Matrices positives (im)primitives

I Si $\rho(\mathrm{A}) < 1$, alors $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathrm{A}^m = 0$

I.A - Deux exemples de normes sous-multiplicatives

I.A.1) Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons $\begin{cases} (i) & \mathrm{N}(\mathrm{A}) \in \mathbb{R}^+ \text{ (évident)} \\ (ii) & \mathrm{N}(\lambda\mathrm{A}) = |\lambda| \cdot \mathrm{N}(\mathrm{A}) \\ (iii) & \mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) + \mathrm{N}(\mathrm{B}) \\ (iv) & \mathrm{N}(\mathrm{A}) = 0 \Longrightarrow \mathrm{A} = 0 \\ (v) & \mathrm{N}(\mathrm{AB}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{N}(\mathrm{B}) \end{cases}$

<u>Pour (ii) :</u> Si $\lambda = 0$ on a bien $\mathrm{N}(\lambda\mathrm{A}) = \mathrm{N}(0) = 0 = |\lambda| \cdot \mathrm{N}(\mathrm{A})$. On suppose maintenant que $\lambda \neq 0$.

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| = |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant |\lambda| \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$ donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}| \leqslant |\lambda| \cdot \mathrm{N}(\mathrm{A})$

comme c'est vrai pour tout i, on a $\mathrm{N}(\lambda\mathrm{A}) = \displaystyle\max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{i,j}|\right) \leqslant |\lambda| \cdot \mathrm{N}(\mathrm{A})$

On applique alors cette inégalité à la matrice $\lambda\mathrm{A}$ et au scalaire $\frac{1}{\lambda}$
ainsi $\mathrm{N}(\frac{1}{\lambda}\lambda\mathrm{A}) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| \cdot \mathrm{N}(\lambda\mathrm{A})$ et donc $\mathrm{N}(\lambda\mathrm{A}) \geqslant |\lambda| \cdot \mathrm{N}(\mathrm{A})$
Les deux inégalités donnent $\mathrm{N}(\lambda\mathrm{A}) = |\lambda| \cdot \mathrm{N}(\mathrm{A})$

<u>Pour (iii) :</u> Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) + \mathrm{N}(\mathrm{B})$

donc $\mathrm{N}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A}) + \mathrm{N}(\mathrm{B})$

<u>Pour (iv) :</u> On suppose que $\mathrm{N}(\mathrm{A}) = 0$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On a donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| = 0$ (somme de réels positifs) donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a $a_{i,j} = 0$

donc $\mathrm{A} = 0$

<u>Pour (v) :</u> On note $\mathrm{AB} = (c_{i,j})$

Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a $|c_{i,j}| = \left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}|$

donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| \leqslant \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} |a_{i,k}| \cdot |b_{k,j}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}|\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \cdot \mathrm{N}(\mathrm{B}) \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{B})$

On a montré que $\boxed{\text{l'application } \mathrm{A} \mapsto \mathrm{N}(\mathrm{A}) \text{ est une norme sous-multiplicative sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

I.A.2) Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons $\begin{cases} (i) & \|\mathrm{A}\| \in \mathbb{R}^+ \\ (ii) & \|\lambda\mathrm{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathrm{A}\| \\ (iii) & \|\mathrm{A}+\mathrm{B}\| \leqslant \|\mathrm{A}\| + \|\mathrm{B}\| \\ (iv) & \|\mathrm{A}\| = 0 \Longrightarrow \mathrm{A} = 0 \\ (v) & \|\mathrm{AB}\| \leqslant \|\mathrm{A}\| \cdot \|\mathrm{B}\| \end{cases}$

Le (i) découle du (i) pour N et du fait que l'application $\psi : \mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{AQ} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est définie.
Le (ii) et (iii) découlent respectivement de (ii) et (iii) pour N et du fait que l'application ψ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Le (iv) découle de (iv) pour N et du fait que l'application ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Le (v) découle de (v) pour N et du fait que l'application ψ est un morphisme d'algèbre
On a montré que $\boxed{\text{l'application } \mathrm{A} \mapsto \|\mathrm{A}\| \text{ est une norme sous-multiplicative sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$

I.B - Une conséquence de l'inégalité $\rho(\mathrm{A}) < 1$

I.B.1) On écrit $\mathrm{T} = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ On a alors $\mathrm{T}\Delta = (t_{i,j}\delta^{j-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
et comme $\Delta^{-1} = \mathrm{diag}(1, 1/\delta, \ldots, 1/\delta^{n-1})$, on a alors $\widehat{\mathrm{T}} = \Delta^{-1}\mathrm{T}\Delta = (t_{i,j}\delta^{j-1}/\delta^{i-1})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Ainsi $\widehat{\mathrm{T}} = (t_{i,j}\delta^{j-i})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$
Comme T est triangulaire supérieur, si $i > j$ on a $t_{i,j} = 0$ donc $\boxed{\widehat{\mathrm{T}} \text{ est triangulaire supérieure}}$
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Comme A et T sont semblable, on a $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{T}) = \{t_{k,k} \,/\, 1 \leqslant k \leqslant n\}$ ainsi $|t_{i,i}| < 1$
On a $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}\delta^{j-i}| = |t_{i,i}| + \sum_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}\delta^{j-i}|$ car $\widehat{\mathrm{T}}$ est triangulaire supérieure
On a $\displaystyle\lim_{\delta\to 0} \sum_{j=i+1}^{n} |t_{i,j}\delta^{j-i}| = 0$ (somme finie éventuellement vide) donc $\displaystyle\lim_{\delta\to 0} \sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}\delta^{j-i}| = |t_{i,i}| \in [0, 1[$
ceci nous fournit $\alpha_i > 0$, tel que $\forall \delta > 0, \delta \leqslant \alpha_i \Rightarrow \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}\delta^{j-i}| \leqslant \frac{|t_{i,i}| + 1}{2} < 1$ car $|t_{i,i}| < \frac{|t_{i,i}|+1}{2} < 1$
En choisissant $\delta = \displaystyle\min_{1\leqslant i\leqslant n} \alpha_i$, on obtient $\forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |t_{i,j}\delta^{j-i}| < 1$
$\boxed{\text{On a montré qu'on peut choisir } \delta \text{ de sorte que } \mathrm{N}(\widehat{\mathrm{T}}) < 1}$

I.B.2) On a $\|\mathrm{A}\| = \mathrm{N}((\mathrm{P}\Delta)^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}\Delta) = \mathrm{N}(\Delta^{-1}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}\Delta) = \mathrm{N}(\Delta^{-1}\mathrm{T}\Delta) = \mathrm{N}(\widehat{\mathrm{T}})$ Ainsi $\boxed{\|\mathrm{A}\| < 1}$
comme $\|\ \|$ est sous-multiplicative d'après I.A.2, on a par récurrence immédiate $0 \leqslant \|\mathrm{A}^m\| \leqslant \|\mathrm{A}\|^m$
donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \|\mathrm{A}^m\| = 0$
on en déduit $\boxed{\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \mathrm{A}^m = 0}$ car en dimension finie, la convergence ne dépend pas du choix de la norme

II Chemins dans les matrices positives

II.A - Réduction d'un chemin à un chemin élémentaire

On suppose qu'il existe dans A un chemin de i vers j où $i \neq j$.
On note E l'ensemble des longueurs des chemins dans A de i vers j.
L'ensemble E est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$, il admet donc un plus petit élément ℓ.
Notons $i = i_0 \to \cdots \to i_k \to \cdots \to i_\ell = j$ un chemin de longueur minimale, ℓ
Par l'absurde si ce chemin n'était pas élémentaire il existerait $0 \leqslant k < k' \leqslant \ell$, tels que $i_k = i_{k'}$
Ainsi on aurait un autre chemin $i = i_0 \to \cdots \to i_k \to i_{k'+1} \to \cdots \to i_\ell = j$ qui va de i vers j de longueur $\ell - (k' - k)$
car on a enlevé les indices de $k + 1$ à k'
donc $\ell - (k' - k) \in \mathrm{E}$ et $\ell - (k' - k) < \min \mathrm{E}$ Absurde
Ainsi $\boxed{\text{s'il existe dans A un chemin de } i \text{ vers } j, \text{ avec } i \neq j, \text{ alors il existe un chemin } \textit{élémentaire} \text{ de } i \text{ vers } j}$
et comme l'application : $k \in [\![0, \ell]\!] \mapsto i_k \in [\![1, n]\!]$ est injective : $\boxed{\text{la longueur } \ell \text{ de ce chemin vérifie } \ell \leqslant n - 1}$
On fait de même pour les chemins (i_k) allant de i vers i mais en utilisant l'injectivité de $k \in [\![0, \ell - 1]\!] \mapsto i_k$
$\boxed{\text{s'il existe dans A un circuit passant } i, \text{ alors il existe un circuit } \textit{élémentaire} \text{ passant par } i \text{ et de longueur } \ell \leqslant n}$

II.B - Une caractérisation de l'existence d'un chemin de i *à* j

Soit $\mathrm{A} \geqslant 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour $m \geqslant 1$. Montrons par récurrence l'équivalence demandée pour tout i, j dans $[\![1, n]\!]$, que je note $\mathcal{P}_m$.
<u>Initialisation :</u> Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$.
On a l'équivalence entre les trois propositions :
- il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j, de longueur 1 ;

- $a_{i,j} > 0$
- le coefficient d'indice i, j de A^1 (noté $a_{i,j}^{(1)}$) est strictement positif.

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie
Hérédité : Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}_m$. Montrons $\mathcal{P}_{m+1}$.
Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$.

$\Rightarrow$ On suppose qu'il existe dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j, de longueur $m+1$.
Notons $i = i_0 \to \cdots \to i_{m+1} = j$ ce chemin et $q = i_m$
En utilisant l'hypothèse de récurrence on a $a_{i,q}^{(m)} > 0$ par hypothèse de récurrence appliqué à i et q
or $a_{i,j}^{(m+1)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} = a_{i,q}^{(m)} a_{q,j} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq q}} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j}$ et $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq q}} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} \geqslant 0$ car $\forall p \geqslant 1$, $\mathrm{A}^p \geqslant 0$
et $a_{q,j} > 0$ à cause du chemin $i = i_0 \to \cdots \to i_m = q \to i_{m+1} = j$ ce qui prouve que $a_{i,j}^{(m+1)} > 0$

$\Leftarrow$ On suppose que $a_{i,j}^{(m+1)} > 0$.
On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}^{(m)} a_{k,j} > 0$ ceci nous fournit $q \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i,q}^{(m)} a_{q,j} > 0$
Comme les coefficients sont tous positifs, alors $a_{i,q}^{(m)} > 0$ et $a_{q,j} > 0$
$\mathcal{P}_m$ nous fournit un chemin de longueur m dans A : $i = i_0 \to \cdots \to i_m = q$
donc $i = i_0 \to \cdots \to i_m = q \to j$ est un chemin de longueur $m+1$ dans A allant de i à j

Conclusion : On a $\boxed{\text{bien montré par récurrence l'équivalence des propositions :}}$
- $\boxed{\text{il existe dans A un chemin d'origine } i \text{, d'extrémité } j \text{, de longueur } m\,;}$
- $\boxed{\text{le coefficient d'indice } i, j \text{ de } \mathrm{A}^m \text{ (noté } a_{i,j}^{(m)} \text{) est strictement positif.}}$

II.C - Chemins dans une puissance de A

On désigne par $\left(a^{(m)}\right)_{i,j}^{(\ell)}$ le terme général de la matrice $(\mathrm{A}^m)^\ell$
En remarquant que $(\mathrm{A}^m)^\ell = \mathrm{A}^{m\ell}$ et à l'aide de la question précédente :
On a alors l'équivalence entre :
- $\boxed{\text{il existe dans } \mathrm{A}^m \text{ un chemin d'origine } i \text{, d'extrémité } j \text{, de longueur } \ell\,;}$
- $\left(a^{(m)}\right)_{i,j}^{(\ell)} > 0$
- $a_{i,j}^{(m\ell)} > 0$
- $\boxed{\text{il existe dans A un chemin d'origine } i \text{, d'extrémité } j \text{, de longueur } m\ell.}$

III Matrices primitives et indice de primitivité

III.A - Chemins élémentaires dans une matrice primitive

Soit $i \neq j$. Soit $m \geqslant 1$ tel que $\mathrm{A}^m > 0$. Ainsi **II.B** nous fournit un chemin dans A de i vers j
donc **II.A** nous fournit alors $\boxed{\text{dans A un chemin élémentaire de } i \text{ à } j \text{ et de longueur } \ell \leqslant n-1}$
et de manière analogue $\boxed{\text{il existe dans A un circuit élémentaire passant par } i \text{ et de longueur } \ell \leqslant n}$

III.B - Puissances d'une matrice primitive

III.B.1) Je prends $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 sauf $[\mathrm{A}]_{1,1} = 0$
Les coefficients de la première ligne ou de la première colonne de A^2 valent $n-1 > 0$ les autres valent $n > 0$
$\boxed{\text{A est un exemple simple d'une matrice carrée primitive mais non strictement positive}}$

III.B.2) Par l'absurde on suppose que l'on n'a *pas* $Bx > 0$.

donc il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $\sum_{j}^{n} [B]_{i,j} x_j = 0$ (somme de termes positifs)

donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $[B]_{i,j} x_j = 0$ donc $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $x_j = 0$ car $B > 0$

donc $x = 0$ Absurde

$\boxed{\text{si } B > 0 \text{ dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } x \geqslant 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \text{ avec } x \neq 0 \text{ alors } Bx > 0}$

III.B.3) On va montrer par récurrence que pour tout $p \geqslant m$: $A^p > 0$

Initialisation : évidente pour $p = m$

Hérédité : Soit $p \geqslant m$ tel que $A^p > 0$. Montrons $A^{p+1} > 0$

Par l'absurde si on n'avait *pas* $A^{p+1} > 0$

On note $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de A de sortte que les colonnes de $A^{p+1} = A^p A$ sont $A^p c_1, A^p c_2, \dots, A^p c_n$

donc il existerait j tel que $A^p c_j$ ne vérifie pas $A^p c_j > 0$ or $A^p > 0$ et $c_j \geqslant 0$

donc par contraposition de la question précédente $c_j = 0$

On a donc $Ae_j = 0$ où $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$

d'où $A^p e_j = 0$ or $A^p > 0$ et $e_j \geqslant 0$ et $e_j \neq 0$

ce qui est en contradiction avec le résultat de la question précédente.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } A^m > 0 \text{ alors } \forall p \geqslant m,\ A^p > 0}$

III.B.4) On suppose A primitive et on prend $m \geqslant 1$ tel que $A^m > 0$

Pour $k \geqslant 1$, on a donc $(A^k)^m = A^{km} > 0$ car $km \geqslant m$ et à l'aide de la question précédente

$\boxed{\text{si A est primitive, alors } A^k \text{ est primitive pour tout } k \geqslant 1}$

III.B.5) Par l'absurde, on suppose qu'il existe une matrice A primitive d'indice m dont le rayon spectral est nul.
Le polynôme caractéristique de A noté χ_A est scindé sur $\mathbb{C}[X]$ d'après d'Alembert-Gauss et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ donc $\chi_A = X^n$ donc $A^n = 0$ D'après Cayley-Hamilton

Ainsi $A^{m+n} = 0$ et $A^{m+n} > 0$ d'après **III.B.3** Absurde

ainsi $\boxed{\text{le rayon spectral d'une matrice primitive est strictement positif}}$

III.C - La matrice de Weilandt

III.C.1) On a $W_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $\mathrm{tr}(W_2) = 1$ et $\det(W_2) = -1$

donc $\chi_{W_2} = X^2 - X - 1$ on a vérifié le résultat pour $n = 2$

On a $\chi_{W_3} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & 1 \\ 1 & 1 & X \end{vmatrix} = X^3 - X - 1$ avec Sarus (Argh !)

Si $n > 3$, on développe selon la dernière colonne :

$$\chi_{W_n} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_{[n]} = X^n + \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

or en développant selon la dernière colonne, pour $p > 3$, on a :

$$\begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{[p]} = + \begin{vmatrix} X & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{[p-1]} = \begin{vmatrix} \ddots \end{vmatrix}_{[3]} \text{ (termes d'une suite constante)}$$

donc $\chi_{W_n} = X^n + \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = X^n - 1 - X$

Ainsi $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } W_n \text{ est } X^n - X - 1}$

En appliquant Cayley-Hamilton, on a $W_n^n = W_n + I_n$

donc $W_n^{n^2-2n+1} = W_n (W_n^n)^{n-2} = W_n (W_n + I_n)^{n-2}$

Comme I_n et W_n commutent : on a $W_n^{n^2-2n+1} = W_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} W_n^k I_n^{n-2-k}$

Après développement et changement d'indice : $\boxed{W_n^{n^2-2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k}$

Puis $W_n^{n^2-2n+2} = W_n \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k = \binom{n-2}{n-2} W_n^n + \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} W_n^{k+1}$

À nouveau avec Cayley-Hamilton et changement d'indice : $\boxed{W_n^{n^2-2n+2} = I_n + W_n + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k}$

III.C.2) En reprenant (e_i) la base canonique de $\mathbb{R}^n$

On a $W_n e_1 = e_n$ et pour $i \geqslant 3$ $W_n e_i = e_{i-1}$

donc pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $W_n^k e_1 = e_{n-k+1}$

ainsi pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $\left[W_n^k\right]_{1,1} = 0$ et $[W_n^n]_{1,1} = [W_n]_{1,1} + [I_n]_{1,1} = 1$

donc d'après **II.B**, le plus court circuit passant par l'indice 1 dans la matrice W_n est de longueur n

et à l'aide de la matrice W_n : $\boxed{\text{le plus court circuit passant par l'indice 1 est : } 1 \to n \to (n-1) \to \cdots 2 \to 1}$

donc d'après les calculs de la question précédente $\left[W_n^{n^2-2n+1}\right]_{1,1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} \left[W_n^k\right]_{1,1} = 0$

donc $\boxed{W_n^{n^2-2n+1} \text{ n'est pas strictement positive}}$

III.C.3) En utilisant le circuit dans W_n : $1 \to n \to (n-1) \to \cdots 2 \to 1$,

on voit qu'il existe un chemin qui va de i vers j pour tous $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$

En utilisant **II.A**,

$\boxed{\text{il existe bien un chemin d'origine } i\text{, d'extrémité } j\text{, et de longueur inférieure ou égale à } n-1}$

Pour tous $i \neq j$ dans $[\![1, n]\!]$, il existe alors $k \in [\![1, n-1]\!]$, $\left[W_n^k\right]_{i,j} > 0$ d'après **II.B**, de plus $\forall p \in \mathbb{N}$, $W_n^p \geqslant 0$

donc $\left[W_n^{n^2-2n+2}\right]_{i,j} = [I_n]_{i,j} + [W_n]_{i,j} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} \left[W_n^k\right]_{i,j} > 0$

et pour $i \in [\![1, n]\!]$, on a $[I_n]_{i,i} = 1 > 0$ et donc $\left[W_n^{n^2-2n+2}\right]_{i,i} > 0$

donc pour tous i, j dans $[\![1, n]\!]$, $\left[W_n^{n^2-2n+2}\right]_{i,j} > 0$

On en déduit que $\boxed{\text{la matrice } W_n^{n^2-2n+2} \text{ est strictement positive}}$

comme la matrice $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive, on peut conclure que $\boxed{\mathrm{W}_n \text{ est primitive, d'indice de primitivité } n^2-2n+2}$

III.D - Indice de primitivité maximum

III.D.1) Par l'absurde, on suppose $\ell = n$.
Montrons par l'absurde qu'alors tous les circuits de A sont de longueur multiple de n
On suppose qu'il existe un circuit dans A dont la longueur ne soit pas multiple de n
On considère un tel circuit de longueur minimale r : $i_0 \to \cdots \to i_r = i_0$
On a donc $r \geqslant n$ et r n'est pas un multiple de n ainsi $r > n$
il existe alors $k < k'$ tel que $i_k = i_{k'}$
on obtient alors deux circuits $i_k \to \cdots \to i_{k'}$ et $i_0 \to \cdots\ i_k \to \cdots \to i_{k'} \to i_r = i_0$
La somme des longueurs est r donc l'un d'entre eux a sa longueur qui n'est pas multiple de n
Ceci est en contradiction avec le caractère minimal de r
Ainsi $\boxed{\text{tous les circuits de A sont de longueur multiple de } n.}$
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il n'y a pas de circuit de longueur $kn+1$
Ainsi d'après **II.B** $\boxed{\text{les matrices } \mathrm{A}^{kn+1} \text{ (avec } k \in \mathbb{N}) \text{ sont de diagonale nulle}}$
mais pour $p \geqslant m$ on a $\mathrm{A}^p > 0$ où m est l'indice de primitivité
<u>en prenant $k = m$, on aboutit à une contradiction</u>

III.D.2)
a*)* <u>Si $1 \leqslant i \leqslant \ell$,</u> On utilise le circuit $i \to (i+1) \to \cdots \to \ell \to 1 \to \cdots \to i-1 \to i$ en le répétant si nécessaire, on obtient des chemins de longueur aussi grande que l'on veut, dont les sommets sont tous dans $[\![1,\ell]\!]$
En s'arrêtant au bout de $n-\ell$ pas , on obtient un chemin d'origine i, de longueur $n-\ell$ et passant uniquement par des sommets dans $\{1,2,\ldots,\ell\}$, il en est donc de même pour son extrémité
<u>Si $\ell+1 \leqslant i \leqslant n$,</u> comme A est primitive il existe un chemin d'origine i et d'extrémité 1
Ceci nous fournit un chemin élémentaire d'origine i et d'extrémité 1 : $i = i_0 \to \cdots i_m = 1$
On considère $r = \min\{k \in [\![1,m]\!] \,/\, 1 \leqslant i_k \leqslant \ell\}$ d'après **II.A**
comme le chemin est élémentaire; alors $r \leqslant n-\ell$
On considère le chemin $i'_0 = i_r \to \cdots i'_{m'}$ tel que $1 \leqslant i'_{m'} \leqslant \ell$ et $m' = n-\ell-r$ (construit comme dans le cas précédent)
on a donc $i = i_0 \to \cdots i_r = i'_0 \to i'_1 \cdots i'_{m'}$ d'origine i, de longueur $n-\ell$ et son extrémité est dans $\{1,2,\ldots,\ell\}$
En conclusion : dans les deux cas
$\boxed{\text{Dans A, on peut former un chemin d'origine } i\text{, de longueur } n-\ell\text{, et dont l'extrémité est dans } \{1,2,\ldots,\ell\}}$
b*)* Soit $i \in [\![1,\ell]\!]$.
On utilise le circuit $1 \to 2 \to \ldots \to \ell-1 \to \ell \to 1$ qui nous donne un circuit de longueur ℓ passant par i.
En particulier il existe dans A un chemin de longueur ℓ d'origine k et d'extrémité k.
$\boxed{\text{les } \ell \text{ premiers coefficients diagonaux de } \mathrm{A}^\ell \text{ (et en particulier le } k\text{-ième) sont strictement positifs}}$
On sait que A^ℓ est primitive d'après **III.B.4**
donc il existe un chemin dans A^ℓ de k à j de longueur $\lambda \leqslant n-1$ d'après **III.A**
On commence par le chemin dans A^ℓ : $\underbrace{k \to k}_{n-1-\lambda \text{ fois}}$
cette concaténation de chemins est $\boxed{\text{un chemin dans } \mathrm{A}^\ell \text{ d'origine } k \text{ d'extrémité } j \text{ de longueur } n-1}$
Ainsi il existe un chemin de longueur $\ell(n-1)$ d'origine k et d'extrémité j.
c*)* On concatène les chemins fournis par a) et b) pour obtenir dans A un chemin d'origine i, d'extrémité j et de longueur $n+\ell(n-2)$.
Comme c'est valable pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$, $\boxed{\text{on en déduit finalement } \mathrm{A}^{n+\ell(n-2)} > 0}$
On a $\ell \leqslant n-1$ donc $n+\ell(n-2) \leqslant n+(n-1)(n-2) \leqslant n^2-2n+2$ car $n \geqslant 2$
donc $\boxed{\mathrm{A}^{n^2-2n+2} > 0}$ d'après **III.B.3**

IV Étude des puissances d'une matrice primitive

IV.A - Puissances de la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A} - r\mathrm{L}$

IV.A.1) Soit $(x, y) \in \Delta \times \mathrm{H}$. On peut trouver $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = (\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)z$.
On a $(x|y) = (x|(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)z) = x^\top(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)z = x^\top(\mathrm{A}^\top - r\mathrm{I}_n)^\top z = \left[(\mathrm{A}^\top - r\mathrm{I}_n)x\right]^\top z = 0z = 0$
donc $x \perp y$.
Ainsi $\mathrm{H} \perp \Delta$
donc $\mathrm{H} \subset \Delta^\perp$ or le théorème du rang nous donne

$$\dim \mathrm{H} = \mathrm{rg}(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^\top - r\mathrm{I}_n) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{A}^\top - r\mathrm{I}_n)) = n - \dim \Delta = \dim(\Delta^\perp)$$

ainsi $\boxed{\text{H est l'hyperplan orthogonal à la droite } \Delta \text{ (c'est-à-dire } \mathrm{H} = \Delta^\perp)}$

IV.A.2) Soit $u \in \mathrm{H}$. On a $\mathrm{L}u = xy^\top u = x(y|u) = 0$ car $\mathrm{H} \perp \Delta$
On identifie dans les calculs : $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
Soit $v \in \mathrm{D}$. On peut trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $v = \mu x$ donc $\mathrm{L}v = xy^\top(\mu x) = \mu x(y^\top x) = \mu x = v$
donc $\mathrm{H} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{L})$ et $\mathrm{D} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{L} - \mathrm{I}_n)$ ce qui prouve que $\mathrm{H} \cap \mathrm{D} = \{0\}$ (sous espaces propres en somme directe)
or d'après le théorème du rang $\dim \mathrm{H} + \dim \mathrm{D} = n$ donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{H} \oplus \mathrm{D}$
de plus on vient de voir que la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite D, parallèlement à l'hyperplan H coïncidait avec l'application linéaire dont la matrice est L dans la base canonique. Ainsi
$\boxed{\text{L est la matrice, dans la base canonique, de la projection de } \mathbb{R}^n \text{ sur la droite D, parallèlement à l'hyperplan H}}$

IV.A.3) On a alors $\mathrm{Im}\,\mathrm{L} = \mathrm{D}$ et D est une droite donc $\boxed{\text{L est de rang 1}}$
On a $\mathrm{L} = (x_i y_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et pour tout i et j, on a $x_i > 0$ et $y_j > 0$ donc $\boxed{\mathrm{L} > 0}$
$\mathrm{L}^\top y = (yx^\top)y = y(x^\top y) = 1y = y$ donc $\boxed{\mathrm{L}^\top y = y.}$

IV.A.4) On a $\mathrm{AL} = \mathrm{A}(xy^\top) = (\mathrm{A}x)y^\top = (rx)y^\top = r\mathrm{L}$
et $\mathrm{LA} = (xy^\top)\mathrm{A} = x(^\top \mathrm{A}^\top y) = x(^\top ry) = r(xy^\top)$
donc $\boxed{\mathrm{AL} = \mathrm{LA} = r\mathrm{L}}$
Par récurrence : <u>Initialisation :</u> on a $(\mathrm{A} - r\mathrm{L})^1 = \mathrm{A}^1 - r^1\mathrm{L}$
<u>Hérédité :</u> Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathrm{A} - r\mathrm{L})^m = \mathrm{A}^m - r^m\mathrm{L}$
On a $(\mathrm{A} - r\mathrm{L})^{m+1} = (\mathrm{A} - r\mathrm{L})(\mathrm{A}^m - r^m\mathrm{L}) = \mathrm{A}^{m+1} - r^m\mathrm{AL} - r\mathrm{LA}^m + r^{m+1}\mathrm{L}^2 = \mathrm{A}^{m+1} - r^{m+1}\mathrm{L} - r\mathrm{LA}^m + r^{m+1}\mathrm{L}^2$
donc $(\mathrm{A} - r\mathrm{L})^{m+1} = \mathrm{A}^{m+1} - r^{m+1}\mathrm{L} - r\mathrm{LA}^m + r^{m+1}\mathrm{L} = \mathrm{A}^{m+1} - r\mathrm{LA}^m$
Par récurrence immédiate on a $\mathrm{LA}^m = r^m\mathrm{L}$ ce qui permet de conclure que $(\mathrm{A} - r\mathrm{L})^{m+1} = \mathrm{A}^{m+1} - r^{m+1}\mathrm{L}$
<u>Conclusion</u> $\boxed{\text{On a montré par récurrence : } \forall m \in \mathbb{N}^*,\ (\mathrm{A} - r\mathrm{L})^m = \mathrm{A}^m - r^m\mathrm{L}.}$

IV.B - La matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A} - r\mathrm{L}$ ***vérifie*** $\rho(\mathrm{B}) < r$

IV.B.1) On a $z = \frac{1}{\lambda}\mathrm{B}z$ d'après l'énoncé
donc $\mathrm{L}z = \frac{1}{\lambda}\mathrm{L}(\mathrm{A} - r\mathrm{L})\mathrm{Z}$ or $\mathrm{L}(\mathrm{A} - r\mathrm{L}) = \mathrm{LA} - r\mathrm{L}^2 = r\mathrm{L} - r\mathrm{L} = 0$ d'après **A**
ainsi $\boxed{\mathrm{L}z = 0, \text{ puis } \mathrm{A}z = \lambda z}$ car $(\mathrm{A} - r\mathrm{L})z = \lambda z$
Ainsi $\mathrm{Sp}(\mathrm{B}) \setminus \{0\} \subset \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$ donc $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B}), |\lambda| \leqslant \rho(\mathrm{A})$. On en déduit $\boxed{\rho(\mathrm{B}) \leqslant r.}$

IV.B.2) Par l'absurde, on choisit $\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ de telle sorte que $|\lambda| = r$.
Avec les notations et résultats de la questions précédentes, on a $\mathrm{A}z = \lambda z$
En utilisant le résultat admis qui affirme : $\forall \mu \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})$, $|\mu| < r$ ou $\mu = r$ on obtient : $\boxed{\lambda = r}$
donc $\mathrm{A}z = rz$ donc $z \in \mathrm{D}$ donc $\mathrm{L}z = z$ d'après **IV.A.2**
donc $z = 0$ <u>ce qui aboutit à une contradiction</u> car z est un vecteur propre
On vient de montrer par l'absurde que $\rho(\mathrm{B}) \neq r$ or $\rho(\mathrm{B}) \leqslant r$ d'après la question précédente
donc on peut conclure $\boxed{\rho(\mathrm{B}) < r}$

IV.B.3) On a $\left(\dfrac{1}{r}\mathrm{A}\right)^m = \mathrm{L} + \left(\dfrac{1}{r}\mathrm{B}\right)^m$ d'après **IV.A.4**

or $\mathrm{Sp}\left(\frac{1}{r}\mathrm{B}\right) = \left\{\frac{\lambda}{r} \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp(B)}\right\}$ et $\forall\lambda \in \mathrm{Sp(B)}, |\lambda| < r$ donc $\forall\lambda \in \mathrm{Sp}\left(\frac{1}{r}\mathrm{B}\right)$, $|\lambda| < 1$

Ainsi $\left(\frac{1}{r}\mathrm{B}\right)^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la partie **I** d'où $\boxed{\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\mathrm{A}\right)^m = \mathrm{L}.}$

IV.C - Le rayon spectral de* A *est une valeur propre simple

On commence par remarquer que $\left(\frac{1}{r}\mathrm{T}\right)^m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{P^{-1}LP}$ car $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{P^{-1}XP}$ est continue (linéaire en dimension finie)

donc $\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\mathrm{T}\right)^m$ est une matrice de rang 1

La diagonale de T est composée des valeurs propres de A comptées avec multiplicités

donc la diagonale de $\frac{1}{r}\mathrm{T}$ est composée de complexes de modules strictement inférieur à 1 et de 1 dont le nombre d'occurrences est μ

En regardant la limite coefficients par coefficients : $\mathrm{P^{-1}LP} = \lim\limits_{m\to+\infty}\left(\frac{1}{r}\mathrm{T}\right)^m$ est une matrice triangulaire où n'apparaît sur sa diagonale uniquement que des 0 et μ occurrences de 1

donc $\mu \leqslant \mathrm{rg(P^{-1}LP)} = \mathrm{rg(L)} = 1$ ainsi $\boxed{\mu = 1}$

V Matrices carrées positives irréductibles

V.A - Premières propriétés des matrices irréductibles

V.A.1)

$\boxed{\text{A est irréductible si et seulement si pour tous } 1 \leqslant i,j \leqslant n\text{, il existe dans A un chemin d'origine } i \text{ et d'extrémité } j}$

V.A.2) On suppose que A est irréductible. Soit i et j dans $[\![1,n]\!]$.

Si $i \neq j$, d'après la question précédente et **II.A**, il existe un chemin de longueur $1 \leqslant m \leqslant n-1$ de i à j

donc selon **II.B**, on a $a_{i,j}^{(m)} > 0$

Si $i = j$, on a $1 = [\mathrm{I}_n]_{i,i} = \left[\mathrm{A}^0\right]_{i,i} = a_{i,i}^{(0)}$

$\boxed{\text{si A est irréductible, alors pour tous } i \text{ et } j \text{ dans } [\![1,n]\!]\text{, il existe } m \in [\![0,n-1]\!] \text{ tel que } a_{i,j}^{(m)} > 0}$

V.A.3) On prend $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{J}^m = \mathrm{J}$ ou $\mathrm{J} = \mathrm{I}_2$

$\boxed{\text{J est un exemple simple d'une matrice carrée irréductible mais non primitive}}$

V.A.4) On suppose A^2 est irréductible. Soit $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

Il existe dans A^2 un chemin d'origine i et d'extrémité j de longueur $m \in \mathbb{N}$

donc d'après **II.C.**, il existe dans A un chemin d'origine i et d'extrémité j de longueur $2m$

On vient de montrer par la contraposée que $\boxed{\text{si A n'est } \textit{pas} \text{ irréductible, alors } \mathrm{A}^2 \text{ n'est } \textit{pas} \text{ irréductible}}$

$\boxed{\text{J est un exemple simple d'une matrice carrée irréductible telle que } \mathrm{J}^2 = \mathrm{I}_2 \text{ ne soit pas irréductible}}$

V.A.5) Par l'absurde, on suppose qu'il existe une matrice A irréductible telle que $\rho(\mathrm{A}) \leqslant 0$

donc $\mathrm{Sp(A)} = \{0\}$ donc A est nilpotente comme en **III.B.5**

or il existe un circuit de 1 vers 1 de longueur $m \geqslant 2$ en concaténant un chemin de 1 vers 2 et un autre de 2 vers 1

donc en concaténant n fois ce circuit à lui-même on obtient un circuit de 1 à 1 de longueur nm

donc $0 < [\mathrm{A}^{nm}]_{1,1} = 0$ car $\mathrm{A}^n = 0$ Absurde

Ainsi $\boxed{\text{le rayon spectral d'une matrice irréductible est strictement positif.}}$

V.B - Deux caractérisations de l'irréductibilité et une condition nécessaire

V.B.1) On remarque que $\mathrm{B, C} \geqslant 0$. On procède par implications circulaires

<u>A est irréductible $\Longrightarrow$ B > 0 :</u> On suppose que A est irréductible.

Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$. On a pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left[A^k\right]_{i,j} \geqslant 0$ et **V.A.2** nous fournit $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $[A^m]_{i,j} > 0$
donc $[B]_{i,j} = [I_n]_{i,j} + [A]_{i,j} + \left[A^2\right]_{i,j} + \cdots + \left[A^{n-1}\right]_{i,j} > 0$ ainsi $B > 0$
<u>$B > 0 \Longrightarrow C > 0$:</u> On suppose $B > 0$. Montrons $C > 0$
Par l'absurde si on n'avait *pas* $C > 0$
Comme $C \geqslant 0$, il existerait $i, j \in [\![1, n]\!]$ tel que $[C]_{i,j} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left[A^k\right]_{i,j} = 0$ (somme de termes positifs)
donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\left[A^k\right]_{i,j} = 0$ donc $[B]_{i,j} = 0$ Absurde
<u>$C > 0 \Longrightarrow A$ est irréductible :</u> On suppose $C > 0$. Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$.
On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \left[A^k\right]_{i,j} > 0$
donc il existe $m \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $[A^m]_{i,j} > 0$ donc A est bien irréductible
<u>On montré l'équivalence entre les trois propriétés :</u>

- $\boxed{\text{la matrice A est irréductible ;}}$
- $\boxed{\text{la matrice } B = I_n + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} \text{ est strictement positive ;}}$
- $\boxed{\text{la matrice } C = (I_n + A)^{n-1} \text{ est strictement positive.}}$

V.B.2) Si une colonne de A était nulle, alors il existerait un vecteur e de la base canonique tel que $Ae = 0$
donc pour tout $m \geqslant 1$, on aurait $A^m e = 0$ et donc A^m aurait la même colonne nulle.
et donc A ne pourrait pas être irréductible
Vue la définition, A est irréductible si et seulement si $A^\top$ est irréductible
donc $\boxed{\text{si A irréductible alors aucune ligne (et aucune colonne) de A n'est identiquement nulle}}$

V.C - Deux conditions suffisantes de primitivité

V.C.1) Soit i, j dans $[\![1, n]\!]$. Il existe un chemin $\mathcal{C}$ de longueur $\ell \leqslant n-1$ de i vers j dans A (irréductible)
On considère alors le chemin $\mathcal{C}'$ dans A : $i \to i \to \cdots \to i$ de longueur $n - 1 - \ell$ (éventuellement vide)
la concaténation de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}$ est un chemin de longueur $n-1$ de i vers j donc $a_{i,j}^{(n-1)} > 0$

$\boxed{\text{si } \forall i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} > 0 \text{ alors } A^{n-1} > 0}$

V.C.2) Soit j, k dans $[\![1, n]\!]$. Prenons $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i,i} > 0$.
Comme A est irréductible, il existe dans A un chemin $\mathcal{C}_1$ de j vers i et un autre $\mathcal{C}_2$ de i vers k
La concaténation de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ nous fournit un chemin $\mathcal{C}$ de j vers k passant par i
Parmi les n^2 chemins ainsi définis, on en prend celui de longueur maximale notée m.
On note ℓ la longueur du chemin $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_3$ le chemin constant dans A : $i \to i \to \cdots \to i \to i$ de longueur $m - \ell$
Alors la concaténation de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_2$ est un chemin dans A d'origine j, d'extrémité k de longueur m
donc $a_{j,k}^{(m)} > 0$ donc $A^m > 0$ $\boxed{\text{si } \exists i \in [\![1, n]\!],\ a_{i,i} > 0, \text{ alors A est primitive}}$

VI Le coefficient d'imprimitivité

VI.A - Diagonales des puissances d'une matrice imprimitive

Je trouve que la phrase « la totalité du spectre de A est invariante dans la multiplication par $\omega = \exp(2i\pi/p)$ »est ambiguë. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, je note m_λ la multiplicité de la valeur propre λ et j'interprète l'énoncé par :

$$\{(\omega\lambda, \mu_\lambda) \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = \{(\lambda, \mu_\lambda) \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$$

ce qui est plus fort que $\{\omega\lambda \,/\, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = \mathrm{Sp}(A)$. Je fais cela pour deux raisons :

-1) je ne sais pas faire avec cette dernière condition plus faible

-2) le terme « totalité »nous guide vers un sens plus fort.

Ainsi on a $\operatorname{tr}(\mathrm{A}^m) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \mu_\lambda \lambda^m = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A})} \mu_\lambda (\omega\lambda)^m = \omega^m \operatorname{tr}(\mathrm{A}^m)$ or $\omega^m \neq 1$ car m non multiple de p

donc $0 = \operatorname{tr}(\mathrm{A}^m) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^{(m)}$ or $\mathrm{A}^m \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{la diagonale de } \mathrm{A}^m \text{ est identiquement nulle.}}$

Par conséquent par l'absurde si on avait $\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{r}\mathrm{A}\right)^m = \mathrm{L}$ avec $\operatorname{rg} \mathrm{L} = 1$ et $\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}$

On aurait $\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{r}\mathrm{A}\right)^{pm+1} = \mathrm{L}$

donc les coefficients diagonaux de L seraient nuls (limites par coefficients)

comme $\mathrm{L}^2 = \mathrm{L}$, on a $\operatorname{rg}(\mathrm{L}) = \operatorname{tr}(\mathrm{L}) = 0$ donc $1 = 0$

Ainsi <u>le résultat de la question **IV.B.3** ne tient plus si A est imprimitive</u>

<u>OU BIEN</u> (j'ai un doute) *Je trouve cette question difficile à interpréter !*

Si on avait l'existence de $\mathrm{L} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{r}\mathrm{A}\right)^m = \mathrm{L}$

Prenons x un vecteur propre de A pour la valeur propre ωr

On a pour $k \in \mathbb{N}$, $\left(\frac{1}{r}\mathrm{A}\right)^{pk} x = x$ et $\left(\frac{1}{r}\mathrm{A}\right)^{pk+1} x = \omega x$

donc si $\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{r}\mathrm{A}\right)^m = \mathrm{L}$ alors $\mathrm{L}x = x = \omega x$ donc $\omega = 1$ car $x \neq 0$ Absurde

VI.B - Une matrice de Weilandt « modifiée »

VI.B.1) Attention si $n = 2$, il y a un problème ! Pour $n = 2$, on a $\mathrm{Z}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $[\mathrm{Z}_2^m]_{2,1} = 0$ car la matrice est triangulaire supérieure.

donc Z_2 n'est pas irréductible.

Je suppose désormais que $n \geqslant 3$

Le cycle $2 \to 3 \to \cdots n \to 2$ montre que pour tous $i, j \geqslant 2$ il existe un chemin dans Z_n de i à j

En concaténant avec le chemin $(n-1) \to 1$ (respectivement $1 \to 2$), cela permet de construire un chemin dans Z_n qui va de i à 1 (respectivement de 1 à j) *Valable car* $n - 1 \geqslant 2$

De plus $\mathrm{Z}_n \geqslant 0$ donc d'après **V.A.1**, $\boxed{\text{la matrice } \mathrm{Z}_n \text{ est irréductible}}$

VI.B.2) Je suppose encore que $n \geqslant 3$

On a $\chi_{\mathrm{Z}_n} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}_{[n]}$. On effectue $\mathrm{C}_1 \longleftarrow \mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_n$ puis $\mathrm{L}_n \longleftarrow \mathrm{L}_n + \mathrm{L}_1$

$$\chi_{\mathrm{Z}_n} = \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}_{[n]} = \mathrm{X} \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & -1 \\ -2 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{X} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\chi_{Z_n} = X\left(X\begin{vmatrix} X & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X \end{vmatrix}_{[n-2]} - 2(-1)^{n-2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{[n-2]} \right)$$

ainsi $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } Z_n \text{ est } X(X^{n-1}-2)}$

Si $n \geqslant 3$, alors Z_n admet $n-1$ valeurs propres de modules $\rho(Z_n) = 2^{1/(n-1)}$

les valeurs propres de Z_n sont toutes de multiplicités 1 et $\mathrm{Sp}(Z_n) = \{0\} \cup \left\{ 2^{1/(n-1)} \exp(k2i\pi/(n-1)) \,/\, k \in [\![0, n-2]\!] \right\}$

Par l'absurde si Z_n n'était pas imprimitive, comme Z_n est irréductible alors Z_n serait primitive

donc Z_n vérifierait la propriété admise de la partie **IV** donc Z_n aurait unevaleur propre dominante ABSURDE

et donc Z_n *est imprimitive car*

Autre argument : (a priori on ne se sert pas de la partie **IV**)

D'après Cayley-Hamilton, $Z_n^n = 2Z_n$ donc pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\alpha_p > 0$ tel que $Z_n^{(n^p)} = \alpha_p Z_n$

Par l'absurde, si Z_n était primitive

on pourrait trouver $m \in \mathbb{N}$ tel que $\forall q \geqslant m$, $Z_n^q > 0$

c'est absurde pour $n^p \geqslant m$

Vue que les valeurs propres à modules dominant sont les solutions de l'équation $\lambda^p = \rho^p$ (il y en a donc p)

On en déduit que $\boxed{Z_n \text{ est imprimitive de coefficient d'imprimitivité } n-1}$

VI.B.3) On a $Z_n^{n^2-2n+2} = Z_n^2\,(Z_n^n)^{n-2} = Z_n^2\,(2Z_n)^{n-2} = 2^{n-2}Z_n^n$

Ainsi $\boxed{Z_n^{n^2-2n+2} = 2^{n-1}Z_n}$

Par l'absurde si Z_n était primitive, on aurait $Z_n^{n^2-2n+2} > 0$ d'après **II.D** Absurde

ainsi $\boxed{Z_n \text{ n'est pas primitive}}$

VI.C - Coefficient d'imprimitivité et polynôme caractéristique

Coquille dans l'énoncé : $\chi_A(X) = X^n + +c_{k_1}X^{n-k_1} + \mathbf{c_{k_2}}X^{n-k_2} \cdots + c_{k_s}X^{n-k_s}$

au lieu de $\chi_A(X) = X^n + +c_{k_1}X^{n-k_1} + c_{k_1}X^{n-k_2} \cdots + c_{k_s}X^{n-k_s}$

VI.C.1) J'utilise encore mon interprétation (forte) de l'invariance par $z \mapsto \omega z$, où $\omega = \exp(2i\pi/p)$

Le polynôme scindé unitaire de degré n :$\frac{1}{\omega^n}\chi_A(\omega X)$ a exactement les mêmes racines que $\chi_A(X)$ avec les mêmes multiplicités. donc $\chi_A(\omega X) = \omega^n \chi_A(X)$

Ainsi pour tout i, on a $\omega^{n-k_i}c_{k_i} = \omega^n c_{k_i}$ donc $\omega^{k_i} = 1$

donc $\boxed{\text{pour tout } k \in \{k_1, k_2, \ldots, k_s\}, \text{ l'entier } k \text{ est divisible par } p}$

VI.C.2) Je pense que $r = \rho(A)$; l'énoncé est encore reprochable ici

On a $\beta^{k_j} = 1$ car les k_j sont tous divisibles par qp et car $\beta = e^{2i\pi/(qp)}$

ainsi $\chi_A(\beta r) = (\beta r)^n + c_{k_1}(\beta r)^{n-k_1} + c_{k_2}(\beta r)^{n-k_2} \cdots + c_{k_s}(\beta r)^{n-k_s} = \beta^n \left(r^n + c_{k_1}r^{n-k_1} + c_{k_2}r^{n-k_2} \cdots + c_{k_s}r^{n-k_s}\right)$

donc $\chi_A(\beta r) = \beta^n \chi_A(r) = 0$ car $r \in \mathrm{Sp}(A)$ d'après la propriété admise pour les matrices irréductibles de **VI**

donc βr est une racine du polynôme χ_A en faisant un calcul analogue à la question précédente.

or $|\beta r| = r$ mais βr ne vérifie pas $(\beta r)^p = r^p$ car $q > 1$

ce qui est absurde avec la propriété admise pour les matrices irréductibles de **VI**

donc $\boxed{\text{pour tout } q \geqslant 2 \text{ l'un des } k_j \text{ n'est pas divisible par } pq}$

VI.D - Coefficient d'imprimitivité et longueur des circuits

VI.D.1)

$a_{i,j}^{(r)} > 0$, $a_{j,i}^{(s)} > 0$ et si k dans L_j nous fournit dans A les chemins $\mathcal{C}_1$ de i vers j, $\mathcal{C}_2$ de j vers i et $\mathcal{C}_3$ de j vers j de longueurs respectives : r, s et k

En concaténant $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2$, on obtient $r + k + s \in L_i$ donc d_i divise $r + k + s$

et d_i divise $r+s$ par concaténation de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$
donc pour tout $k \in \{0\} \cup \mathrm{L}_j$, $\boxed{d_i \text{ divise } r+k+s}$
en remarquant que $k=(r+k+s)-(r+0+s)$: d_i divise k donc leurs pgcd pour $k \in \mathrm{L}_j$: $\boxed{d_i \text{ divise } d_j}$
VI.D.2) Avec **III.B.3**, si A est primitive on a m et $m+1 \in \mathrm{L}_1$ car $\mathrm{A}^m > 0$ et $\mathrm{A}^{m+1} > 0$
comme m et $m+1$ sont premiers entre eux on a $d_1 = 1$
$\boxed{\text{si } p=1 \text{ , alors } d=1}$
VI.D.3) Soit $\ell \in \mathrm{L}_1$.
On a donc $\left[\mathrm{A}^\ell\right]_{1,1} > 0$.
donc par la contraposée de **VI.A** , p divise ℓ
donc p divise tous les éléments de L_1 donc leur pgcd ainsi $\boxed{p \text{ divise } d}$
VI.D.4)

a) On a $\psi(\sigma) = \left(\prod_{j \notin \mathrm{H}} [x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}]_{j,\sigma(j)}\right)\left(\prod_{j \in \mathrm{H}} [x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}]_{j,\sigma(j)}\right) = \prod_{j \notin \mathrm{H}} \left(x - [\mathrm{A}]_{j,j}\right)\left(\prod_{j \in \mathrm{H}} -[\mathrm{A}]_{j,\sigma(j)}\right)$
ainsi $\boxed{\psi(\sigma) = (-1)^h x^{n-h} \prod_{j \in \mathrm{H}} a_{j,\sigma(j)}.}$
b) On a $\psi(\sigma) \neq 0$ donc $\forall j \in \mathrm{H}$, $a_{j,\sigma(j)} > 0$
ceci nous fournit les chemins dans A de longueur 1 : $j \to \sigma(j)$ pour tout $j \in \mathrm{H}$
or $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$, avec $m \geqslant 2$, est un cycle entrant dans la décomposition σ en produit de cycles à supports disjoints
ainsi $j_m \to j_1$ et pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, $j_i \to j_{i+1}$ sont des chemins dans A de longueur 1
car $\sigma(j_m) = j_1$ et pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, $\sigma(j_i) = j_{i+1}$
donc $\boxed{j_1 \to j_2 \cdots \to j_m \to j_1 \text{ est un circuit dans la matrice A}}$
donc $m \in \mathrm{L}_{j_1}$ et ainsi $\boxed{m \text{ est un multiple de } d}$
comme c'est vrai pour tout les cardinaux m, des supports disjoints des cycles dont la réunion est H
la somme de ces cardinaux est encore multiple de d alors $\boxed{h \text{ sont est multiple de } d}$
c) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_{i,i} \,/\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de sorte que si un coefficients de $x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}$ est nul, il s'agit d'un coefficient en dehors de la diagonale.

On note E est l'ensemble des permutations σ de $[\![1, n]\!]$ tel que $\psi(\sigma) \neq 0$ où $\psi(\sigma) = \prod_{j=1}^{n} [x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}]_{j,\sigma(j)}$
On remarque : $[x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}]_{j,\sigma(j)} = 0 \Longrightarrow j \neq \sigma(j)$ et donc $[x\mathrm{I}_n - \mathrm{A}]_{j,\sigma(j)} = 0 \Longrightarrow [\mathrm{A}]_{j,\sigma(j)} = 0$
Cet ensemble E ne dépend pas de x même si $\psi(\sigma)$ dépend de x car x n'est pas sur la diagonale de A
On a donc $\chi_{\mathrm{A}}(x) = \sum_{\sigma \in \mathrm{E}} \psi(\sigma)$ où
donc d'après a) : $\chi_{\mathrm{A}}(x) = \sum_{\sigma \in \mathrm{E}} x^{n-h}(-1)^h \prod_{j \in \mathrm{H}} a_{j,\sigma(j)}$ où h dépend de σ comme en a)
comme les h sont des multiples de d, $\chi_{\mathrm{A}}(x)$ s'écrit : $\chi_{\mathrm{A}}(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-d} + \alpha_2 x^{n-2d} + \cdots + \alpha_k x^{n-kd} + \cdots$
où les α_z sont éventuellement nuls
ceci étant valable sur l'ensemble infini $\mathbb{R} \setminus \{a_{i,i} \,/\, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ (égalité de polynômes)
On peut conclure que $\boxed{\chi_{\mathrm{A}}(x) \text{ s'écrit : } \chi_{\mathrm{A}}(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-d} + \alpha_2 x^{n-2d} + \cdots + \alpha_k x^{n-kd} + \cdots}$
Par l'absurde on suppose que tous les α_z sont nuls, alors $\chi_{\mathrm{A}} = \mathrm{X}^n$ Absurde avec **V.A.5**
Prenons alors k tel que $\alpha_k \neq 0$, on a d'après **VI.C**) kd divise p
ainsi d est un diviseur de p On conclut que $p = d$

• • • FIN • • •
