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\mathrm{D}_n$ est une réunion dénombrable d'ensemble fini, donc D est fini ou dénombrable.

    Et ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{D}_n \subset \mathrm{D}$ donc D n'est pas fini d'où $\boxed{\text{l'ensemble D est dénombrable}}$

33. On considère $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N}/\ x \notin f(x)\}$. On a $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

    Soit a l'antécédent de A par f de sorte que $f(a) = \mathrm{A}$

    On a alors $a \in \mathrm{A} \Longleftrightarrow a \notin \mathrm{A}$ ce qui est absurde.

    $\boxed{\text{Il n'existe pas d'application } f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \text{ bijective}}$

34. On considère $\varphi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

    Analyse : Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} = \Phi(\mathrm{A}) = \varphi$

    Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = 1 \Longleftrightarrow \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(n) = 1 \Longleftrightarrow n \in \mathrm{A}$

    donc $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ ce qui prouve l'unicité

    Synthèse : Je pose $\mathrm{A} = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = 1\}$ Soit $n \in \mathbb{N}$.

    Si $n \in \mathrm{A}$, alors $\varphi(n) = 1 = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(n)$

    Si $n \notin \mathrm{A}$, alors $\varphi(n) = 0 = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(n)$

    Ainsi φ et $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} : \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(n)$

    donc $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} = \varphi$ (existence)

    Conclusion : On a montré que tout élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ avait un unique antécédent par Φ.

    Ainsi $\boxed{\text{l'application } \Phi \text{ est bijective}}$

35. Soit $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x_n}{2^{n+1}}$ étant à termes positifs, on a par calcul dans $[0,+\infty]$:

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{2^{n+1}} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 < +\infty$$

pour la majoration on a reconnu une série géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$.
Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme $\Psi((x_n)_n) \in [0,1]$.
d'où $\boxed{\text{l'application } \Psi \text{ est bien définie}}$

Je prends les suites (y_n) et (z_n) définies par $y_0 = 0,\ z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ y_n = 1$ et $z_n = 0$
On a $(y_n) \neq (z_n)$ éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\Psi((y_n)_n) = 1/2 = \Psi((z_n)_n)$ (somme géométrique)
donc $\boxed{\text{l'application } \Psi \text{ n'est pas injective}}$

<u>Premier cas : soit $\mathrm{X} = 1$.</u> Je considère la suite $(x_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ constante égale 1.
On a alors $\Psi((x_n)_n) = 1 = \mathrm{X}$

<u>Deuxième cas : soit $\mathrm{X} \in [0,1[$.</u> Je définis la suite (x_n) par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = d_{n+1}(\mathrm{X})$
D'après 15, on a $(x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et pour $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on a selon 14,

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{d_{n+1}(\mathrm{X})}{2^{n+1}} = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}+1} \frac{d_j(\mathrm{X})}{2^j} = \pi_{\mathrm{N}+1}(\mathrm{X})$$

or d'après 13, on a $\pi_{\mathrm{N}+1}(\mathrm{X}) \leqslant \mathrm{X} < \pi_{\mathrm{N}+1}(\mathrm{X}) + \frac{1}{2^{\mathrm{N}+1}}$ d'où

$$\left| \mathrm{X} - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{x_n}{2^{n+1}} \right| \leqslant \frac{1}{2^{\mathrm{N}+1}}$$

Ceci prouve la convergence de la série $\sum_{n=\geqslant 0} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ de somme X.
Donc $\mathrm{X} = \Psi((x_n)) \in \Psi\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)$
<u>Conclusion :</u> On vient de montrer que $\forall \mathrm{X} \in [0,1],\ \exists x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ \Psi(\mathrm{X}) = x$
Ce qui signifie que $\boxed{\Psi \text{ est surjective}}$

36. **Propriétés préliminaires :** On remarque les propriétés suivantes de Ψ et D :

- **(i)** D est stable par division par 2, $\forall x \in \mathrm{D},\ |2x-1| \in \mathrm{D} \cup \{1\}$
  et $\forall x, y \in \mathrm{D},\ x + y < 1 \Longrightarrow x + y \in \mathrm{D}$
- **(ii)** L'image d'une suite stationnaire à valeurs dans $\{0,1\}$ par Ψ est à valeur dans $\mathrm{D} \cup \{1\}$.
- **(iii)** 1 (respectivement 0) n'a qu'un seul antécédent par Ψ qui est la suite constante égale à 1 (respectivement à 0).
- **(iv)** Tout élément de $]0,1[\setminus \mathrm{D}^*$ admet un seul antécédent par Ψ qui n'est pas stationnaire.
- **(v)** Chaque élément de D^* admet exactement deux antécédents par Ψ qui sont stationnaires l'une à 1 et l'autre à 0.

- À ce stade du sujet nous admettrons les trois premières propriétés.

  Soit $x \neq y$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Psi(x) = \Psi(y)$.
  On a alors l'existence de $i_0 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$ car toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum. Sans perte de généralité, on suppose que $x_{i_0} = 0$ et $y_{i_0} = 1$.
  Il suffira alors d'établir (à l'aide de (ii) et de de la question précédente) que :

$$\forall n > i_0,\ x_n = 1 \ \text{ et } \ y_n = 0. \qquad (\star)$$

On aura alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in \mathrm{D}$.

Ce qui prouvera bien que les éléments de $]0,1[\setminus \mathrm{D}^*$ admettent au plus un antécédent par Ψ c'est à dire **(iv)**.

De plus vue la configuration de x et y, $\Psi(x)$ (qui est élément de D^*) admettra exactement deux antécédents ce qui permettra facilement de conclure quant à **(v)** car on sait que tout élément de D admet un antécédent par Ψ qui stationne à 0.

Il reste donc à établir $(\star)$!

On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$ donc $\displaystyle\sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{i_0+1}} + \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{y_n}{2^{n+1}}$

d'où $\displaystyle 1 = \sum_{n=i_0+1}^{+\infty} \frac{x_n - y_n}{2^{n-i_0}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+i_0} - y_{k+i_0}}{2^k}$

Je note pour $k \in \mathbb{N}^*$, $z_k = x_{k+i_0} - y_{k+i_0}$ et on a $z_k \in \{0, 1, -1\}$.

Pour obtenir le résultat voulu il suffit d'établir que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $x_{k+i_0} - y_{k+i_0} = z_k = 1$

Par l'absurde, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $z_p \neq 1$

On a $\displaystyle 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z_k}{2^k}$ et on remarque que : $\displaystyle 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1 - z_k}{2^k} = 0$

d'où $\displaystyle 0 = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1 - z_k}{2^k} + \frac{1 - z_p}{2^p} + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1 - z_k}{2^k}$

Or $\forall k \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\dfrac{1 - z_k}{2^k} \geqslant 0$ et $\dfrac{1 - z_p}{2^p} > 0$

d'où $0 > 0$ ce qui est absurde et ce qui permet de conclure.

Λ **bien définie :** Soit $x = (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On a $\Psi(x) \in [0, 1]$.

D'après les remarques précédentes, on a :

$$(\Psi(x) \in [0,1[\setminus \mathrm{D}^*) \text{ ou } (\Psi(x) \in \mathrm{D} \cup \{1\} \text{ et } x \text{ stationne à } 1) \text{ ou } (\Psi(x) \in \mathrm{D}^* \text{ et } x \text{ stationne à } 0)$$

ainsi tous les cas sont envisagés. De plus $[0, 1[$ est stable par $t \mapsto \dfrac{t}{2}$ et par $t \mapsto \dfrac{1+t}{2}$,

donc si $\Psi(x) \neq 1$ alors $\Lambda(x) \in [0, 1[$ et si $\Psi(x) = 1$ alors x stationne à 1 et $\Lambda(x) = \dfrac{1}{2} \in [0, 1[$

Ainsi $\Lambda(x)$ et bien défini dans $[0, 1[$. Ce qui prouve que Λ est bien définie.

Λ **surjective :** Soit $\mathrm{X} \in [0, 1[$. On montre l'existence de $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Lambda(x) = \mathrm{X}$.

<u>Si $\mathrm{X} \in [0,1[\setminus \mathrm{D}^*$:</u>, alors la question précédente nous fournit $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $\Psi(x) = \mathrm{X}$ et ainsi $\mathrm{X} = \Lambda(x) = \Psi(x)$

<u>Si $\mathrm{X} \in \mathrm{D}^*$ et $0 < \mathrm{X} \leqslant \dfrac{1}{2}$:</u> alors $2\mathrm{X} \in \mathrm{D}^* \cup \{1\}$.

donc $2\mathrm{X}$ admet un antécédent $(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ par Ψ qui stationne à 1

On a alors $\Psi(x) \in \mathrm{D} \cup \{1\}$ et donc $\Lambda(x) = \mathrm{X}$.

<u>Si $\mathrm{X} \in \mathrm{D}^*$ et $\dfrac{1}{2} < \mathrm{X}$:</u> alors $2\mathrm{X} - 1 \in \mathrm{D}^*$

donc $2X - 1$ admet un antécédent $(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ par Ψ qui stationne à 0 et ainsi $\Lambda(x) = X$

Λ injective : Soit x et $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telles que $\Lambda(x) = \Lambda(y)$.

Premier cas $\Lambda(x) \in [0,1[\setminus D^*$: alors $\Psi(x) = \Psi(y) = 0$ ou $\Psi(x) = \Psi(y) \in]0,1[\setminus D$
et donc $\Psi(x)$ admet un seul antécédent par Ψ d'où $x = y$

Deuxième cas $\Lambda(x) \in D$ et $\Lambda(x) > \dfrac{1}{2}$:
Alors $\Psi(x) = \Psi(y) \in D^*$ et x, y sont des suites qui ne stationnent pas à 1
donc elles stationnent à 0 puis $x = y$

Troisième cas $\Lambda(x) \in D^*$ et $\Lambda(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$:
On obtient de même que ces suites stationnent à 1 puis que $x = y$

Conclusion : $\boxed{\Lambda \text{ réalise une bijection de } \{0,1\}^{\mathbb{N}} \text{ sur } [0,1[}$

37. On suppose par l'absurde que $[0,1[$ est dénombrable.
alors d'après 36, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est dénombrable
alors d'après 34, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est dénombrable
Ainsi il existe une bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$
Absurde d'après 33
On conclut que $\boxed{[0,1[\text{ n'est pas dénombrable}}$