I Résultats préliminaires

I.A - Distance de A à A_s

I.A.1) L'application $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
Il s'agit donc d'une symétrie or $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_1(\psi)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{-1}(\psi)$ donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
De plus soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,
avec les propriétés de la trace et par caractère symétrique du produit scalaire, on a :

$$\mathrm{tr}(S^\top A) = \mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(-A^\top S) = -\mathrm{tr}(A^\top S) = -\mathrm{tr}(S^\top A)$$

donc $\mathrm{tr}(S^\top A) = 0$ et ainsi $S \perp A$

d'où $\boxed{\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux}}$

En notant pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf celui situé à la ligne i et colonne j qui vaut 1.

la famille $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ est une base (libre et génératrice) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ constituée de $\dfrac{n(n+1)}{2}$ vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension n^2

d'où $\boxed{\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2} \text{ et } \dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n-1)}{2}}$

I.A.2) On a $A = A_s + A_a$ où $(A_s, A_a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
donc A_s est le projeté orthogonal de A sur le sous espace de dimension finie $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
Par caractérisation métrique du projeté orthogonal sur un sous espace de dimension finie, on a

$\boxed{\text{pour toute matrice } S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ \|A - A_s\|_2 \leqslant \|A - S\|_2 \text{ , avec égalité si et seulement si } S = A_s}$

I.B - Valeurs propres de A_s

I.B.1) $\Rightarrow$ (cas positif) On suppose $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : $(X, Y) \mapsto (X \mid Y) = X^\top Y$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.
Selon le théorème spectral, A_s est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ses sous espace propres sont deux à deux orthogonaux

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A (éléments de $\mathbb{R}^+$) et on a $\overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r}} E_{\lambda_i}(A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On peut écrire $X = \sum_{i=1}^r X_i$ où $X_i \in E_{\lambda_i}(A_s)$

On a a donc

$$X^\top A_s X = (X \mid A_s X) = (\sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r A_s X_j) = (\sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r \lambda_j X_j) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_j (X_i \mid X_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 \geqslant 0$$

$\Rightarrow$ (cas strictement positif) On suppose $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On utilise les notations précédentes pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$
Il existe donc $j \in [\![1, r]\!]$ tel que $X_j \neq 0$ et donc $\lambda_j \|X_j\|^2 > 0$ car $\lambda_j > 0$

ainsi $X^\top A_s X = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$

$\Leftarrow$ (cas positif) On suppose que $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{X} \geqslant 0$
Soit λ une valeur propre de A_s. On considère X un vecteur colonne propre de A_s associé à λ.
On a $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top (\lambda \mathrm{X}) = \lambda \mathrm{X}^\top \mathrm{X} = \lambda \|\mathrm{X}\|^2$
ainsi $\lambda \|\mathrm{X}\|^2 \geqslant 0$ or $\|\mathrm{X}\|^2 > 0$ car $\mathrm{X} \neq 0$
donc $\lambda \geqslant 0$
$\Leftarrow$ (cas strictement positif) On suppose que $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{X} > 0$
En reprenant ce qui précède, on obtient $\lambda \|\mathrm{X}\|^2 > 0$ où $\mathrm{X} \neq 0$
et donc $\lambda > 0$
Conclusion : On a montré
$\boxed{\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{X} \geqslant 0}$ et
$\boxed{\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{X} > 0}$

I.B.2) On note $\min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_s) = \mu_1 < \cdots < \mu_r = \max \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_s)$ les valeurs propres ordonnées de A_s
Soit $\lambda \in \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A})$ et X un vecteur propre de A associé à λ
On peut écrire $\mathrm{X} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{X}_i$ où $\mathrm{X}_i \in \mathrm{E}_{\mu_i}(\mathrm{A}_s)$ selon le théorème spectral
D'un coté, on a $\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} = \lambda \|\mathrm{X}\|^2$ et d'un autre côté $\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{X} + \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_a \mathrm{X}$
de plus $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_a \mathrm{X} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, donc $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_a \mathrm{X} = \left(\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_a \mathrm{X}\right)^\top = \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_a^\top \left(\mathrm{X}^\top\right)^\top = -\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_a \mathrm{X}$ d'où $\mathrm{X}^\top \mathrm{A}_a \mathrm{X} = 0$
cela donne : $\mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} = \mathrm{X}^\top \mathrm{A}_s \mathrm{X} = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \mu_i \|\mathrm{X}_i\|^2$ comme à la question précédente
d'où $\mu_1 \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \|\mathrm{X}_i\|^2 \leqslant \mathrm{X}^\top \mathrm{A} \mathrm{X} \leqslant \mu_r \sum_{i=1}^{r} \|\mathrm{X}_i\|^2$ car $\|\mathrm{X}_i\|^2 \geqslant 0$ pour tout i
or selon le théorème de Pythagore : $\|\mathrm{X}\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \|\mathrm{X}_i\|^2$ car $\displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r}} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A}_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
d'où $\mu_1 \|\mathrm{X}\|^2 \leqslant \lambda \|\mathrm{X}\|^2 \leqslant \mu_r \|\mathrm{X}\|^2$
comme $\|\mathrm{X}\|^2 > 0$, on a bien $\boxed{\min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_s) \leqslant \lambda \leqslant \max \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_s).}$
On suppose $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $0 < \min \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}_s)$
ainsi on a $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{A}) \subset]0, +\infty[$
donc $\mathrm{Ker}\, \mathrm{A} = \mathrm{E}_0(\mathrm{A}) = \{0\}$
d'où $\boxed{\text{si } \mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ alors A est inversible}}$

I.B.3) *a)* Existence Je note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeur propres de A_s comptées avec multiplicité
Le théorème spectral, nous fournit $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{A}_s = \Omega^\top \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \Omega$
En prenant $\mathrm{B} = \Omega^\top \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega$
on a $\mathrm{B}^\top = \Omega^\top \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^\top \left(\Omega^\top\right)^\top = \mathrm{B}$ et donc B est symétrique
de plus les valeurs propres de B sont sont strictement positives donc $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et
$\mathrm{B}^2 = \Omega^\top \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega \Omega^\top \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega = \Omega^\top \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^2 \Omega = \mathrm{B}$ car $\Omega \Omega^\top = \mathrm{I}_n$
Unicité Soit B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}_s$
Je note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres de A_s distinctes deux à deux et on a $\displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r}} \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A}_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
On note respectivement a et b les endomorphismes canoniquement associés aux matrice A_s et B
On a $b^2 = a$ donc a et b commutent ainsi les sous espaces propres de a sont stables par b
Pour $i \in [\![1, r]\!]$, on note b_i l'endomorphisme induit par b sur $\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A}_s)$
b_i est un endomorphisme diagonalisable de $\mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A}_s)$ car b l'est sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
Soit μ une valeur propre de b_i et $\mathrm{X} \in \mathrm{E}_{\lambda_i}(\mathrm{A}_s)$ un vecteur propre de b_i associé à μ

On a $\mu > 0$ car $\text{sp}(b_i) \subset \text{sp}(b)$
De plus $\lambda_i \text{X} = a(\text{X}) = b(b(\text{X})) = b(\mu \text{X}) = \mu b(\text{X}) = \mu^2 \text{X}$
donc $\mu^2 = \lambda_i$ car $\text{X} \neq 0$ ainsi $\mu = \sqrt{\lambda_i}$ car $\mu \geqslant 0$
d'où b_i est diagonalisable sur $\text{E}_{\lambda_i}(\text{A}_s)$ et $\text{sp}(b_i) \subset \{\sqrt{\lambda_i}\}$
donc la restriction de b à $\text{E}_{\lambda_i}(\text{A}_s)$ est l'homothétie de rapport $\sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$
or $\displaystyle\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant r} (\text{A}_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ d'où l'unicité de l'endomorphisme b vérifiant cette condition

Conclusion $\boxed{\text{il existe une unique matrice B de } \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \text{B}^2 = \text{A}_s}$

b) On écrit alors $\text{A}_s = \text{B}^2$ où $\text{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ainsi $\text{A} = \text{B}^2 + \text{A}_a$
D'après I.B.2, B est alors inversible et $\text{B}^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ car $(\text{B}^{-1})^\top = \left(\text{B}^\top\right)^{-1} = \text{B}^{-1}$
donc $\text{A} = \text{B}\left(\text{I}_n + \text{B}^{-1}\text{A}_a\text{B}^{-1}\right)\text{B}$. Je note alors : $\text{Q} = \text{B}^{-1}\text{A}_a\text{B}^{-1}$.
De sorte que $\text{Q}^\top = \left(\text{B}^{-1}\right)^\top {\text{A}_a}^\top \left(\text{B}^{-1}\right)^\top = \text{B}^{-1}(-\text{A}_a)\text{B}^{-1} = -\text{Q}$ d'où $\text{Q} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
et $\det(\text{A}) = \det(\text{B}) \det\left(\text{I}_n + \text{B}^{-1}\text{A}_a\text{B}^{-1}\right) \det(\text{B}) = \det\left(\text{B}^2\right) \det(\text{I}_n + \text{Q})$
On a montré $\boxed{\text{l'existence d'une matrice Q de } \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \det(\text{A}) = \det(\text{A}_s)\det(\text{I}_n + \text{Q})}$

c) Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A_s comptées avec multiplicités
On a $\det(\text{A}_s) = \displaystyle\prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$.
Il suffit d'établir que $\det(\text{I}_n + \text{Q}) \geqslant 1$ (en utilisant la notation précédente)
Soit μ une valeur propre complexe de Q et X un vecteur propre associé.
On a $\overline{\text{X}}^\top \text{QX} = \mu \overline{\text{X}}^\top \text{X} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ qui peut donc être identifié à un complexe
ainsi $\mu \overline{\text{X}}^\top \text{X} = \left(\overline{\text{X}}^\top \text{QX}\right)^\top = -\text{X}^\top \text{Q}\overline{\text{X}} = -\overline{\overline{\text{X}}^\top \text{QX}} = -\overline{\mu}\,\overline{\overline{\text{X}}^\top \text{X}}$
or $\overline{\text{X}}^\top \text{X}$ peut être identifié à un réel strictement positif car $\text{X} \neq 0$
d'où $\mu = -\overline{\mu}$ donc μ est un imaginaire pur
On note alors $\chi_{-\text{Q}}$ le polynôme caractéristique de $-\text{Q}$ qui est scindé dans $\mathbb{C}[\text{X}]$
On peut alors écrire $\chi_{-\text{Q}} = \text{X}^p \displaystyle\prod_{i=1}^s (\text{X} - \mu_i)(\text{X} + \mu_i)$ où $n = p + 2s$ les $\mu_i \in \text{i}\mathbb{R} \setminus \{0\}$
car $\chi_{-\text{Q}} \in \mathbb{R}[\text{X}]$ n'admet que des racines imaginaires pures
donc $\det(\text{I}_n + \text{Q}) = \chi_{-\text{Q}}(1) = 1^p \displaystyle\prod_{i=1}^s (1 - \mu_i)(1 + \mu_i) = \prod_{i=1}^s |1 - \mu_i|^2 \geqslant 1$
On en déduit que $\boxed{\det(\text{A}) \geqslant \det(\text{A}_s)}$

I.B.4) On a $\text{A}(\text{A}^{-1})_s\text{A}^\top = \frac{1}{2}\text{A}(\text{A}^{-1} + (\text{A}^{-1})^\top)\text{A}^\top = \frac{1}{2}(\text{A}^\top + \text{A}) = \text{A}_s$
donc $\det(\text{A}_s) = \det(\text{A}(\text{A}^{-1})_s\text{A}^\top) = \det(\text{A}) \det\left((\text{A}^{-1})_s\right) \det(\text{A}^\top)$
ainsi $\boxed{(\det(\text{A}))^2 \det\left((\text{A}^{-1})_s\right) = \det(\text{A}_s)}$

I.C - Partie symétrique des matrices orthogonales

I.C.1) Je note n_1, n_2 (dans $\mathbb{N}$) les multiplicités respectives de 1 et -1 dans χ_A
Le théorème de réduction des matrices orthogonales nous fournit $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale par blocs de la formes $\text{D} = \text{diag}(\text{I}_{n_1}, -\text{I}_{n_2}, \text{R}(\theta_1), \ldots, \text{R}(\theta_q)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\text{A} = \Omega^\top \text{D} \Omega$$

avec $q \in \mathbb{N}$ tel que $n_1 + n_2 + 2q = n$ et pour $i \in [\![1, q]\!]$, $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $\mathrm{R}(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

En notant $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a :

$$\mathrm{A} = \Omega^\top \mathrm{diag}(\mathrm{I}_{n_1}, -\mathrm{I}_{n_2}, \cos(\theta_1)\mathrm{I}_2, \ldots, \cos(\theta_q)\mathrm{I}_2)\Omega + \Omega^\top \mathrm{diag}(0\mathrm{I}_{n_1}, 0\mathrm{I}_{n_2}, \sin(\theta_1)\mathrm{J}, \ldots, \sin(\theta_q)\mathrm{J})\Omega$$

donc A est la somme de la matrice antisymétrique : $\Omega^\top \mathrm{diag}(0\mathrm{I}_{n_1}, 0\mathrm{I}_{n_2}, \sin(\theta_1)\mathrm{J}, \ldots, \sin(\theta_q)\mathrm{J})\Omega$
et de la matrice symétrique $\Omega^\top \mathrm{diag}(\mathrm{I}_{n_1}, -\mathrm{I}_{n_2}, \cos(\theta_1)\mathrm{I}_2, \ldots, \cos(\theta_q)\mathrm{I}_2)\Omega$ qui est une forme diagonalisée de A_s
donc les valeurs propres de A_s comptées avec multiplicité sont : $1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, \cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_q)$
ainsi $\boxed{\text{les valeurs propres de } \mathrm{A}_s \text{ sont dans } [-1, 1]}$
Plus simple : On peut remarquer que $\mathrm{A}^\top = \mathrm{A}^{-1} \in \mathrm{O}(2)$
et pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{X} \in \mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}_s)$, on a

$$|\lambda| \cdot \|\mathrm{X}\|_2 = \|\mathrm{A}_s\mathrm{X}\|_2 = \frac{1}{2}\|(\mathrm{A} + \mathrm{A}^\top)\mathrm{X}\|_2 \leqslant \frac{1}{2}\|\mathrm{A}\mathrm{X}\|_2 + \frac{1}{2}\|\mathrm{A}^\top\mathrm{X}\|_2 = \|\mathrm{X}\|_2$$

I.C.2) Je prends $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
Pour $\mathrm{A} \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{A}_s \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$
et pour $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{A} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$ mais $\mathrm{S} \notin \mathrm{O}(2)$
donc on a $\boxed{\mathrm{S} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{S}) \subset [-1, 1] \text{ mais n'existe pas de matrice } \mathrm{A} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \text{ vérifiant } \mathrm{A}_s = \mathrm{S}}$

I.C.3) *a)* Je note n_1, n_2 (dans $\mathbb{N}$) les multiplicités respectives de 1 et -1 dans χ_{S}
Les valeurs propres de S dans $]-1, 1[$ sont alors notés : $c_1, c_1, \ldots, c_q, c_q$ où $2q + n_1 + n_2 = n$ (comptées avec multiplicités)
Le théorème spectral nous fournit $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$,tel que $\mathrm{S} = \Omega^\top \mathrm{diag}(\mathrm{I}_{n_1}, -\mathrm{I}_{n_2}, c_1\mathrm{I}_2, \ldots, c_q\mathrm{I}_2)\Omega$
Je note pour $i \in [\![1, q]\!]$, $\theta_i = \arccos(c_i)$
et je pose $\mathrm{A} = \Omega^\top \mathrm{diag}(\mathrm{I}_{n_1}, -\mathrm{I}_{n_2}, \mathrm{R}(\theta_1), \ldots, \mathrm{R}(\theta_q))\Omega$
de sorte que $\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathrm{A}_s = \mathrm{S}}$

b) Réciproquement on suppose qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}_s = \mathrm{S}$,
En reprenant les notations de I.C.1, on a : $\mathrm{S} = \Omega^\top \mathrm{diag}(\mathrm{I}_{n_1}, -\mathrm{I}_{n_2}, \cos(\theta_1)\mathrm{I}_2, \ldots, \cos(\theta_q)\mathrm{I}_2)\Omega$ où les $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$
les valeurs propres de S distinctes de 1 et -1, comptées avec multiplicités sont donc :
$\cos(\theta_1), \cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_q), \cos(\theta_q)$
alors $\boxed{\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(\mathrm{S}) \subset [-1, 1]}$ et
$\boxed{\text{pour toute valeur propre } \lambda \text{ de S dans }]-1, 1[\text{, l'espace propre de S associé à } \lambda \text{ est de dimension paire}}$

II Matrices F−singulières

II.A - Cas où F est un hyperplan

II.A.1) Soit $\mathrm{K} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On a K est E_n−singulière si et seulement si il existe $\mathrm{X} \in \mathrm{E}_n$ non nul tel que $\forall \mathrm{Z} \in \mathrm{E}_n, \mathrm{Z}^\top\mathrm{K}\mathrm{X} = 0$
or

$$\forall \mathrm{Z} \in \mathrm{E}_n, \mathrm{Z}^\top\mathrm{K}\mathrm{X} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{K}\mathrm{X} \in \mathrm{E}_n^\perp \Leftrightarrow \mathrm{K}\mathrm{X} = 0$$

d'où K est E_n−singulière équivaut $\mathrm{Ker}\,\mathrm{K} \neq 0$ ce qui équivaut à K non inversible
ainsi $\boxed{\text{une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est singulière si et seulement si elle est } \mathrm{E}_n\text{−singulière}}$

II.A.2) $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(N)$ est une droite vectorielle car H est un hyperplan

Pour $X \in H$, on a : $\forall Z \in H,\ Z^{\top}AX = 0 \Leftrightarrow AX \in \mathrm{Vect}(N) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ AX = \lambda N$

Ainsi $\boxed{\text{A est H}-\text{singulière si et seulement s'il existe un vecteur non nul X de H et un réel } \lambda \text{ tels que } AX = \lambda N}$

II.A.3) $\Rightarrow$: On suppose que A est H−singulière.

La question précédente nous fournit un vecteur non nul X de H et un réel λ tels que $AX = \lambda N$

On considère $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

On a $A_N Y = \begin{pmatrix} AX - \lambda N & N^{\top}X - 0 \end{pmatrix}$

Comme $N \perp X$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A_N Y = 0$

donc A_N est singulière

$\Leftarrow$: On suppose que A_N est singulière.

Ceci nous fournit $Y = \begin{pmatrix} Z \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_N Y = 0$ avec $Z \in E_n$ et $\mu \in \mathbb{R}$.

On a donc $AZ + \mu N = 0$ et $(N \mid Z) = 0$

On a donc $Z \in H$ et $AZ = -\mu N$.

De plus $Z \neq 0$ car par l'absurde, si on avait $Z = 0$,

on aurait $\mu N = -AZ = 0$ ainsi $\mu = 0$ (car $N \neq 0$) et donc on aurait $Y = 0$ ce qui n'est pas

À l'aide de la question précédente, on a A est H−singulière

Conclusion : $\boxed{\text{A est H}-\text{singulière si et seulement si la matrice } A_N \text{ est singulière}}$

II.A.4) $\boxed{\text{On prend } B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -A^{-1}N \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}), 1 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})}$

$\boxed{\text{et on a bien } A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^{\top}A^{-1} & -N^{\top}A^{-1}N \end{pmatrix}}$

II.A.5) On utilise la matrice triangulaire par blocs B de la question précédente

Ainsi on a $\det(A_N)\det(B) = \det(A_N B) = \det(I_n) \times (-N^{\top}A^{-1}N)$

De plus $\det(B) = \det(A^{-1}) \times 1 = \dfrac{1}{\det(A)}$

On en déduit que $\boxed{\det(A_N) = -N^{\top}A^{-1}N \det(A)}$

II.A.6) On suppose que $\det\left((A^{-1})_s\right) = 0$

Méthode 1 (imprévue) Ceci nous donne $\det(A_s) = 0$ à l'aide de l'égalité de I.B.4

Prenons $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $A_s X = 0$

Je note $N' = AX$

on remarque que $(X \mid N') = (X \mid A_s X) + (X \mid A_a X) = 0 + X^{\top}A_a X = 0$ (en transposant comme I.B.2)

d'où $N' \perp X$

Si $N' = 0$, je considère H un hyperplan contenant X et N un vecteur unitaire normal à H et on a $AX = 0N$

Si $N' \neq 0$, je considère $N = \dfrac{1}{\|N'\|_2}N'$ et l'hyperplan $H = \{N\}^{\perp}$

de sorte que $X \in H$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AX = \lambda N$ (dans les deux cas)

On conclut avec II.A.2

Méthode 2 (sans doute prévue par l'énoncé)

Je prends $N \in \mathrm{Ker}\left((A^{-1})_s\right)$ unitaire et l'hyperplan $H = \{N\}^{\perp}$

On a $-N^{\top}A^{-1}N = -N^{\top}\left((A^{-1})_s\right)N - N^{\top}\left((A^{-1})_a\right)N = 0 + 0 = 0$ (comme en IB2)

donc avec II.A.5, on a $\det(A_N) = 0$ ainsi d'après II.A.3, A est H−singulière

$\boxed{\text{si } \det\left((A^{-1})_s\right) = 0, \text{ alors il existe un hyperplan H de } E_n \text{ tel que A est H}-\text{singulière}}$

II.A.7) On suppose $\det(A_s) = 0$ et on a $\det(A) \neq 0$, la matrice A étant supposée inversible
Donc $\det\left((A^{-1})_s\right) = 0$ d'après I.B.4, ce qui permet de conclure :
$\boxed{\text{si } \det(A_s) = 0\text{, alors il existe un hyperplan H de } E_n \text{ tel que A est H}-\text{singulière}}$

II.A.8) Par l'absurde, on suppose qu'il existe un hyperplan H pour lequel A soit H$-$singulière
donc ceci nous $X \in H$ non nul tel que $AX \in H^{\perp}$
donc $0 = (X \mid AX) = X^{\top}AX = X^{\top}A_sX + X^{\top}A_aX = X^{\top}A_sX$
donc $0 > 0$ d'après I.B.1, ce qui n'est pas
$\boxed{\text{Si on suppose que } A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ alors A est H}-\text{régulière pour tout hyperplan H de } E_n}$

II.B - Exemple

II.B.1) On effectue l'opération élémentaire $C_2 \leftarrow C_2 + C_3 + C_1$ puis

Ainsi $\det(A) = \begin{vmatrix} 2-\mu & 1 & \mu \\ -1 & 0 & \mu-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

ainsi $\boxed{A(\mu) \text{ est inversible pour tout réel } \mu}$ (faisable à la calculette formelle)

II.B.2) On a $\boxed{A(\mu)_s = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu/2 \\ -1 & 2-\mu & -1+\mu/2 \\ \mu/2 & -1+\mu/2 & 1 \end{pmatrix}}$

On effectue les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ puis linéarité et $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

ainsi $\det\left(A(\mu)_s\right) = (1-\mu)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \mu/2 \\ 1 & 2-\mu & -1+\mu/2 \\ -1 & -1+\mu/2 & 1 \end{vmatrix} = (1-\mu)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \mu/2 \\ 0 & 3-\mu & -1 \\ 0 & -2+\mu/2 & 1+\mu/2 \end{vmatrix}$

donc $\det\left(A(\mu)_s\right) = (1-\mu)\left[(3-\mu)(1+\mu/2) + (-2+\mu/2)\right] = \dfrac{1}{2}(1-\mu)(-\mu^2 + 3\mu - 2\mu + 6 - 4 + \mu)$

donc $\det\left(A(\mu)_s\right) = \dfrac{1}{2}(1-\mu)(-\mu^2 + 2\mu + 2)$

On a $1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2$ et $(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$

donc $\det\left(A(\mu)_s\right) = \dfrac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - (1-\sqrt{3}))(\mu - (1+\sqrt{3}))$

Ainsi $\boxed{\text{pour } \mu = 1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3},\ A(\mu)_s \text{ est singulière}}$

II.B.3) On utilise 6, puis 5, pour trouver N puis H

On a $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (calculatrice) donc $\left(A(1)^{-1}\right)_s = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On prend le vecteur unitaire $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(A(1)^{-1}\right)_s$ et $H = \{N\}^{\perp}$ le plan d'équation $x_3 = 0$

Je prends $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ non nul dans H et on a $A(1)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)N$

Donc d'après II.A.2, $\boxed{\text{l'hyperplan H d'équation } x_3 = 0 \text{ est tel que A(1) soit H}-\text{singulière}}$

II.C - Cas où F est de dimension $n-2$

II.C.1) A est F−singulière si et seulement si il existe $X \in F$ non nul tel que $\forall Z \in F,\ Z^\top AX = 0$
ce qui équivaut à il existe $X \in F$ non nul tel que$AX \in F^\perp$
Comme $F = \mathrm{Vect}(N_1, N_2)$, on a A est F−singulière
$\boxed{\text{si et seulement s'il existe un élément non nul X de F et deux réels } \lambda_1, \lambda_2 \text{ tels que } AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2}$

II.C.2) $\Rightarrow$ On suppose que A est F−singulière

En utilisant les notations de la question précédente, on pose $Z = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2,1}(\mathbb{R})$,

on a $Z \neq 0$ et $A_N Z = 0$ par un calcul analogue à II.A.3

$\Leftarrow$ On suppose A_N singulière.

Ceci nous fournit $W = \begin{pmatrix} Y \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2,1}(\mathbb{R}) \in \mathrm{Ker}(A_N)$ non nul où $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

On a alors $Y \in F = \{N_1, N_2\}^\perp$ et $AY = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$ analogue à II.A.3
de plus Y est non nul car par l'absurde si on avait $Y = 0$, on aurait $AY = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = 0$
donc $\mu_1 = \mu_2 = 0$ car (N_1, N_2) libre
donc $W = 0$ Absurde

Conclusion $\boxed{\text{A est F−singulière si et seulement si la matrice } A_N \text{ est singulière}}$

II.C.3) $\boxed{\text{On prend } B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} \text{ avec } A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -A^{-1}N \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}), 0 \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R}), I_2 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})}$

$\boxed{\text{et on a bien } A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1} N \end{pmatrix}}$

II.C.4) Comme en II.A.5, on a $\boxed{\det(A_N) = \det(N^\top A^{-1} N) \det(A)}$

II.C.5) Soit $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$. On a $P^\top A^{-1} P = \left(A^{-1}P\right)^\top A^\top (A^{-1}P) = \left[\left(A^{-1}P\right)^\top A (A^{-1}P)\right]^\top$
donc $\det\left(P^\top A^{-1} P\right) = \det\left(\left(A^{-1}P\right)^\top A (A^{-1}P)\right)$
La multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang ;
Pour obtenir l'équivalence on prend $P' = A^{-1}P$ dans un sens et $P = AP'$ pour la réciproque :
$\boxed{\text{il existe } P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \det(P^\top A^{-1} P) = 0 \text{ si et seulement s'il existe } P' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \det(P'^\top AP') = 0}$

II.C.6) On remarque pour $X \in E_n$, on a $X^\top A_a X = 0$ et $X^\top A_s X = X^\top AX$
donc $\det(N'^\top AN') = \begin{vmatrix} N_1'^\top A_s N_1' & N_1'^\top AN_2' \\ N_2'^\top AN_1' & N_2'^\top A_s N_2' \end{vmatrix}$
or $N_1'^\top AN_2' = N_1'^\top A_s N_2' + N_1'^\top A_a N_2'$ et $N_2'^\top AN_1' = N_2'^\top A_s N_1' + N_2'^\top A_a N_1'$
donc en transposant des scalaires : $N_2'^\top AN_1' = N_1'^\top A_s N_2' - N_1'^\top A_a N_2'$
donc $\det(N'^\top AN') = \left(N_1'^\top A_s N_1'\right)\left(N_2'^\top A_s N_2'\right) - \left(N_1'^\top A_s N_2' + N_1'^\top A_a N_2'\right)\left(N_1'^\top A_s N_2' - N_1'^\top A_a N_2'\right)$
d'où $\boxed{\det(N'^\top AN') = (N_1'^\top A_s N_1')(N_2'^\top A_s N_2') - (N_1'^\top A_s N_2')^2 + (N_1'^\top A_a N_2')^2}$

II.C.7) On remarque facilement que l'application $(X, Y) \in E_n^2 \mapsto X^\top A_s Y \in \mathbb{R}$ est un produit scalaire ; c'est facilement une forme bilinéaire symétrique et la propriété "définie positive" est établie en I.B.1.
On note $N_1' = A^{-1}N_1$ et $N_2' = A^{-1}N_2$ non colinéaires car (N_1, N_2) libre et A^{-1} inversible

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec cas de non égalité) aux vecteurs N'_1 et N'_2 de E_n non colinéaires, ce qui donne $({N'_1}^\top A_s N'_1)({N'_2}^\top A_s N'_2) > ({N'_1}^\top A_s N'_2)^2$
donc $\det({N'}^\top A N') > 0$ en utilisant la question précédente.
À l'aide du calcul fait en II.C.5, on a $\det(N^\top A^{-1} N) = \det({N'}^\top A N')$
Ainsi $\boxed{\text{si } A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ alors } \det(N^\top A^{-1} N) > 0}$

II.C.8) On suppose $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit un sous-espace vectoriel F de dimension $n-2$ de E_n.
Alors pour tout base (N_1, N_2) de F, on a $\det(N^\top A^{-1} N) \neq 0$ où $N = (N_1\ N_2) \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$
De plus $\det(A) \neq 0$ car A inversible
d'où $\det(A_N) \neq 0$ en utilisant $\det(A_N) = \det(N^\top A^{-1} N)\det(A)$ voir II.C.4
Ainsi A_N est régulière, donc A n'est pas F−singulière d'après II.C.2
Ainsi $\boxed{\text{si } A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ alors A est F−régulière pour tout sous-espace vectoriel F de dimension } n-2 \text{ de } E_n}$

II.D - Exemple

II.D.1) D'après II.C.6, pour $N' = (N'_1\ N'_2)$, on a : $\det({N'}^\top A N') = ({N'_1}^\top A_s N'_1)({N'_2}^\top A_s N'_2) - ({N'_1}^\top A_s N'_2)^2 + ({N'_1}^\top A_a N'_2)^2$
Si on trouve $N'_2 \in \mathrm{Ker}\,(A_s)$ non nul et $N'_1 \in \{A_a N'_2\}^\perp \setminus \mathrm{Vect}\,(N'_2)$
On aura $N' = (N'_1\ N'_2) \in \mathcal{G}_{n,2}$ tel que $\det({N'}^\top A N') = 0$

On a $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Je choisis alors $N'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $A_a N'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et je peux prendre $N'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{En choisissant } N' = (N'_1\ N'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on aura : } \det({N'}^\top A N') = 0}$$

Je vérifie (car j'ai le temps) : $N'^\top A N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est bien de déterminant nul.

II.D.2) En utilisant la méthode de II.C.5, on a $\det\left(N^\top A^{-1} N\right) = 0$

en ayant posé $(N_1\ N_2) = N = AN' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

Je cherche une base de $F = \mathrm{Vect}(N_1, N_2)^\perp$.

On obtient $\boxed{\text{pour } F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), A(1) \text{ est F−singulière.}}$

On a bien $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot N_1 + (-1) \cdot N_2 \in \mathrm{Vect}(N_1, N_2)$ (II.C.1)

II.E - Cas général

II.E.1) On prend $(\mathrm{N}_1, \ldots, \mathrm{N}_p)$ une base de $\mathrm{F}^{\perp}$

On définit $\mathrm{N} = (\mathrm{N}_1 \ \cdots \ \mathrm{N}_p) \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{N}' = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{N} \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ car A^{-1} inversible

On pose $\mathrm{A}_\mathrm{N} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$ comme en II.C.2

On montre que A est F$-$singulière si et seulement si A_N est singulière

Comme A est inversible alors on pose $\mathrm{N}' = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{N}$ on a $\det(\mathrm{A}_\mathrm{N}) = \det(\mathrm{N}'^{\top}\mathrm{A}\mathrm{N}')\det(\mathrm{A})$

Ainsi dans ce cas, $\boxed{\text{si } \det(\mathrm{N}'^{\top}\mathrm{A}\mathrm{N}') = 0 \text{ alors A est F}-\text{singulière}}$

II.E.2) On a $\mathrm{N}'\mathrm{X} \in \mathrm{E}_n$ et $\mathrm{X}^{\top}\mathrm{N}'^{\top}\mathrm{A}\mathrm{N}'\mathrm{X} = (\mathrm{N}'\mathrm{X})^{\top}\mathrm{A}(\mathrm{N}'\mathrm{X}) = (\mathrm{N}'\mathrm{X})^{\top}\mathrm{A}_s(\mathrm{N}'\mathrm{X})$

Comme $\mathrm{N}' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ non nul

alors $\mathrm{N}'\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul car $\operatorname{Ker}\mathrm{N}' = \{0\}$ par la formule du rang

$\boxed{\text{si } \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \text{ est non nul alors } \mathrm{X}^{\top}\mathrm{N}'^{\top}\mathrm{A}\mathrm{N}'\mathrm{X} > 0}$ car $\mathrm{A}_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

II.E.3) On déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres réelles de } \mathrm{N}'^{\top}\mathrm{A}\mathrm{N}' \text{ sont strictement positives}}$ avec I.B.1

II.E.4) Pour une matrice symétrique réelle son déterminant vaut le produit de ses valeurs propres

donc $\boxed{\det(\mathrm{N}'^{\top}\mathrm{A}\mathrm{N}') > 0}$ à l'aide de la question précédente

II.E.5) En utilisant II.E.1, car $\det(\mathrm{N}'^{\top}\mathrm{A}\mathrm{N}') \neq 0$ on en déduit que

$\boxed{\text{A est F}-\text{régulière pour tout sous-espace vectoriel } \mathrm{F} \neq \{0\} \text{ de } \mathrm{E}_n}$

III Matrices positivement stables

III.A - Exemples

III.A.1) **Cas χ_A scindé dans $\mathbb{R}$:** Si A admet deux valeurs propres réelles éventuellement confondues : x_1 et x_2, alors $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = x_1 + x_2$ et $\det(\mathrm{A}) = x_1x_2$

On a alors : $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Re}(x_1) > 0 \\ \operatorname{Re}(x_2) > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x_1x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \det(\mathrm{A}) > 0 \\ \operatorname{tr}(\mathrm{A}) > 0 \end{array}\right.$

Cas χ_A non scindé dans $\mathbb{R}$: Si A admet deux valeurs propres conjuguées et distinctes : z_1 et z_2, alors $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = z_1 + z_2 = 2\operatorname{Re}(z_1) = 2\operatorname{Re}(z_2)$ et $\det(\mathrm{A}) = z_1\bar{z}_2 = |z_1|^2 > 0$

On a alors : $\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Re}(z_1) > 0 \\ \operatorname{Re}(z_2) > 0 \end{array}\right. \iff \operatorname{tr}(\mathrm{A}) > 0 \iff \left\{\begin{array}{l} \det(\mathrm{A}) > 0 \\ \operatorname{tr}(\mathrm{A}) > 0 \end{array}\right.$

Conclusion : Dans tous les cas, on a :

A est positivement stable si et seulement si $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) > 0$ et $\det(\mathrm{A}) > 0$.

III.A.2) *a)* $\boxed{\text{Je prends } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{A}^{\top} \text{ deux matrices positivement stables de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ mais } \mathrm{A} + \mathrm{A}^{\top} \text{ ne l'est pas}}$

En effet $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{A}^{\top}) = 1 > 0$ et $\operatorname{tr}(\mathrm{A}) = \operatorname{tr}(\mathrm{A}^{\top}) = 2 > 0$ alors que $\det(\mathrm{A} + \mathrm{A}^{\top}) = 0$ (voir III.A.1)

La somme de deux matrices positivement stables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement positivement stable.

b) Il suffit d'établir que si A et B commutent les valeurs propres de $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ sont sommes d'une valeur propre de A et d'une valeur propre de B.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $\mathrm{A} + \mathrm{B}$.

Les matrices $\mathrm{A} + \mathrm{B}$ et A commutent.

Ainsi $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ est stable par a qui désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A.

La restriction de a à $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A} + \mathrm{B})$ admet une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ car tout polynôme de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ est scindé.

Ceci nous fournit $X \in E_\lambda(A+B)\setminus\{0\}$ tel que $a(X) = \mu X = AX$ et donc $BX = (\lambda-\mu)X$ car $\lambda X = (A+B)X$ d'où λ est somme de μ et $\lambda - \mu$ valeurs propres respectives de A et B

De plus l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ est stable par + ce qui nous permet d'affirmer que

$\boxed{\text{la somme de deux matrices positivement stables qui commutent est positivement stable}}$

III.A.3) *a)* On suppose que $X \neq 0$.

On a $\overline{X}^\top AX = (Y - iZ)^\top A(Y + iZ) = Y^\top AY + Z^\top AZ + i(Y^\top AZ - Z^\top AY)$

donc $\mathrm{Re}\left(\overline{X}^\top AX\right) = Y^\top AY + Z^\top AZ = Y^\top A_s Y + Z^\top A_s Z$ (comme en I.B.2)

Si $Y = 0$ alors $Z \neq 0$ et on a $Y^\top A_s Y = 0$ et $ZA_sZ > 0$ d'après I.B.1

Si $Y \neq 0$ alors on a $Y^\top A_s Y > 0$ et $ZA_sZ \geqslant 0$

Dans tous les cas, on a $\boxed{\mathrm{Re}\left(\overline{X}^\top AX\right) > 0}$

b) Soit λ une valeur propre de A. Prenons $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$.

On a $\overline{X}^\top AX = \lambda\overline{X}^\top X$ or $\overline{X}^\top X$ peut être identifié à un réel strictement positif

ainsi $\mathrm{Re}\left(\overline{X}^\top AX\right) = \mathrm{Re}(\lambda)\overline{X}^\top X$ et d'après la question précédente : $\mathrm{Re}\left(\overline{X}^\top AX\right) > 0$

d'où $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$

ainsi $\boxed{\text{A est bien positivement stable}}$

III.A.4) Je prends $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice positivement stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'après III.A.1

or $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $A_s \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $0 \in \mathrm{sp}(A_s)$.

$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est un exemple de matrice A positivement stable telle que } A_s \text{ ne soit pas définie positive}}$

III.B -

III.B.1) Les solutions sur $\mathbb{R}^+$ de (EH) : $y' + \lambda y = 0$ équation différentielle linéaire homogène du première ordre sur $\mathbb{R}^+$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto ke^{-\lambda t}$ avec $k \in \mathbb{C}$

Par la méthode de la variation de la constante ; on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre $y' + \lambda y = v$ sous la forme $g : t \mapsto k(t)e^{-\lambda t}$ avec k de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

On trouve alors $k'(t)e^{-\lambda t} = v(t)$

on peut prendre k définie sur $\mathbb{R}^+$ par $k : t \mapsto \displaystyle\int_0^t v(u)e^{\lambda u}du$

donc u est de la forme $t \longmapsto \left(k + \displaystyle\int_0^t v(s)e^{\lambda s}ds\right)e^{-\lambda t}$ avec $k \in \mathbb{C}$

La fonction v étant bornée sur $\mathbb{R}^+$, ceci nous fournit $M > 0$ tel $\forall t \geqslant 0,\ |v(t)| \leqslant M$

On écrit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Soit $t \geqslant 0$.

On a $|u(t)| = \left|\left(k + \displaystyle\int_0^t v(s)e^{\lambda s}ds\right)e^{-\lambda t}\right| = \left|k + \displaystyle\int_0^t v(s)e^{\lambda s}ds\right|e^{-\alpha t}$

donc $|u(t)| \leqslant |k|e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t}\displaystyle\int_0^t |v(s)|\left|e^{\lambda s}\right|du \leqslant |k| + Me^{-\alpha t}\displaystyle\int_0^t e^{\alpha s}ds$

or $\displaystyle\int_0^t e^{\alpha s}ds = \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \leqslant \frac{e^{\alpha t}}{\alpha}$ d'où $\forall t \geqslant 0,\ |u(t)| \leqslant |k| + \dfrac{M}{\alpha}$

On a bien montré que $\boxed{u \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$

III.B.2) On écrit $\mathrm{T}=(t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et pour $i>j$, $t_{i,j}=0$ car T est triangulaire supérieure

La fonction U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et on a pour $t\geqslant 0$:

$$\mathrm{U}'(t)=\begin{pmatrix}u_1'(t)\\ \vdots\\ u_n'(t)\end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{TU}(t)=\begin{pmatrix}w_1(t)\\ \vdots\\ w_n(t)\end{pmatrix} \text{ où pour } i\in[\![1,n]\!], w_i(t)=\sum_{k=i}^{n} t_{i,k}u_k(t)$$

On va montrer par récurrence descendante et bornée sur $j\in[\![1,n]\!]$, que la fonction u_j est bornée sur $\mathbb{R}^+$

Initialisation La fonction u_n vérifie : $u_n'+t_{n,n}u_n=0$ sur $\mathbb{R}^+$

donc la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ est la fonction $u_n'+t_{n,n}u_n$ y est bornée

Comme $\mathrm{Re}(t_{n,n})>0$, alors u_n est bornée sur $\mathbb{R}^+$ d'après la question précédente

Hérédité Soit $j\in[\![2,n]\!]$ tel que les fonctions $u_j,u_{j+1},\dots u_n$ soit bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Montrons que u_{j-1} bornées sur $\mathbb{R}^+$.

On a $u_{j-1}'+\displaystyle\sum_{k=j-1}^{n} t_{j-1,k}u_k=0$ d'après la $j$ème ligne de $\mathrm{U}'(t)+\mathrm{TU}(t)=0$

donc $u_{j-1}'+t_{j-1,j-1}u_{j-1}=-\displaystyle\sum_{k=j}^{n} t_{j-1,k}u_k$

or $-\displaystyle\sum_{k=j}^{n} t_{j-1,k}u_k$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par combinaison linéaire de fonctions bornées et $\mathrm{Re}(t_{j-1,j-1})>0$

En utilisant à nouveau la question précédente, la fonction u_{j-1} bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion On a montré par récurrence que $\boxed{\text{les fonctions } u_j, \text{ où } 1\leqslant j\leqslant n, \text{ sont bornées sur } \mathbb{R}^+}$

III.B.3) Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ d'après d'Alembert-Gauss donc A est trigonalisable

Ceci nous fournit $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ soit triangulaire supérieur avec $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ comme coefficients diagonaux

Ainsi $\mathrm{T}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}-\alpha\mathrm{I}_n=\mathrm{P}^{-1}\left(\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I}_n\right)\mathrm{P}$ est triangulaire supérieur semblable à $\mathrm{A}-\alpha\mathrm{I}_n$ avec $\lambda_1-\alpha,\dots,\lambda_n-\alpha$ comme coefficients diagonaux

On note $\mathrm{V}:t\mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\exp(-t\mathrm{A})$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$

car $t\mapsto\mathrm{e}^{\alpha t}$ et $t\mapsto\exp(-t\mathrm{A})$ le sont et par bilinéarité de $(x,\mathrm{M})\in\mathbb{C}\times\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto x\mathrm{M}$ en dimension finie

et pour $t\geqslant 0$, on a $\mathrm{V}'(t)=\alpha\mathrm{e}^{\alpha t}\exp(-t\mathrm{A})-\mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{A}\exp(-t\mathrm{A})=-\mathrm{PTP}^{-1}\mathrm{V}(t)$

donc en posant $\mathrm{W}(t)=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{V}(t)\mathrm{P}$, on a W de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathrm{W}':t\mapsto\mathrm{P}^{-1}\mathrm{V}'(t)\mathrm{P}$

car l'application $\varphi:\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mapsto\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

donc W vérifie $\forall t\in\mathbb{R}$, $\mathrm{W}'(t)+\mathrm{TW}(t)=0$

Toutes les colonnes C de W vérifie aussi $\forall t\in\mathbb{R}^+$, $\mathrm{C}'(t)+\mathrm{TC}(t)=0$

comme T vérifie les hypothèses de la question précédente, par construction

alors les fonctions composantes de C et par conséquent celles de W sont bornées sur $\mathbb{R}^+$

Ainsi la fonction W est bornée sur $\mathbb{R}^+$

On a $\mathrm{V}=\varphi^{-1}\circ\mathrm{W}$ or φ^{-1} est linéaire en dimension finie donc continue

ce qui nous fournit $\mathrm{K}>0$ tel que $\forall\mathrm{M}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|\varphi^{-1}(\mathrm{M})\|_2\leqslant\mathrm{K}\|\mathrm{M}\|_2$

ainsi $\forall t\geqslant 0$, $\|\mathrm{V}(t)\|_2\leqslant\mathrm{K}\|\mathrm{W}(t)\|_2$

On conclut enfin que $\boxed{\text{la fonction } t\mapsto\mathrm{e}^{\alpha t}\exp(-t\mathrm{A}) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$

III.C - Une caractérisation des matrices positivement stables

III.C.1) On note les deux endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définis par $\varphi_1(\mathrm{M}) = \mathrm{A}^\top \mathrm{M}$ et $\varphi_2(\mathrm{M}) = \mathrm{MA}$
Soit λ une valeur propre de φ_1. Prenons alors $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{A}^\top \mathrm{M} = \lambda \mathrm{M}$.
On choisit C une colonne non nulle de M et on a $\mathrm{A}^\top \mathrm{C} = \lambda \mathrm{C}$
Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\mathrm{A}^\top\right) = \mathrm{Sp}\,(\mathrm{A})$ et ainsi $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$
d'où φ_1 est positivement stable
Soit μ une valeur propre de φ_2 et N un vecteur propre associé
en transposant $\varphi_2(\mathrm{N}) = \mathrm{NA} = \mu \mathrm{N}$, on obtient $\mathrm{A}^\top \mathrm{N}^\top = \varphi_1(\mathrm{N}^\top) = \mu \mathrm{N}^\top$
Comme $\mathrm{N}^\top \neq 0$, μ est une valeur propre de φ_1 et donc $\mathrm{Re}(\mu) > 0$ d'après ce qui précède
Ainsi φ_2 est positivement stable comme φ_1
De plus, on vérifie facilement que φ_1 et φ_2 commutent et que $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$
D'après III.A.2.b : $\boxed{\Phi \text{ est positivement stable}}$

III.C.2) a) D'après ce qui précède $0 \notin \mathrm{Sp}(\Phi)$ donc Φ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Ainsi $\boxed{\text{il existe une unique matrice } \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{A}^\top \mathrm{B} + \mathrm{BA} = \mathrm{I}_n}$

b) Les matrices $\mathrm{A}^\top \mathrm{B}_s + \mathrm{B}_s \mathrm{A}$ et $\mathrm{A}^\top \mathrm{B}_a + \mathrm{B}_a \mathrm{A}$ sont respectivement symétrique et antisymétrique.
or $\mathrm{I}_n + 0 = (\mathrm{A}^\top \mathrm{B}_s + \mathrm{B}_s \mathrm{A}) + (\mathrm{A}^\top \mathrm{B}_a + \mathrm{B}_a \mathrm{A})$ donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{A}^\top \mathrm{B}_s + \mathrm{B}_s \mathrm{A}$ par unicité de la partie symétrique
d'où $\mathrm{B} = \mathrm{B}_s$ d'après III.C.2 donc $\boxed{\text{B est symétrique}}$
On remarque $(\mathrm{BA})^\top = \mathrm{A}^\top \mathrm{B}$ donc $\mathrm{I}_n = \mathrm{A}^\top \mathrm{B} + \mathrm{BA} = 2(\mathrm{BA})_s$
ainsi $2\mathrm{BA} = \mathrm{I}_n + (\mathrm{BA})_a$
en utilisant ce qui a été fait en I.B.3.b), on obtient $\det\left(\mathrm{I}_n + (\mathrm{BA})_a\right) \geqslant 1$
Donc $2^n \det(\mathrm{B}) \det(\mathrm{A}) \geqslant 1$
Les valeurs propres de A sont des réels strictement positifs et des complexes non réels deux à deux conjugués de mêmes multiplicités car $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ positivement stable.
Ainsi (produit des valeurs propres de A) $\det(\mathrm{A}) > 0$ puis $\boxed{\det(\mathrm{B}) > 0}$

III.C.3) a) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. On a $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{M}^k}{k!}\right)^\top = \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{\left(\mathrm{M}^\top\right)^k}{k!}$
De plus la transposition est continue car il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie
En passant à la limite quand $\mathrm{N} \to +\infty$, on obtient $\exp\left(\mathrm{M}^\top\right) = \exp(\mathrm{M})^\top$
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a applique ce qui précède à $\mathrm{M} = -t\mathrm{A}$ et en posant $\mathrm{C} = \exp(-t\mathrm{A})$,
on obtient $\mathrm{V}(t) = \mathrm{C}^\top \mathrm{C}$, de plus $\mathrm{C} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ en effet : $\exp(-t\mathrm{A})\exp(t\mathrm{A}) = \mathrm{I}_n$
Ainsi $\mathrm{V}(t)^\top = \mathrm{V}(t)$ et $\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \mathrm{X}^\top \mathrm{V}(t) \mathrm{X} = \|\mathrm{CX}\| > 0$
donc $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ \mathrm{V}(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$
On utilisera deux fois la propriété pour f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et g linéaire défini sur cet espace on a :

$$g\left(\int_a^b f\right) = \int_a^b g \circ f$$

Soit $t > 0$.
On a $\mathrm{W}(t)^\top = \left(\displaystyle\int_0^t \mathrm{V}(s)\mathrm{d}s\right)^\top = \displaystyle\int_0^t \mathrm{V}(s)^\top \mathrm{d}s = \displaystyle\int_0^t \mathrm{V}(s)\mathrm{d}s = \mathrm{W}(t)$ (première fois)

Donc $\mathrm{W}(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On a $\mathrm{X}^\top \mathrm{W}(t)\mathrm{X} = \displaystyle\int_0^t \mathrm{X}^\top \mathrm{V}(s)\mathrm{X}\mathrm{d}s$ (deuxième fois)

Pour $t > 0$, la fonction $s \mapsto \mathrm{X}^\top \mathrm{V}(s)\mathrm{X}$ est continue, positive et non identiquement nulle sur $[0, t]$

donc $\mathrm{X}^\top \mathrm{W}(t)\mathrm{X} > 0$ d'où $\boxed{\mathrm{W}(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$

b) En posant $\psi_g : t \mapsto \mathrm{A}^\top \mathrm{W}(t) + \mathrm{W}(t)\mathrm{A}$ et $\psi_d : t \mapsto \mathrm{I}_n - \mathrm{V}(t)$

On a $\mathrm{W}(0) = 0$ et $\mathrm{V}(0) = \mathrm{I}_n$ car on a facilement que $\exp\left(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\right) = \mathrm{I}_n$

donc pour $t = 0$, on a $\psi_g(0) = \mathrm{A}^\top \mathrm{W}(0) + \mathrm{W}(0)\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - \mathrm{V}(0) = \psi_d(0)$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{W}'(t) = \mathrm{V}(t)$ car V est continue et donc $\psi_g'(t) = \mathrm{A}^\top \mathrm{V}(t) + \mathrm{V}(t)\mathrm{A}$

Le produit matriciel étant bilinéaire, on a $\mathrm{V}'(t) = -\mathrm{A}^\top \mathrm{V}(t) + \mathrm{V}(t)(-\mathrm{A})$

donc $\psi_d'(t) = \mathrm{A}^\top \mathrm{V}(t) + \mathrm{V}(t)\mathrm{A}$

Ainsi $\psi_d' - \psi_g' = (\psi_d - \psi_g)'$ est nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc $\psi_d - \psi_g$ est constante

Vu la valeur en 0, on a $\psi_d = \psi_g$

donc $\boxed{\text{pour tout réel } t,\ \mathrm{A}^\top \mathrm{W}(t) + \mathrm{W}(t)\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - \mathrm{V}(t)}$

c) • $t \mapsto \|\mathrm{V}(t)\|_2$ **intégrable sur** $[0, +\infty[$

La fonction $t \mapsto \mathrm{V}(t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ car $t \mapsto \exp(t\mathrm{M})$ l'est pour toute matrice carrée M ainsi que le produit matriciel qui est bilinéaire en dimension finie

Ainsi $t \mapsto \|\mathrm{V}(t)\|_2$ est continue sur $[0, +\infty[$ $\quad (*)$

Je pose $\alpha > 0$ défini comme en III.B.3

ce qui nous fournit $\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall t \geqslant 0,\ \|\mathrm{e}^{\alpha t}\exp(-t\mathrm{A})\|_2 \leqslant \mathrm{K}$ donc

$$\forall t \geqslant 0,\ \|\exp(-t\mathrm{A})\|_2 \leqslant \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\alpha t}$$

donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(-t\mathrm{A}) = 0$ (matrice nulle).

En utilisant *a*) et à nouveau la continuité de la transposition :

$$\lim_{t \to +\infty} \left\|\exp(-t\mathrm{A}^\top)\right\|_2 = \left\|\lim_{t \to +\infty} \exp(-t\mathrm{A}^\top)\right\|_2 = \left\|\lim_{t \to +\infty} \exp(-t\mathrm{A})^\top\right\|_2 = \left\|\left(\lim_{t \to +\infty} \exp(-t\mathrm{A})\right)^\top\right\|_2 = 0$$

Ceci nous fournit $\Lambda > 0$ tel que $\forall t \geqslant \Lambda,\ \|\exp(-t\mathrm{A}^\top)\|_2 \leqslant 1$

et sur le compact $[0, \Lambda]$, la fonction continue $t \mapsto \|\exp(-t\mathrm{A}^\top)\|_2$ est bornée

Ce qui nous fournit $\mathrm{C}_1 > 0$, tel que $\forall t \geqslant 0,\ \|\exp(-t\mathrm{A}^\top)\|_2 \leqslant \mathrm{C}_1$

Comme vue en cours il existe $\mathrm{C}_2 > 0$ tel que $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|\mathrm{AB}\|_2 \leqslant \mathrm{C}_2\|\mathrm{A}\|_2 \cdot \|\mathrm{B}\|_2$

On trouve alors $\mathrm{D} = \mathrm{C}_1\mathrm{C}_2\mathrm{K} > 0$ tel que $\forall t \geqslant 0,\ \|\mathrm{V}(t)\|_2 \leqslant \mathrm{D}\exp(-t\alpha)$

Or la fonction $t \mapsto \exp(-t\alpha)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ car $\alpha > 0$

par comparaison entre fonctions positives et avec $(*)$, on obtient $t \mapsto \|\mathrm{V}(t)\|_2$ intégrable sur $[0, +\infty[$

• **On a :** $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{V}(t) = 0$

Il suffit de remarquer que $\forall t \geqslant 0,\ \|\mathrm{V}(t)\|_2 \leqslant \mathrm{D}\exp(-t\alpha)$ (point précédent) et que $\lim\limits_{t \to +\infty} \exp(-t\alpha) = 0$

Ainsi selon les gendarmes $\lim\limits_{t \to +\infty} \|\mathrm{V}(t)\|_2 = 0$

• $t \mapsto \mathrm{W}(t)$ **admet une limite dans** $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ **en** $+\infty$

Pour $1 \leqslant, i, j \leqslant n$, on note $\mathrm{M}_{i,j}$ un coefficient en place (i, j) de $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ce qui se traduit par : $\mathrm{W}(t)_{i,j} = \displaystyle\int_0^t \mathrm{V}(s)_{i,j}\mathrm{d}s$

On a $|\mathrm{M}_{i,j}| \leqslant \sqrt{\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant l\leqslant n}} (\mathrm{M}_{l,k})^2} = \|\mathrm{M}\|_2$ d'où $\forall s \geqslant 0, |\mathrm{V}(s)_{i,j}| \leqslant \|\mathrm{V}(s)\|_2$.

De plus $s \mapsto \mathrm{V}(s)_{i,j}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ car c'est une fonction coefficient de V qui est continue

Ce qui nous assure de l'intégrabilité des fonctions $s \mapsto \mathrm{V}(s)_{i,j}$ sur $[0, +\infty[$

d'où l'existence des limites quand $t \to +\infty$, des $\mathrm{W}(t)_{i,j} = \displaystyle\int_0^t \mathrm{V}(s)_{i,j}\mathrm{d}s$ puis de $\mathrm{W}(t)$ (par coefficients)

- $\mathrm{B} = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{W}(t)$

  Notons cette limite $\mathrm{W}_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{W}(t)$

  Comme Φ est continue (endomorphisme en dimension finie) et que $\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(\mathrm{W}(t)) = \mathrm{I_N} - \mathrm{V(T)}$ on a donc $\mathrm{A}^\top\mathrm{W}_\infty + \mathrm{W}_\infty\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$

  En utilisant l'unicité du III.C.2.*a*), on a donc

  $\boxed{\text{en faisant tendre } t \text{ vers } +\infty \text{ dans l'égalité précédente, B est alors la limite de } \mathrm{W}(t) \text{ quand } t \text{ tend vers } +\infty}$

- B **est définie positive**

  Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $\forall t \geqslant 0,\ \mathrm{X}^\top\mathrm{W}(t)\mathrm{X} \geqslant 0$ car selon *a*), $\mathrm{W}(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

  en passant à la limite par continuité de $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{X}^\top\mathrm{MX}$ on obtient : $\mathrm{X}^\top\mathrm{BX} \geqslant 0$

  donc B est positive. Comme B est symétrique (III.C.2.b) réelle, on a $\mathrm{Sp(B)} \subset \mathbb{R}^+$

  mais comme $\det(\mathrm{B}) > 0$, alors $0 \notin \mathrm{Sp(B)}$ d'où $\mathrm{Sp(B)} \subset]0, +\infty[$

  On en déduit que $\boxed{\text{la matrice B est définie positive}}$ de la question III.C.2. OUF !