I Suites et intégrales

I.A - Étude d'une intégrale à paramètre

I.A.1) On considère la fonction φ : $\left\{\begin{array}{rcl} [0,+\infty[\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & \dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt} \end{array}\right.$

i Soit $t \in]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$.

ii Soit $x \in [0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

iii Soit $x \in [0,+\infty[$. On considère la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ qui est définie, positive et continue sur $]0,+\infty[$
De sorte que :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \forall x \in [0,+\infty[, |\varphi(x,t)| \leqslant g(t)$$

Quand $t \to 0$, $g(t) = \dfrac{1-1+t^2/2+\mathrm{o}(t^2)}{t^2}$ donc $g(t) \to 1/2$
Ainsi g est prolongeable par continuité en 0, donc g est intégrable sur $]0,1]$
Pour $t \geqslant 1$, $|g(t)| \leqslant 2/t^2$, or $t \mapsto 2/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
donc par comparaison à une fonction positive g est intégrable sur $[1,+\infty[$
Ainsi g est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

Avec i, ii et iii, $\boxed{f : x \mapsto \int_0^\infty \varphi(x,t)\mathrm{d}t \text{ est définie et continue sur } [0,+\infty[}$

Montrons maintenant la classe $\mathcal{C}^2$ de f avec le théorème de Leibniz :

i Soit $t \in]0,+\infty[$. La fonction $x \mapsto \varphi(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$
de dérivées successives : $x \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \dfrac{\cos t - 1}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ et $x \mapsto \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t) = (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}$

ii Soit $x \in [0,+\infty[$.
La fonction $t \mapsto \varphi(x,t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après la domination précédente.
Les fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ et $t \mapsto \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)$ sont continues sur $]0,+\infty[$.
De façon analogue à ci-dessus : on a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = 0$ ce qui donne l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ sur $]0,1]$
De plus par croissance comparée $\lim\limits_{t\to\infty} t^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = 0$ donc $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}(1/t^2)$
donc par comparaison à une fonction positive $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$
ainsi $t \mapsto \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$

iii Soit $a < b$ dans $]0,+\infty[$ et on pose $\mathrm{G} : t \mapsto \mathrm{e}^{-at}$
La fonction G est continue sur $[0,+\infty[$ et $\mathrm{G}(t) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{o}}(1/t^2)$
donc G est intégrable sur sur $[0,+\infty[$ et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \geqslant 0,\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant \mathrm{G}(t)$$

Avec i, ii et iii, $\boxed{f : x \mapsto \int_0^\infty \varphi(x,t)\mathrm{d}t \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0,+\infty[}$

et on a $f' : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos t - 1}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$ et $f'' : x \mapsto \displaystyle\int_0^\infty (1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$

I.A.2) Pour $x \geqslant 1$, je considère les fonctions $\psi_x : t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{e}^{-xt}$ et g de la question précédente.

i Pour $x \geqslant 1$, ψ_x est continue sur $]0,+\infty[$

ii Pour $t>0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\psi_x(t)=0$
donc la famille $(\psi_x)_{x\geqslant 1}$ converge simplement quand $x\to+\infty$ vers la fonction $t\mapsto 0$ sur $]0,+\infty[$.
iii La fonction $t\mapsto 0$ est continue sur $]0,+\infty[$
iv et on a l'hypothèse de domination avec la fonction g de la question précédente intégrable sur $]0,+\infty[$:

$$\forall x\geqslant 1, \forall t\in]0,+\infty[,\ |\psi_x(t)|\leqslant g(t)$$

<u>Conclusion</u> : Avec i, ii, iii et iv, on peut appliquer l'extension du théorème de convergence dominée qui donne l'intégrabilité de $t\mapsto 0$ sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to\infty}\int\limits_0^\infty \psi_x=\int\limits_0^\infty 0$

Pour la limite de f' en $+\infty$, on utilise également l'extension du théorème de convergence dominée avec la fonction de domination $t\mapsto \dfrac{-\cos t+1}{t}\mathrm{e}^{-t}$ pour $x\geqslant 1$

On trouve ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0 \text{ et } \lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0}$

I.A.3) Soit $x>0$. On a $f''(x)=\int\limits_0^\infty(1-\cos t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=\int\limits_0^\infty \mathrm{Re}\left((1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}\right)\mathrm{d}t$

or $t\mapsto(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ car continue et $\forall t\in]0,+\infty[$, $\left|(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}\right|\leqslant \mathrm{e}^{-xt}$

donc $f''(x)=\mathrm{Re}\left(\int\limits_0^\infty(\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t})\mathrm{d}t\right)$

or $\int\limits_0^\infty(\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t})\mathrm{d}t=\left[\dfrac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}}{x-\mathrm{i}}-\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\right]_{t=0}^{t\to\infty}=\dfrac{-1}{x-\mathrm{i}}+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}+\dfrac{1}{x}$

donc $\boxed{f'':x\mapsto -\dfrac{x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x} \text{ sur l'intervalle }]0,+\infty[}$

Donc on peut trouver $\mathrm{K}\in\mathbb{R}$ tel que $f':x\mapsto \ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\mathrm{K}$

De plus quand $x\to+\infty$, on a $\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)$

et $\dfrac{x^2}{x^2+1}\sim\dfrac{x^2}{x^2}=1$ donc $\dfrac{x^2}{x^2+1}\to 1$ par composition $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)\to 0$

donc $f'(x)\to\mathrm{K}$ donc $\mathrm{K}=0$ d'après la question précédente

On en déduit que $\boxed{\forall x>0,\ f'(x)=\ln(x)-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)}$

I.A.4) On note $g:x\mapsto x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}$

g est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x>0$

On a $g'(x)=\ln(x)+1-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=f'(x)$

donc on $g-f$ est constante sur $]0,+\infty[$.

quand $x\to+\infty$, $x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)=\dfrac{x}{2}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)=\dfrac{-x}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\sim\dfrac{-x}{2}\dfrac{1}{x^2}$

donc $x\ln(x)-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)\to 0$ et $-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\to 0$

ainsi $g(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$ or $f(x)\underset{x\to\infty}{\longrightarrow}0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-f(x))=0$ ainsi $\forall x>0$, $f(x)=g(x)$

de plus quand $x\to 0^+$, $x\ln(x)\to 0$ et $-\frac{1}{2}x\ln(x^2+1)-\arctan(x)+\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=\dfrac{\pi}{2}$ or f et g coïncident sur $]0,+\infty[$

donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ or f est continue sur $[0,+\infty[$

Ainsi $\boxed{\begin{cases} \forall x>0, f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}}$

I.A.5) On a $\dfrac{\pi}{2} = f(0) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos u}{u^2}\mathrm{d}u$

Soit $s>0$. La fonction $t \mapsto st$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$
On effectue alors le changement de variable $u = st$; $\mathrm{d}u = s\mathrm{d}t$ (qui donne l'existence de la nouvelle intégrale)

donc $\dfrac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{(st)^2}s\mathrm{d}t = \frac{1}{s}\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$

donc $s = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$ et $s = |s|$

pour $s=0$, c'est évident donc $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $|s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$

or les fonctions $s \mapsto |s|$ et $s \mapsto \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t$ sont paires

ce qui donne $\boxed{\forall s \in \mathbb{R},\ |s| = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t}$

I.B - Étude d'une suite d'intégrales

I.B.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $g_n : t \mapsto \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}$ qui est continue sur $]0,+\infty[$
De plus $\forall t \in [1,+\infty[$, $|g_n(t)| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et quand $t \to 0$, $g_n(t) = \frac{1-(1+\mathcal{O}(t^2))^n}{t^2} = \mathcal{O}(1)$
comme en **I.A.1)**, on conclut à l'intégrabilité de g_n sur $]0,+\infty[$
d'où l'existence de u_n

et $u_{2n+2} - u_{2n} = \displaystyle\int_0^\infty \frac{(\cos t)^{2n} - (\cos t)^{2n+2}}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{(\cos t)^{2n}(\sin t)^2}{t^2}\mathrm{d}t \geqslant 0$

d'où $\boxed{\text{l'existence de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et la croissance de la sous-suite } (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}.}$

I.B.2) On a $u_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}$

et $u_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\mathrm{d}t$ or $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

donc $u_2 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos^2 t}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-\cos(2t)}{2t^2}\mathrm{d}t$

en utilisant **I.A.5**, on a donc $\dfrac{4}{\pi}u_2 = |2|$

On a montré que $\boxed{u_1 = u_2 = \frac{\pi}{2}}$

I.C - Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $u \mapsto \sqrt{2u/n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $]0,+\infty[$ vers $]0,+\infty[$
On effectue le changement de variable $t = \sqrt{2u/n}$; $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{n}\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}}$

donc $u_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-(\cos t)^n}{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n}{2u/n}\frac{\sqrt{n}\mathrm{d}u}{\sqrt{2u}}$

On a montré que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}v_n \ \text{ avec } \ v_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

I.C.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction $\varphi : u \mapsto \left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n$

Soit $u \in]0,1]$. On a $\varphi'(u) = \dfrac{-n}{2}\sqrt{\dfrac{2}{nu}}\sin(\sqrt{2u/n})\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^{n-1}$

donc $|\varphi'(u)| = \left|\dfrac{\sin(\sqrt{2u/n})}{\sqrt{2u/n}}\right|\left|\cos(\sqrt{2u/n})\right|^{n-1} \leqslant \left|\dfrac{\sin(\theta)}{\theta}\right|$ où $\theta = \sqrt{2u/n}$

Par inégalité de convexité, on a $\left|\frac{\sin(\theta)}{\theta}\right| \leqslant 1$ donc a $|\varphi'(u)| \leqslant 1$

donc par inégalité des accroissements finis appliquée à φ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$

on a $|\varphi(0) - \varphi(u)| \leqslant 1 \times |u - 0|$

On a montré que $\boxed{\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1],\ \left|1 - \left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n\right| \leqslant u}$

I.C.3) On note la fonction $\psi_n : u \mapsto \dfrac{1-\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n}{u\sqrt{u}}$

$(*)$ Les fonctions ψ_n sont continues sur $]0,+\infty[$

$(**)$ Soit $u > 0$. Quand $n \to \infty$, on a $\cos(\sqrt{2u/n}) = 1 - \frac{u}{n} + \mathrm{o}(u/n)$

donc $\left(\cos(\sqrt{2u/n})\right)^n = \exp\left(n\ln(\cos(\sqrt{2u/n}))\right) = \exp\left(n\ln(1 - \frac{u}{n} + \mathrm{o}(u/n))\right)$

or $\ln(1 - \frac{u}{n} + \mathrm{o}(u/n)) \sim -\frac{u}{n}$ donc $n\ln(1 - \frac{u}{n} + \mathrm{o}(u/n)) \to -u$

donc par composition $\exp\left(n\ln(1 - \frac{u}{n} + \mathrm{o}(u/n))\right) \to \mathrm{e}^{-u}$ ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\psi_n(u) = \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$

donc la suite de fonctions (ψ_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ sur $]0,+\infty[$

$(***)$ la fonction $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ est continue sur $]0,+\infty[$

$(****)$ On considère la fonction $h : u \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{u}} & \text{si } u \in]0,1] \\ \frac{2}{u\sqrt{u}} & \text{sinon} \end{cases}$

On montre facilement que h est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a l'hypothèse domination

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ |\psi_n(x)| \leqslant h(x)$$

(sur $]0,1]$ on utilise **I.C.2**)

Avec $(*), (**), (***)$ et $(****)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée qui donne :

l'intégrabilité de $u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}$ sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty \psi_n = \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u$

Ainsi $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ admet une limite finie } l \text{ vérifiant } l = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u}$

I.C.4) Sous réserve d'existence, on effectue dans l une intégration par parties avec les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ $u \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-u}$ et $u \mapsto -2u^{-1/2}$:

On a $l = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\mathrm{d}u = \left[-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u})\right]_{u\to 0}^{u\to\infty} - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}(-2u^{-1/2})\mathrm{d}u$

On a par produit $\lim\limits_{u\to\infty}(-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u})) = 0$

et quand $u \to 0$, on a $1-\mathrm{e}^{-u} \sim u$ donc $-2u^{-1/2}(1-\mathrm{e}^{-u}) \sim -2\sqrt{u} \to 0$

donc le bloc entre crochets vaut 0 ce qui valide l'intégration par parties

donc $l = 2\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u = 2\sqrt{\pi}$ selon la relation admise

donc $l \neq 0$ ainsi d'après la question précédente et **I.C.1**, on a $u_n \sim \dfrac{v_n\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} \sim \dfrac{l\sqrt{n}}{2\sqrt{2}}$

On conclut que $\boxed{u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}}$

II Autour du pile ou face

II.A - Étude de $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|)$

II.A.1) Toutes ces variables aléatoires considérées admettent des moments d'ordre 2 car elles prennent un nombre fini de valeurs.

Il est clair que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = 0$ et par linéarité $\mathrm{E}(\mathrm{S}) = n \times 0$

De plus $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X}_1)^2 = \mathrm{E}(1_\Omega) - 0 = 1$ (espérance d'une variable aléatoire constante)

et comme les X_k sont indépendantes deux à deux car mutuellement indépendantes, on a $\mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{V}(\mathrm{X}_n)$

donc $\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = 0 \text{ et } \mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = n}$

<u>Remarque :</u> Dans la suite pour $k \in \mathbb{R}$, je noterai $\mathrm{E}(k \cdot 1_\Omega) = \mathrm{E}(k) = k$ pour une variable aléatoire constante.

II.A.2) On a $\mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S})\cos(\mathrm{T}) - \sin(\mathrm{S})\sin(\mathrm{T})) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S})\cos(\mathrm{T})) - \mathrm{E}(\sin(\mathrm{S})\sin(\mathrm{T}))$

Par lemme des coalitions $\cos(\mathrm{S})$ et $\cos(\mathrm{T})$ sont indépendantes et il en est de même pour $\sin(\mathrm{S})$ et $\sin(\mathrm{T})$,

ainsi $\mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}))\mathrm{E}(\cos(\mathrm{T})) - \mathrm{E}(\sin(\mathrm{S}))\mathrm{E}(\sin(\mathrm{T}))$

On remarque que $\mathrm{T} \sim -\mathrm{T}$ donc $\sin(\mathrm{T}) \sim \sin(-\mathrm{T}) = -\sin(\mathrm{T})$

donc $\mathrm{E}(\sin(\mathrm{T})) = \mathrm{E}(-\sin(\mathrm{T})) = -\mathrm{E}(\sin(\mathrm{T}))$ ainsi $\mathrm{E}(\sin(\mathrm{T})) = 0$

ce qui permet de conclure que $\boxed{\mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}+\mathrm{T})) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}))\mathrm{E}(\cos(\mathrm{T}))}$

II.A.3) Soit $t \in \mathbb{R}$. On effectue une récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, pour montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$

<u>Initialisation :</u> On a : $\varphi_1(t) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}_1 t)) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{X}_1 t)) = \mathrm{E}(\cos(t)) = \cos(t)^1$

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$.

On a $\varphi_{n+1}(t) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}_n t + \mathrm{X}_{n+1} t))$

On peut appliquer la question précédente car $\mathrm{S}_n t$ et $\mathrm{X}_{n+1} t$ sont des variables aléatoires finies et que $\mathrm{X}_{n+1} t \sim -\mathrm{X}_{n+1} t$

donc $\varphi_{n+1}(t) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}_n t + \mathrm{X}_{n+1} t)) = \mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}_n t))\mathrm{E}(\cos(\mathrm{X}_{n+1} t)) = \varphi_n(t)\mathrm{E}(\cos(\mathrm{X}_1 t))$ car $\mathrm{X}_{n+1} \sim \mathrm{X}_1$

donc $\varphi_{n+1}(t) = (\cos t)^{n+1}$ en utilisant l'initialisation

<u>Conclusion :</u> On a montré par récurrence que $\boxed{\varphi_n(t) = (\cos t)^n \text{ pour tout entier } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout réel } t}$

II.A.4) À l'aide de la question **I.A.5**, on a $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|) = \mathrm{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(\mathrm{S}_n t)}{t^2}\mathrm{d}t\right)$

Par le lemme du transfert : $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|) = \displaystyle\sum_{s\in\mathrm{S}_n(\Omega)} \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos(st)}{t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = s)$

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\displaystyle\sum_{s\in\mathrm{S}_n(\Omega)}\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = s) - \sum_{s\in\mathrm{S}_n(\Omega)}\cos(st)\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = s)}{t^2}\mathrm{d}t$ (somme finie)

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{1-\mathrm{E}(\cos(\mathrm{S}_n t))}{t^2}\mathrm{d}t$ par le lemme du transfert à nouveau

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|) = \mathrm{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{1-\varphi_n(t)}{t^2}\mathrm{d}t\right) = \mathrm{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{1-\cos(t)^n}{t^2}\mathrm{d}t\right)$ d'après **II.A.3**

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|) = \mathrm{E}\left(\dfrac{2}{\pi}u_n\right)$ ainsi $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{E}(|\mathrm{S}_n|) = \dfrac{2}{\pi}u_n}$

II.A.5) Comme les X_k prennent leurs valeurs dans $\{1,-1\}$, alors

$\mathrm{S}_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \mathrm{X}_k$ ne prend que des valeurs entières et impaires et S_{2n+2} ne prend que des valeurs entières et paires

Comme $\mathrm{S}_{2n+2} = \mathrm{S}_{2n+1} + \mathrm{X}_{2n+2}$

ainsi on a $(\mathrm{S}_{2n+1} \geqslant 0) = (\mathrm{S}_{2n+1} \geqslant 1) \subset (\mathrm{S}_{2n+2} \geqslant 0)$ et de même $(\mathrm{S}_{2n+1} \leqslant 0) \subset (\mathrm{S}_{2n+2} \leqslant 0)$

donc $\big||\mathrm{S}_{2n+2}| - |\mathrm{S}_{2n+1}|\big| = \big|\mathrm{S}_{2n+2} - \mathrm{S}_{2n+1}\big|$ donc $|\mathrm{S}_{2n+2}| - |\mathrm{S}_{2n+1}|$ prend ses valeurs dans $\{1,-1\}$ et

$$(|\mathrm{S}_{2n+2}| - |\mathrm{S}_{2n+1}| = 1) = (\mathrm{S}_{2n+1} > 0, \mathrm{X}_{2n+2} = 1) \cup (\mathrm{S}_{2n+1} < 0, \mathrm{X}_{2n+2} = -1)$$

Le lemme des coalitions s'applique par indépendance des X_k, on donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} > 0, \mathrm{X}_{2n+2} = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} > 0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{2n+2} = 1)$$

De plus comme $\mathrm{X}_k \sim -\mathrm{X}_k$ on a $\mathrm{S}_{2n+1} \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \mathrm{X}_k \sim \sum_{k=1}^{2n+1} (-\mathrm{X}_k) \sim -\mathrm{S}_{2n+1}$

donc $\mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} > 0) = \mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} < 0)$ or $\mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} > 0) + \mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} < 0) = 1$ car S_{2n+1} ne s'annule pas

donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} > 0, \mathrm{X}_{2n+2} = 1) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$

d'où

$$\mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} > 0, \mathrm{X}_{2n+2} = 1) = \frac{1}{4} \text{ et de même } \mathrm{P}(\mathrm{S}_{2n+1} < 0, \mathrm{X}_{2n+2} = -1) = \frac{1}{4}$$

donc $\mathrm{P}(|\mathrm{S}_{2n+2}| - |\mathrm{S}_{2n+1}| = 1) = \frac{1}{2}$ et de même $\mathrm{P}(|\mathrm{S}_{2n+2}| - |\mathrm{S}_{2n+1}| = -1) = \frac{1}{2}$

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_{2n+2}| - |\mathrm{S}_{2n+1}|)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ d'où $\mathrm{E}(|\mathrm{S}_{2n+2}|) = \mathrm{E}(|\mathrm{S}_{2n+1}|))$

On déduit de la question précédente que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{2n+1} = u_{2n+2}}$

II.B - Étude de $\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}$

II.B.1) On va montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2 - 2n$

<u>Initialisation :</u> On a $\mathrm{E}(\mathrm{S}_1^4) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1^4) = \mathrm{E}(1) = 1$ et $3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 1$

La propriété est vraie au rang 1

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2 - 2n$. Montrons $\mathrm{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = 3(n+1)^2 - 2(n+1)$

On a $3(n+1)^2 - 2(n+1) = 3n^2 + 4n + 1$ et

$$\mathrm{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = \mathrm{E}\left((\mathrm{S}_n + \mathrm{X}_{n+1})^4\right) = \mathrm{E}\left(\mathrm{S}_n^4 + 4\mathrm{S}_n^3\mathrm{X}_{n+1} + 6\mathrm{S}_n^2\mathrm{X}_{n+1}^2 + 4\mathrm{S}_n\mathrm{X}_{n+1}^3 + \mathrm{X}_{n+1}^4\right)$$

comme $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}^3) = 0$ et $\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}^2) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}^4) = \mathrm{E}(1) = 1$ et par indépendance de S_n et X_{n+1}, on a

$$\mathrm{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = \mathrm{E}(\mathrm{S}_n^4) + 4\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^3)\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}) + 6\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^2)\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}^2) + 4\mathrm{E}(\mathrm{S}_n)\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}^3) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n+1}^4) = \mathrm{E}(\mathrm{S}_n^4) + 6\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^2) + 1$$

or $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2 - 2n$ et $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^2) = \mathrm{V}(\mathrm{S}_n) + \mathrm{E}(\mathrm{S}_n)^2 = n + 0$ donc

$$\mathrm{E}(\mathrm{S}_{n+1}^4) = 3n^2 - 2n + 6n + 1 = 3n^2 + 4n + 1$$

<u>Conclusion :</u> On a montré que $\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^4) = 3n^2 - 2n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*}$

II.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Comme $\mathrm{U}_n = \left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right)^4$ est une variable aléatoires finies à valeurs positives et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$,
on peut donc appliquer l'inégalité de Markov :

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{U}_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \sqrt{n}\mathrm{E}(\mathrm{U}_n)$$

or $\mathrm{E}(\mathrm{U}_n) = \dfrac{\mathrm{E}(\mathrm{S}_n^4)}{n^4} = \dfrac{3n^2 - 2n}{n^4} \leqslant \dfrac{3}{n^2}$ donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}\left(\mathrm{U}_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}}$

II.B.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathcal{Z}_n = \displaystyle\bigcup_{k \geqslant n} \left(\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\left(\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \in \mathcal{A}$ car U_k est une variable aléatoire
donc $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable
De plus on a

$$0 \leqslant \mathrm{P}\left(\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant \frac{3}{k^{3/2}}$$

Ainsi par réunion dénombrable

$$0 \leqslant \mathrm{P}(\mathcal{Z}_n) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{P}\left(\mathrm{U}_k \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}} \leqslant \infty$$

la série $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{3}{k^{3/2}}$ converge car $3/2 > 1$ donc $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{3}{k^{3/2}} = 0$

Ainsi $\boxed{\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}(\mathcal{Z}_n) = 0}$ par théorème d'encadrement

II.B.4) On a : $\mathcal{Z} = \displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right)$

La famille $\displaystyle\left(\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille décroissante d'événements

de plus $\mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $0 \leqslant \mathrm{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} \mathcal{Z}_k\right) \leqslant \mathrm{P}(\mathcal{Z}_n)$ donc par continuité décroissante $\mathrm{P}(\mathcal{Z}) = 0$
Soit $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$ ce qui nous fournit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ tel que $\omega \notin \mathcal{Z}_\mathrm{N}$
Soit $n \geqslant \mathrm{N}$, on a $\mathrm{U}_n(\omega) < \dfrac{1}{n}$.
On a donc $\dfrac{\mathrm{S}_n^4(\omega)}{n^4} < \dfrac{1}{n}$ donc $\left|\dfrac{\mathrm{S}_n(\omega)}{n}\right| < \dfrac{1}{n^{1/4}}$
donc par théorème d'encadrement on a montré $\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}$, $\frac{\mathrm{S}_n(\omega)}{n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$
or $\mathrm{P}(\mathcal{Z}) = 0$ donc $\boxed{\left(\dfrac{\mathrm{S}_n}{n}\right) \text{ converge presque sûrement vers } 0}$

III D'autres sommes aléatoires

III.A - Étude de $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)$

III.A.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On remarque que pour a et $b \in \mathbb{R}$, on a $|a+b| \leqslant |a| + |b|$ avec égalité si et seulement si $ab \geqslant 0$

donc $|a+b|-|a| \leqslant |b|$ avec égalité si et seulement si $ab \geqslant 0$

Ainsi $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) = (|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n| = a_{n+1})$ car $|a_{n+1}\mathrm{X}_{n+1}|$ est une variable élétoire constante égale à a_{n+1}
on a aussi $||a+b|-|a|| \leqslant |b|$ ainsi $|a+b|-|a| \geqslant -|b|$

$$\text{Ainsi } (|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n| \geqslant -a_{n+1}) = \Omega$$

On a $\Omega = (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) \cup (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$ (union disjointe)
De plus, $\mathrm{T}_n \sim -\mathrm{T}_n$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n > 0) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_n < 0)$ (analogue à **II**) et donc $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n > 0) \leqslant \frac{1}{2}$
On a $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0) = (\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{X}_{n+1} = -1) \cup (\mathrm{T}_n > 0, \mathrm{X}_{n+1} = 1)$
donc $\mathrm{P}\left(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{X}_{n+1} = -1\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{T}_n > 0, \mathrm{X}_{n+1} = 1\right)$ (incompatibilité)
donc $\mathrm{P}\left(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0\right) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_n < 0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = -1) + \mathrm{P}(\mathrm{T}_n > 0)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = 1)$ (indépendance)
donc $\mathrm{P}\left(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0\right) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_n > 0)$ et de même $\mathrm{P}\left(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0\right) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_n > 0)$
Ainsi $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$

On considère la variable aléatoire $\mathrm{W} : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} a_{n+1} & \text{si } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) \geqslant 0 \\ -a_{n+1} & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$

de sorte que $\mathrm{W} \leqslant |\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|$ car

- si $\mathrm{T}_n(\omega)\mathrm{X}_{n+1}(\omega) \geqslant 0$, alors $\mathrm{W}(\omega) = a_{n+1} = |\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)|$
- si $\mathrm{T}_n(\omega)\mathrm{X}_{n+1}(\omega) < 0$, alors $\mathrm{W}(\omega) = -a_{n+1} \leqslant |\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)|$

comme $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} \geqslant 0) \geqslant \mathrm{P}(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$, on a $\mathrm{E}(\mathrm{W}) \geqslant 0$ or $\mathrm{E}(\mathrm{W}) \leqslant \mathrm{E}(|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|)$
donc $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|) \geqslant 0$
ainsi $\boxed{\text{la suite } (\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

III.A.2) On suppose que la série $\sum a_n^2$ est convergente

On a $\mathrm{V}(\mathrm{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{V}(a_k\mathrm{X}_k)$ par indépendance

donc $\mathrm{V}(\mathrm{T}_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2\mathrm{V}(\mathrm{X}_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = \mathrm{M}$ où on a noté $\mathrm{M} = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2$

On a donc $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n^2) = \mathrm{V}(\mathrm{T}_n) + \mathrm{E}(\mathrm{T}_n)^2 = \mathrm{V}(\mathrm{T}_n) \leqslant \mathrm{M}$

On note $\mathrm{W} = |\mathrm{T}_n|$. On a $\mathrm{T}_n^2 = \mathrm{W}^2$ et $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|) = \displaystyle\sum_{w\in\mathrm{W}(\Omega)} w\mathrm{P}(\mathrm{W} = w)$

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)^2 = \left(\displaystyle\sum_{w\in\mathrm{W}(\Omega)} w\mathrm{P}(\mathrm{W} = w)\right)^2 \leqslant \sum_{w\in\mathrm{W}(\Omega)} w^2\mathrm{P}(\mathrm{W} = w)$

par convexité de $t \mapsto t^2$ et car les $\mathrm{P}(\mathrm{W} = w) \geqslant 0$ (nombre fini) et $\displaystyle\sum_{w\in\mathrm{W}(\Omega)} \mathrm{P}(\mathrm{W} = w) = 1$

comme $\mathrm{W} \geqslant 0$, on a $\displaystyle\sum_{w\in\mathrm{W}(\Omega)} w^2\mathrm{P}(\mathrm{W} = w) = \sum_{w\in\mathrm{W}(\Omega)} w^2\mathrm{P}(\mathrm{W}^2 = w^2) = \sum_{t\in\mathrm{T}_n^2(\Omega)} t\mathrm{P}(\mathrm{T}_n^2 = t)$

ainsi $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)^2 \leqslant \displaystyle\sum_{w\in\mathrm{W}(\Omega)} w^2\mathrm{P}(\mathrm{W} = w) = \mathrm{E}(\mathrm{T}_n^2) \leqslant \mathrm{M}$

donc la suite $(\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée (par $\sqrt{\mathrm{M}}$) et croissante d'après la question précédente

donc $\boxed{\text{si la série } \sum a_n^2 \text{ est convergente, alors la suite } (\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|))_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est convergente}}$

III.A.3) On a $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_1|) = a_1$ car $|\mathrm{T}_1| = a_1|\mathrm{X}_1|$

<u>Premier cas :</u> Si $a_1 = 0$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k = 0$ car $a_1 \geqslant a_2 + \cdots + a_n$ et les $a_k \geqslant 0$
donc $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|) = 0 = \mathrm{E}(|\mathrm{T}_1|) = a_1$

<u>Deuxième cas :</u> Si $a_1 > 0$,

Si $\mathrm{X}_1(\omega)=1$ alors $\mathrm{T}_n(\omega)=a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k\mathrm{X}_k(\omega)\geqslant 0$ donc $|\mathrm{T}_n(\omega)|=a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k\mathrm{X}_k(\omega)$

si $\mathrm{X}_1(\omega)=-1$ alors $\mathrm{T}_n(\omega)=-a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k\mathrm{X}_k(\omega)\leqslant 0$ donc $|\mathrm{T}_n(\omega)|=a_1-\sum_{k=2}^{n}a_k\mathrm{X}_k(\omega)$

dans les deux cas $|\mathrm{T}_n(\omega)|-|\mathrm{T}_1(\omega)|=\mathrm{X}_1(\omega)\left(\sum_{k=2}^{n}a_k\mathrm{X}_k(\omega)\right)$

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|-|\mathrm{T}_1|)=\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_1\cdot\sum_{k=2}^{n}a_k\mathrm{X}_k\right)=\mathrm{E}\left(\mathrm{X}_1\right)\cdot\mathrm{E}\left(\sum_{k=2}^{n}a_k\mathrm{X}_k\right)$ par lemme des coalitions

donc $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)-\mathrm{E}(|\mathrm{T}_1|)=0$ ainsi $\boxed{\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)=\mathrm{E}(|\mathrm{T}_1|)=a_1}$

III.B - Application à une suite d'intégrales

III.B.1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

La fonction $\psi_n : t\mapsto \dfrac{1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$

Et $\forall t\in[1,+\infty[$, $|\psi_n(t)|\leqslant\dfrac{2}{t^2}$ qui donne l'intégrabilité de ψ sur $[1,+\infty[$

Quand $t\to 0$, on a $1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)=1-\left(1+\mathcal{O}(t^2)\right)\left(1+\mathcal{O}(t^2)\right)\cdots\left(1+\mathcal{O}(t^2)\right)$

donc $1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)=1-1+\mathcal{O}(t^2)=\mathcal{O}(t^2)$ (produit fini)

donc $\psi_n(t)\underset{t\to 0}{=}\mathcal{O}(1)$ donc ψ_n est bornée au voisinage de 0 donc intégrable sur un intervalle $]0,1]$

ceci assure l'existence $\mathrm{J}_n=\displaystyle\int_0^{\infty}\psi_n$

Ainsi $\boxed{(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est une suite bien définie}}$

On choisit $a_k=\dfrac{1}{2k-1}$ pour $k\geqslant 1$ ainsi on a la convergence de la série $\sum_k a_k^2$

d'où d'après **II.A.2**, la convergence de la suite $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$ que l'on sait croissante d'après **II.A.1**.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. À l'aide de la question **I.A.5**, on a $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)=\mathrm{E}\left(\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos(\mathrm{T}_n t)}{t^2}\mathrm{d}t\right)$

Soit $t\in\mathbb{R}$. On a comme en **II.A.3** et **II.A.2**,

$$\mathrm{E}\cos(\mathrm{T}_n t)=\mathrm{E}\left(\cos\left(ta_1\mathrm{X}_1\right)\right)\mathrm{E}\left(\cos\left(ta_2\mathrm{X}_2\right)\right)\cdots\mathrm{E}\left(\cos\left(ta_n\mathrm{X}_n\right)\right)$$

donc comme en **II.A.3** :

$$\mathrm{E}\left(\cos(\mathrm{T}_n t)\right)=\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)$$

Avec la méthode de la question **II.A.4.** : $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\mathrm{E}\left(\cos(\mathrm{T}_n t)\right)}{t^2}\mathrm{d}t$ (deux fois ; lemme du transfert)

On a $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\dfrac{1-\cos(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)\cdots\cos\left(\frac{t}{2n-1}\right)}{t^2}\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)=\frac{2}{\pi}\mathrm{J}_n$

donc $\mathrm{J}_n=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)$ ainsi $\boxed{(\mathrm{J}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ est une suite croissante et convergente}}$

III.B.2) On renouvelle les mêmes choix et notations qu'à la question précédente :

On a $\sum_{k=2}^{7}a_k\simeq 0{,}9551337551337553$ à la calculatrice donc $\sum_{k=2}^{7}a_k\leqslant a_1=1$

donc $1=a_1=\mathrm{E}(|\mathrm{T}_1|)=\mathrm{E}(|\mathrm{T}_7|)$ d'après **III.A.3**

Par croissance de la suite $(\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|))_n$ on a $\forall n \in [\![1,7]\!]$, $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|) = 1$
donc comme $\mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2}\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)$, on a $\boxed{\mathrm{J}_n = \dfrac{\pi}{2} \text{ pour } 1 \leqslant n \leqslant 7}$
Pour pouvoir conclure, il reste à établir la stricte croissance de $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|)_{n\geqslant 7}$.
Pour cela on considère $n \geqslant 7$, on veut montrer $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_n|) < \mathrm{E}(|\mathrm{T}_{n+1}|)$

étape 1 : un résultat combinatoire : On va montrer que pour $p \geqslant 7$,

$$\text{il existe } \mathrm{K} \subset [\![1,p]\!] \text{ tel que } \sum_{k\in\mathrm{K}} a_k < \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k \text{ et } a_{p+1} + \sum_{k\in\mathrm{K}} a_k > \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k \text{ où } \overline{\mathrm{K}} = [\![1,p]\!] \setminus \mathrm{K}$$

Je note pour $p \geqslant 7$ et $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, : $\mathcal{S}_p(\mathrm{K}) = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\in\mathrm{K}}}^{n} a_k - \sum_{\substack{k=1\\k\notin\mathrm{K}}}^{n} a_k$

On remarque que $\mathcal{S}_p(\overline{\mathrm{K}}) = -\mathcal{S}_p(\mathrm{K})$
Il s'agit alors de montrer la propriété $\mathcal{E}_p$: « il existe $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, tel que $0 < |\mathcal{S}_p(\mathrm{K})| < a_{p+1}$ » pour $p \geqslant 7$
Premièrement : Soit $p \geqslant 7$ et $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, on montre que $\mathcal{S}_p(\mathrm{K}) \neq 0$.
Par l'absurde si il existe $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$, tel que $\mathcal{S}_p(\mathrm{K}) = 0$
alors je considère $l = \max\left\{j \in \mathbb{N} \,/\, 3^j \leqslant a_p\right\}$ et $b = 3^l$ et on a

$$\frac{1}{3^l} = \left| \sum_{\substack{k=1\\k\in\mathrm{K}, a_k\neq b}}^{n} a_k - \sum_{\substack{k=1\\k\notin\mathrm{K}, a_k\neq b}}^{n} a_k \right|$$

En mettant au même dénominateur le terme de droite et en simplifiant sous forme irréductible, on obtient $\dfrac{1}{3^l} = \dfrac{\mathrm{N}}{3^{l'}\mathrm{D}}$ où $\mathrm{N}, \mathrm{D} \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{D} \wedge 3 = 1$ et $l' \in [\![0, l-1]\!]$ (Absurde)
Ensuite : la $\mathcal{E}_p$ ne me semble pas héréditaire (*je n'ai pas trouvé*)
En revanche pour $p \geqslant 7$ je considère la propriété suivante :

$$\mathcal{P}_p : \text{il existe } \mathrm{K} \subset [\![1,p]\!] \text{ tel que } |\mathcal{S}_p(\mathrm{K})| \leqslant \frac{a_{p+1}}{2}$$

Avec ce qu'on vient de faire, on a $\mathcal{P}_p \Longrightarrow \mathcal{E}_p$
et cette propriété est héréditaire de la façon suivante : $\mathcal{P}_p \Longrightarrow \mathcal{P}_{p+2}$ pour $p \geqslant 7$
En effet, si il existe $\mathrm{K} \subset [\![1,p]\!]$ tel que $|\mathcal{S}_p(\mathrm{K})| \leqslant \dfrac{a_{p+1}}{2}$
Je peux supposer $0 < \mathcal{S}_p(\mathrm{K}) \leqslant \dfrac{a_{p+1}}{2}$ quitte à remplacer K par son complémentaire.
Je considère alors $\mathrm{K}' = \mathrm{K} \cup \{p+2\}$
On a alors $a_{p+2} - a_{p+1} \leqslant \mathcal{S}_{p+2}(\mathrm{K}') \leqslant a_{p+2} - \dfrac{a_{p+1}}{2}$
Par décroissance de $(a_k)_k$, il suffit alors d'établir que $a_{p+1} - a_{p+2} < \dfrac{a_{p+3}}{2}$ et $a_{p+2} < \dfrac{a_{p+3}}{2} + \dfrac{a_{p+1}}{2}$
La deuxième inégalité provient de la stricte concavité de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ car $a_k = 1/(2k-1)$
Pour la première $a_{p+1} - a_{p+2} = \dfrac{2}{4p^2+8p+3}$ et $\dfrac{a_{p+3}}{2} = \dfrac{1}{4p+10}$;
on calcule alors $4p^2 + 8p + 3 - 2(4p+10) = 4p^2 - 7 > 0$ pour $p \geqslant 7$
On vient de prouver $|\mathcal{S}_{p+2}(\mathrm{K}')| \leqslant \dfrac{a_{p+3}}{2}$
Il s'agit maintenant de chercher $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ vérifiant $\mathcal{P}_\mathrm{N}$ et $\mathcal{P}_{\mathrm{N}+1}$ et de vérifier que : $\forall p \in [\![7, \mathrm{N}-1]\!]$, $\mathcal{E}_p$
Pour cela, on exécute le script en Python qui suit. L'idée est de tout mettre au dénominateur en utilisant l'arithmétique « exacte »des entiers en python (version 3.4).

```
def inv_a(k):
    return 2*k-1

def essai(n):
    grand=1 # on y met le produit des a_k
```

```
    for k in range(1,n+2):
        grand*=2*k-1
    Ak=[grand//inv_a(k) for k in range(1,n+2)]
    res=[False,False]
    ens_K= 2**n-1# ensemble k est encod\'e par un entier
#l\'ecriture en base 2 donne la fonction caractéristique
    while (not res[0]) and ens_K>0:
# inutile de tester l ensemble vide
        somme=0
        reste=ens_K
        for i in range(1,n+1):
            if reste%2==1:
                somme +=Ak[i-1]
            else:
                somme -=Ak[i-1]
            reste=reste//2
        if abs(somme) <Ak[-1]:
            res[1]=True
#res[1] est le test de la propri\'et\'e voulue par le sujet
        if 2*abs(somme) <Ak[-1] and 0<2*abs(somme) :
            res[0]=True
#res[0] est le test de la propri\'et\'e h\'er\'editaire
        ens_K-=1
    return res

#on cherche \'a partir de 7, l\'a o\'u la propriete hereditaire P_k est vraie
# sur deux entiers cons\'ecutifs
n=7
es_n=essai(n)
es_s=essai(n+1)
test_n=es_n[0]
test_s=es_s[0]
while not(test_n and test_s):
    print(es_n)
    n+=1
    es_n=es_s
    es_s=essai(n+1)
    test_n=es_n[0]
    test_s=es_s[0]
print(es_n)
print(es_s)
```

Le résultat confirme la propriété attendue :

```
[False, True] # [P_7,E_7]
[True, True] # [P_8,E_8]
[False, True] # [P_9,E_9]
[True, True] # [P_10,E_10]
[True, True] # [P_11,E_11]
```

Difficile d'effectuer tout cela en temps limité ...

étape 2 : $\mathrm{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) \neq 0$: L'étape 1 nous fournit $\mathrm{K} \subset [\![1, n]\!]$ tel que

$$\sum_{k\in\mathrm{K}} a_k < \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k \text{ et } a_{p+1} + \sum_{k\in\mathrm{K}} a_k > \sum_{k\in\overline{\mathrm{K}}} a_k$$

On a $\left((\mathrm{X}_{n+1} = 1) \cap \bigcap_{k\in\mathrm{K}} (\mathrm{X}_k = 1) \cap \bigcap_{k\in\overline{\mathrm{K}}} (\mathrm{X}_k = -1)\right) \subset (\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{T}_{n+1} > 0)$ or par indépendance :

$$\mathrm{P}\left((\mathrm{X}_{n+1} = 1) \cap \bigcap_{k\in\mathrm{K}} (\mathrm{X}_k = 1) \cap \bigcap_{k\in\overline{\mathrm{K}}} (\mathrm{X}_k = -1)\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

donc $\mathrm{P}(\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{T}_{n+1} > 0) \neq 0$ or $(\mathrm{T}_n < 0, \mathrm{T}_{n+1} > 0) \subset (0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1})$ On a bien

$$\mathrm{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) \neq 0$$

étape 3 : $\mathrm{E}(|\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|) > 0$:

Comme T_n prend un nombre fini de valeurs et que $\mathrm{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) > 0$,
on peut donc considérer $\Lambda = \max\{|\mathrm{T}_n(\omega)| \,/\, |\mathrm{T}_n(\omega)| < a_{n+1}\}$
Ainsi

$$(|\mathrm{T}_n| \leqslant \Lambda) = (|\mathrm{T}_n| < a_{n+1}) \text{ et } 0 < \Lambda < a_{n+1}$$

On considère la variable aléatoire

$$\mathrm{W} : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} a_{n+1} & \text{si } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) \geqslant 0 \\ -a_{n+1} & \text{si } |\mathrm{T}_n(\omega)| \geqslant a_{n+1} \text{ et } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0 \\ a_{n+1} - 2\Lambda & \text{si } |\mathrm{T}_n(\omega)| < a_{n+1} \text{ et } (\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0 \end{cases} \end{cases}$$

Par construction on a $\mathrm{W} \leqslant |\mathrm{T}_{n+1}| - |\mathrm{T}_n|$; en effet

- si $|\mathrm{T}_n(\omega)| < a_{n+1}$ et $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0$, alors $|\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = a_{n+1} - |\mathrm{T}_n(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| \geqslant \mathrm{W}(\omega)$
- si $|\mathrm{T}_n(\omega)| \geqslant a_{n+1}$ et $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) < 0$, alors $|\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = -a_{n+1} + |\mathrm{T}_n(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = \mathrm{W}(\omega)$
- si $(\mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1})(\omega) \geqslant 0$, alors $|\mathrm{T}_{n+1}(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = a_{n+1} + |\mathrm{T}_n(\omega)| - |\mathrm{T}_n(\omega)| = \mathrm{W}(\omega)$

Il suffit alors d'établir que $\mathrm{E}(\mathrm{W}) > 0$.
Je note $\mathrm{A} = (|\mathrm{T}_n| \geqslant a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0)$, $\mathrm{B} = (|\mathrm{T}_n| \geqslant a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$, $\mathrm{C} = (|\mathrm{T}_n| < a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} > 0)$, $\mathrm{D} = (|\mathrm{T}_n| < a_{n+1}, \mathrm{T}_n\mathrm{X}_{n+1} < 0)$ et $\mathrm{F} = (\mathrm{T}_n = 0)$
$(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{F}, \mathrm{D})$ est un système complet d'événements et on remarque que

$$\mathrm{W} = a_{n+1}1_{\mathrm{A}} - a_{n+1}1_{\mathrm{B}} + a_{n+1}1_{\mathrm{C}} + (a_{n+1} - 2\Lambda)1_{\mathrm{D}} + a_{n+1}1_{\mathrm{F}}$$

donc

$$\mathrm{E}(\mathrm{W}) = a_{n+1}\mathrm{P}(\mathrm{A}) - a_{n+1}\mathrm{P}(\mathrm{B}) + a_{n+1}\mathrm{P}(\mathrm{C}) + (a_{n+1} - 2\Lambda)\mathrm{P}(\mathrm{D}) + a_{n+1}\mathrm{P}(\mathrm{F})$$

Comme $\mathrm{T}_n \sim -\mathrm{T}_n$ et $\mathrm{X}_{n+1} \sim -\mathrm{X}_{n+1}$ et vue l'indépendance de T_n et X_{n+1}, on montre comme plus haut que

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(|\mathrm{T}_n| \geqslant a_{n+1}) \text{ et } \mathrm{P}(\mathrm{C}) = \mathrm{P}(\mathrm{D}) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(0 < |\mathrm{T}_n| < a_{n+1})$$

donc

$$\mathrm{E}(\mathrm{W}) \geqslant 2(a_{n+1} - \Lambda)\mathrm{P}(\mathrm{C})$$

donc $\mathrm{E}(\mathrm{W}) > 0$ ce qui permet de conclure

• • • FIN • • •