Centrale, 2015, MP, II

(10 pages)

Partie I

I.A -

I.A.1) Pour $n \geqslant 2$, on a $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{n} - \left[\ln(t)\right]_{n-1}^{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

donc $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann, $\underline{\left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 2} \text{ converge}}$.

I.A.2) ⋄ Puisque $\forall k \geqslant 2,\ a_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$, par télescopage, $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n) = H_n - 1 - \ln(n)$

donc $H_n = \ln(n) + 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k = \ln(n) + 1 + \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k + o(1)$ puisque la série $\left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 2}$ converge.

Ainsi $\underline{\exists\, A \in \mathbb{R},\ H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + A + o(1)}$.

⋄ On en déduit directement $\underline{H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)}$.

I.B - Si $r \leqslant 1$, on a $(n+1)^r \dfrac{H_n}{(n+1)^r} = H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc, par comparaison à la série de Riemann divergente $\left(\sum \dfrac{1}{(n+1)^r}\right)$, $\left(\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)$ diverge.

Si $r > 1$, prenons s tel que $r > s > 1$, on a $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} = \dfrac{H_n}{(n+1)^{r-s}} \dfrac{1}{(n+1)^s} = o\left(\dfrac{1}{(n+1)^s}\right)$ car $\dfrac{H_n}{(n+1)^{r-s}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{(n+1)^{r-s}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puisque $r - s > 0$. Par comparaison à la série de Riemann convergente $\left(\sum \dfrac{1}{(n+1)^s}\right)$, $\left(\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)$ converge.

On conclut que : $\underline{\left(\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement si } r > 1}$.

I.C -

I.C.1) ⋄ $\underline{\forall t \in]-1,1[,\ \ln(1-t) = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{t^n}{n} \quad \text{(rayon de convergence } R = 1)}$.

⋄ $\underline{\forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n \quad \text{(rayon de convergence } R = 1)}$.

I.C.2) Le produit de Cauchy des deux séries ci-dessus a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et on a

$$\forall t \in]-1,1[,\ \frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) t^n.$$

Donc $\underline{t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{1-t} \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[\text{ et } \forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{\ln(1-t)}{1-t} = -\sum\limits_{n=1}^{+\infty} H_n\, t^n}$.

I.D -

I.D.1) Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $t\mapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $]0,1]$ et $\sqrt{t}\,t^p(\ln t)^q = t^{p+1/2}\,(\ln t)^q \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ car $p+\frac{1}{2}>0$, soit $t^p(\ln t)^q \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc $t\mapsto t^p(\ln t)^q$ est intégrable sur $]0,1]$ et donc $\underline{I_{p,q} \text{ existe pour tout } (p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

I.D.2) $t\mapsto \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t\mapsto(\ln t)^q$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$ donc par intégration par parties,

$$I^\varepsilon_{p,q} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}\,(\ln t)^q\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{p+1}}{p+1}\,q\frac{(\ln t)^{q-1}}{t}\,\mathrm{d}t$$

soit $\underline{\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\ \forall\varepsilon\in]0,1[,\quad I^\varepsilon_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1}I^\varepsilon_{p,q-1} - \dfrac{\varepsilon^{p+1}}{p+1}\,(\ln\varepsilon)^q}$.

I.D.3) Puisque $p\geqslant 0$ et $q\geqslant 1$, selon [**1**], $I^\varepsilon_{p,q-1}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} I_{p,q-1}$ et $I^\varepsilon_{p,q}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} I_{p,q}$. De plus, $\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$ donc, à la limite quand $\varepsilon\to 0^+$, la formule du [**2**] donne $\underline{I_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1}I_{p,q-1}}$.

I.D.4) On a donc $I_{p,q} = \left(-\dfrac{q}{p+1}\right)\left(-\dfrac{q-1}{p+1}\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{p+1}\right)I_{0,q} = (-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}I_{0,q}$ avec $I_{0,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{p+1}$ donc $\underline{I_{p,q} = (-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}}$.

I.E - On a $\forall t\in]0,1[,\ (\ln t)^{r-1}f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n(\ln t)^{r-1}$. Posons, pout $t\in]0,1[,\ u_n(t) = a_n t^n(\ln t)^{r-1}$. On a :

- $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n$ est continue sur $]0,1[$ et, d'après [**2**], u_n est intégrable sur $]0,1]$, donc sur $]0,1[$, car $r\in\mathbb{N}^*$;
- selon ci-dessus, $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $t\mapsto(\ln t)^{r-1}f(t)$ qui est continue sur $]0,1[$;
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 \left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t = |a_n|\int_0^1 t^n\left|(\ln t)^{r-1}\right|\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}|a_n|I_{n,r-1} = (r-1)!\frac{|a_n|}{(n+1)^r}$ et, par hypothèse, $\left(\sum\dfrac{|a_n|}{(n+1)^r}\right)$ converge donc $\left(\sum\displaystyle\int_0^1\left|u_n(t)\right|\mathrm{d}t\right)$ converge .

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et, sachant

$$\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = a_n\,I_{n,r-1} = (-1)^{r-1}(r-1)!\frac{a_n}{(n+1)^r},$$

on obtient : $\underline{\displaystyle\int_0^1(\ln t)^{r-1}f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)^r}}$.

I.F -

I.F.1) Pour $r\geqslant 2$, on applique [**E**] à $f:\ t\mapsto\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ qu'on sait depuis [**C.3**] être développable en série entière sur $]-1,1[$ avec comme coefficient de t^n dans ce développement, $a_n = -H_n$. C'est légitime puisque $\left(\sum\dfrac{|a_n|}{(n+1)^r}\right) = \left(\sum\dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)$ est alors convergente d'après [**B**].

On obtient donc $\displaystyle\int_0^1(\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-H_n}{(n+1)^r}$ soit

$$\underline{\forall r\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ S_r = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1(\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t}\ .$$

I.F.2) Pour $[c,d] \subset]0,1[$, on a, par intégration par parties,

$$\int_c^d \frac{\ln(1-t)}{1-t}(\ln t)^{r-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\big(\ln(1-t)\big)^2}{2}(\ln t)^{r-1}\right]_c^d + \frac{r-1}{2}\int_c^d \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\big(\ln(1-c)\big)^2(\ln c)^{r-1}}{2} - \frac{\big(\ln(1-d)\big)^2(\ln d)^{r-1}}{2} + \frac{r-1}{2}\int_c^d \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\big(\ln(1-c)\big)^2(\ln c)^{r-1} \underset{c\to 0^+}{\sim} c^2(\ln c)^{r-1} \xrightarrow[c\to 0^+]{} 0$, $\big(\ln(1-d)\big)^2(\ln d)^{r-1} \underset{d\to 1^-}{\sim} \big(\ln(1-d)\big)^2(d-1)^{r-1} \xrightarrow[d\to 1^-]{} 0$ car $r-1>0$. Enfin $\omega:\ t\mapsto \dfrac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$ est continue sur $]0,1[$, $\omega(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t\,(\ln t)^{r-2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc φ est prolongeable par continuité en 0 , $\sqrt{1-t}\,\omega(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (-1)^{r-2}\big(\ln(1-t)\big)^2(1-t)^{r-3/2} \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$ (car $r>3/2$) donc $\omega(t) \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et donc ω est intégrable sur $]0,1[$. Tout ceci justifie un passage à la limite pour $(c,d)\to(0,1)$ et donne, avec le résultat du [**1**], la formule

$$\underline{\forall r\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t}\ .$$

I.F.3) ◇ En particulier, $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2}{t}\,\mathrm{d}t$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variable C^1 et strictement décroissant $u=1-t$, on obtient $\underline{S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u}$.

◇ Appliquons le résultat du [**E**] à $r=3$ et $f:\ t\mapsto \dfrac{1}{1-t}$ qui est bien développable en série entière sur $]-1,1[$ avec comme coefficient de t^n dans son développement, $a_n=1$ donc $\left(\sum \dfrac{|a_n|}{(n+1)^3}\right) = \left(\sum \dfrac{1}{(n+1)^3}\right)$, série de Riemann convergente. On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3} = 2\zeta(3)$ et donc $\underline{S_2=\zeta(3)}$.

Partie II

II.A -

II.A.1) $\gamma:\ t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, $\gamma(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ et $t^2\,t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\gamma(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $\underline{t\mapsto t^{x-1}e^{-t} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$.

II.A.2) Par le changement de variable C^1 et strictement croissant $u=\dfrac{t}{\alpha}$ dans l'intégrale définissant Γ, on a

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\alpha u)^{x-1}e^{-\alpha u}\alpha\,\mathrm{d}u = \alpha^x\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u$$

donc $\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u \text{ existe et } \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}}$.

II.B -

II.B.1) Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\phi :\ t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$, $\phi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ et $\phi(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1} = \dfrac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-y<1$ donc ψ est intégrable sur $]0,1[$ et donc $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$.

II.B.2) Le changement de variable C^1 et strictement décroissant $u = 1-t$ donne $\beta(x,y) = \displaystyle\int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}\,(-\mathrm{d}u)$ soit $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x,y) = \beta(y,x)}$.

II.B.3) Par intégration par parties avec $u(t) = t^x$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, on a, puisque tous les termes existent,

$$\begin{aligned}
\beta(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y}\right]_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\int_0^1 \Big(t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\big[\beta(x,y) - \beta(x+1,y)\big]
\end{aligned}$$

donc $\dfrac{x+y}{y}\beta(x+1,y) = \dfrac{x}{y}\beta(x,y)$ et donc $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x+1,y) = \dfrac{x}{x+y}\beta(x,y)}$.

II.B.4) Selon [**3**&**2**], $\beta(x+1,y+1) = \dfrac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1) = \dfrac{x}{x+y+1}\beta(y+1,x) = \dfrac{x}{x+y+1}\,\dfrac{y}{x+y}\beta(y,x) = \dfrac{x}{x+y+1}\,\dfrac{y}{x+y}\beta(x,y)$ donc $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x+1,y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)}$.

II.C -

II.C.1) Si la relation $(\mathcal{R})$ est vraie pour $x > 1$ et $y > 1$, on a, selon [**B.4**]

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad \beta(x,y) &= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\beta(x+1,y+1) \underset{(\mathcal{R})}{=} \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\,\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)} \\
&= \frac{(x+y)(x+y+1)}{xy}\,\frac{x\Gamma(x)\,y\Gamma(y)}{(x+y+1)(x+y)\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}
\end{aligned}$$

donc $\underline{\text{si } (\mathcal{R}) \text{ est vraie pour } x>1 \text{ et } y>1 \text{ alors elle est vérifiée pour tout } x>0 \text{ et } y>0}$.

II.C.2) Soit $\theta(u) = \dfrac{u}{1+u}$, θ est C^1 sur $]0,+\infty[$ avec $\forall u > 0,\ \theta'(u) = \dfrac{1}{(1+u)^2}$ donc θ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et on a $\lim\limits_{u\to 0^+}\theta(u) = 0$ et $\lim\limits_{u\to+\infty}\theta(u) = 1$. Ainsi le changement de variable $t = \theta(u)$ dans $\beta(x,y)$ donne

$$\beta(x,y) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{1+u}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{1+u}\right)^{y-1}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}$$

soit $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\quad \beta(x,y) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\mathrm{d}u}$.

II.C.3) Puisque $x+y-1>0$, $t \mapsto e^{-t}t^{x+y-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc la primitive de cette fonction qui s'annule en 0 est $F_{x,y} :\ t \mapsto \displaystyle\int_0^t e^{-u}u^{x+y-1}\,du$ et, comme $\forall u \in [0,+\infty[,\ e^{-u}u^{x+y-1} \geqslant 0$ et que $\Gamma(x+y)$ existe, on a bien $\underline{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_{x,y}(t) \leqslant \Gamma(x+y)}$.

II.C.4) Soit $g :\ (a,u) \longmapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,F_{x,y}\big((1+u)a\big)$. On a :

- $\forall u \in [0,+\infty[,\ a \mapsto g(a,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $F_{x,y}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ u \mapsto g(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$ car $x-1>0$ et $F_{x,y}$de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in [0,+\infty[,\ \big|g(a,u)\big| \leqslant \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$ d'après [**3**] et $u \mapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ selon [**2**].

Le théorème de continuité des intégrales à paramètre donne que G est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

II.C.5) On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour $a \to +\infty$ car:

- $\forall u \in [0,+\infty[,\ a(1+u) \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty$ donc $\forall u \in [0,+\infty[,\ g(a,u) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$;
- $u \mapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$;
- on a la domination vue au [**4**]: $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in [0,+\infty[,\ \big|g(a,u)\big| \leqslant \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$ avec $u \mapsto \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)$ intégrable sur $[0,+\infty[$.

Donc $G(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,\Gamma(x+y)\,\mathrm{d}u$ soit, avec [**2**], $\displaystyle\lim_{a\to+\infty} G(a) = \Gamma(x+y)\,\beta(x,y)$.

II.C.6) $\diamond$ Avec la notation du [**4**] et $[c,d] \subset \mathbb{R}_+^*$:

- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ u \mapsto g(a,u)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $[0,+\infty[$;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \forall u \in [0,+\infty[,\ \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u) = \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,(1+u)\,F'_{x,y}\big((1+u)a\big) = \dfrac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}}\,(1+u)\,e^{-(1+u)a}\big((1+u)a\big)^{x+y-1} = a^{x+y-1}e^{-(1+u)a}u^{x-1}$ existe;
- $\forall u \in [0,+\infty[,\ a \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ car $x+y-1>0$;
- $\forall a \in \mathbb{R}_+,\ u \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$ car $x-1>0$;
- $\forall a \in [c,d],\ \forall u \in [0,+\infty[,\ \left|\dfrac{\partial g}{\partial a}(a,u)\right| \leqslant d^{x+y-1}e^{-(1+u)c}u^{x-1} = d^{x+y-1}e^{-c}\,e^{-c\,u}u^{x-1}$ et $u \mapsto e^{-c\,u}u^{x-1}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ selon [**A.2**] puisque $c>0$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre donne que G est de classe C^1 sur $[c,d]$.

$\diamond$ Ceci étant valable pour tout $[c,d] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a G de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.C.7) De plus, la formule de dérivation donne, dans ce cas,

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial a}(a,u)\,\mathrm{d}u = a^{x+y-1}e^{-a}\int_0^{+\infty} e^{-a\,u}u^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

soit, avec le résultat de [**A.2**], $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ G'(a) = \Gamma(x)\,a^{y-1}e^{-a}$.

II.C.8) On a donc $\forall (a,a') \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^2,\ G(a)-G(a') = \displaystyle\int_{a'}^{a} G'(t)\,\mathrm{d}t = \Gamma(x)\int_{a'}^{a} t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Or $G(a) \xrightarrow[a\to+\infty]{} \Gamma(x+y)\,\beta(x,y)$ d'après [**5**], $G(a') \xrightarrow[a'\to 0]{} G(0)$ car G est continue en 0 selon [**4**] ce qui donne $G(a') \xrightarrow[a'\to 0]{} 0$ car $F_{x,y}(0)=0$. D'autre part, $\displaystyle\int_{a'}^{a} t^{y-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[(a,a')\to(+\infty,0)]{} \Gamma(y)$ donc, en passant à la limite, on obtient $\Gamma(x+y)\,\beta(x,y) - 0 = \Gamma(x)\,\Gamma(y)$, or $\Gamma(x+y) \neq 0$, donc $\forall x>1, \forall y>1,\ \beta(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Partie III

III.A - $\forall x>0,\ \ln\big(\Gamma(x+1)\big) - \ln\big(\Gamma(x)\big) = \ln\left[\dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right] = \ln x$ donc, en dérivant, $\forall x>0,\ \psi(x+1)-\psi(x) = \dfrac{1}{x}$.

III.B -

III.B.1) ⋄ Selon les résultats admis au [**II**], Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et ne s'y annule pas donc $\forall x>0,\ y\mapsto \dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\beta(x,y)$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$. En particulier, $\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)$ existe .

⋄ On a $\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma'(y)}{\Gamma(x+y)}-\dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)\,\Gamma'(x+y)}{\big(\Gamma(x+y)\big)^2}$

$$=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\left[\frac{\Gamma'(y)}{\Gamma(y)}-\frac{\Gamma'(x+y)}{\Gamma(x+y)}\right]$$

donc $\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)=\beta(x,y)\big(\psi(y)-\psi(x+y)\big)$.

III.B.2) Si $y<y'$, $\forall t\in]0,1[,\ t^x(1-t)^y>t^x(1-t)^{y'}$ donc $\beta(x,y)\geqslant\beta(x,y')$. Ainsi $y\mapsto\beta(x,y)$ décroît sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.B.3) En conséquence, $\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \dfrac{\partial\beta}{\partial y}(x,y)\leqslant 0$. De plus, $\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x,y)>0$ donc, grâce à la formule du [**1**], $\forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \psi(y)\leqslant\psi(x+y)$ ce qui montre que ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

III.C -

III.C.1) Pour tout $x>-1$ et $n\geqslant 1$, par télescopage, $\psi(x+n+1)-\psi(x+1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\big[\psi(x+k+1)-\psi(x+k)\big]=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}$ d'après [**A**]. En particulier, pour $x=0$, $\psi(n+1)-\psi(1)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$ donc, en soustrayant membre à membre,

$$\psi(n+1)-\psi(1)-\psi(x+n+1)+\psi(x+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)$$

soit $\forall x>-1,\ \forall n\geqslant 2,\quad \psi(x+1)-\psi(1)=\psi(x+n+1)-\psi(n+1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)$.

III.C.2) On a $0<x+1\leqslant p+1$ donc, par croissance de ψ,

$$0\leqslant\psi(x+n+1)-\psi(n)\leqslant\psi(p+n+1)-\psi(n)=\sum_{k=n}^{n+p}\big[\psi(k+1)-\psi(k)\big]=\sum_{k=n}^{n+p}\frac{1}{k}$$

et $\sum\limits_{k=n}^{n+p}\dfrac{1}{k}=H_{n+p}-H_{n-1}$. De plus, puisque $\forall k\in[\![n,n+p]\!],\ \dfrac{1}{k}\leqslant\dfrac{1}{n}$, on obtient

$$0\leqslant\psi(x+n+1)-\psi(n)\leqslant H_{n+p}-H_{n-1}\leqslant\frac{p+1}{n}\ .$$

III.C.3) Pour $x>-1$, la série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{x+k}\right)$ est convergente car $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{x+k}=\dfrac{x}{k(k+x)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{x}{k^2}$. De plus, s $x>-1$ étant fixé donc $p=E(x)+1$ également, on a $\dfrac{p+1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ donc l'inégalité du [**2**], donne $\psi(x+n+1)-\psi(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. En particulier, $\psi(n+1)-\psi(n)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Or l'égalité du [**1**] donne

$$\psi(x+1)=\underbrace{\big(\psi(x+n+1)-\psi(n)\big)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}-\underbrace{\big(\psi(n+1)-\psi(n)\big)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}0}+\psi(1)+\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)}_{\text{converge}}$$

donc $\forall x>-1,\ \psi(x+1)=\psi(1)+\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x+k}\right)$.

III.D -

III.D.1) $\diamond$ Posons, pour $n \geqslant 2$, $v_n(x) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{x+n}$. On a :

- $\forall n \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\}$, v_n est de classe C^∞ sur $]-n, +\infty[$ donc sur $[-1, +\infty[$ avec $\forall k \geqslant 1$, $v_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1} k!}{(x+n)^{k+1}}$;
- $\forall x \geqslant -1$, $v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^2}$ donc la série $\left(\sum v_n\right)_{n\geqslant 2}$ converge simplement sur $[-1, +\infty[$;
- Pour $k \geqslant 1$, $\left\|v_n^{(k)}\right\|_\infty^{[-1,+\infty[} = \dfrac{k!}{(n-1)^{k+1}}$ donc, puisque $k+1 > 1$, la série $\left(\sum v_n^{(k)}\right)_{n\geqslant 2}$ converge normalement donc uniformément sur $[-1, +\infty[$.

Donc le théorème de dérivation terme à terme s'applique et <u>g est de classe C^∞ sur $[-1, +\infty[$</u> .

$\diamond$ Et $\forall x \in [-1, +\infty[$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} v_n^{(k)}(x)$. Or $v_n^{(k)}(0) = \dfrac{(-1)^{k+1} k!}{n^{k+1}}$ donc $g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{k+1}}$ soit <u>$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ g^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} k! \big(\zeta(k+1) - 1\big)$</u> .

III.D.2) $\diamond$ La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n en 0 s'écrit, pour $x \in [-1, +\infty[$,

$$g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\, g^{(n+1)}(t\,x)\, \mathrm{d}t$$

donc

$$\forall x \geqslant -1, \quad \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \left| g^{(n+1)}(t\,x) \right| \mathrm{d}t.$$

Or $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \geqslant -1$, $\left|g^{(n+1)}(t\,x)\right| = \left|(-1)^{n+2}(n+1)! \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p+t\,x)^{n+2}}\right| \leqslant (n+1)! \displaystyle\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{(p-1)^{n+2}}$ car, pour tout $p \geqslant 2$, $0 < p-1 \leqslant p + t\,x$ et, d'autre part, $\forall p \geqslant 2$, $\dfrac{1}{(p-1)^{n+2}} \leqslant \dfrac{1}{(p-1)^2}$ car $n \geqslant 0$. On obtient donc :

$$\forall x \geqslant -1, \quad \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n\, (n+1)! \zeta(2)\, \mathrm{d}t = |x|^{n+1} \zeta(2) \Big[-(1-t)^{n+1} \Big]_0^1$$

et donc <u>$\forall x \geqslant -1, \quad \left| g(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \right| \leqslant \zeta(2)\, |x|^{n+1}$</u> .

$\diamond$ Mais, si $x \in]-1, 1[$, $\zeta(2)\, |x|^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc l'inégalité ci-dessus implique que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$$

et donc <u>g est développable en série entière sur $]-1, 1[$</u> .

III.D.3) Avec l'égalité vue au [**C.3**], o,n obtient

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1, 1[, \quad \psi(x+1) &= \psi(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x+k} \right) = \psi(1) + \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) + g(x) \\
&= \psi(1) + \frac{x}{x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \\
&= \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, x^n + g(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \big(\zeta(n+1) - 1 \big)\, x^n \qquad \text{selon } [\mathbf{1}]
\end{aligned}$$

ce qui donne bien $\forall x \in]-1,1[, \quad \psi(x+1) = \psi(1) + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\,\zeta(n+1)\,x^n$.

Remarque: *Une autre démonstration de cette formule est possible à l'aide d'une famille sommable.*

Partie IV

IV.A - ◇ Comme on l'a signalé au [**III.B.1**], pour tout $x > 0$, $y \mapsto \beta(x,y)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Notamment $\forall x > 0,\ B(x) = \dfrac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,1)$ existe .

◇ Reprenons l'égalité vue au [**III.B.1**]: $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \dfrac{\partial \beta}{\partial y}(x,y) = \beta(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial \beta}{\partial y}(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big) + \beta(x,y)\big(\psi'(y) - \psi'(x+y)\big)\\ &= \beta(x,y)\big(\psi(y) - \psi(x+y)\big)^2 + \beta(x,y)\big(\psi'(y) - \psi'(x+y)\big).\end{aligned}$$

Or $\beta(x,1) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$ donc $\forall x > 0,\ xB(x) = \big(\psi(1) - \psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1) - \psi'(x+1)\big)$.

◇ Puisque Γ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'y annule pas, ψ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc B est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV.B -

IV.B.1) Soit $x > 0$ fixé. Posons $h(y,t) = t^{x-1}(1-t)^{y-1} = t^{x-1}\exp\big[(y-1)\ln(1-t)\big]$. On a :

- $\forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ t \mapsto h(y,t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $]0,1[$ d'après [**II.B.1**];
- $\forall (y,t) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1[,\ \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t) = \ln(1-t)t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t) = \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ existent;
- pour tout $t \in]0,1[$, $y \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ et $y \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ est continue sur $]0,1[$, $\dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^x$ avec $x > 0$ et $\dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t) \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ car $(1-t)^{y-1/2}\ln(1-t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$ donc $t \mapsto\mapsto \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,t)$ est intégrable sur $]0,1[$;
- pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$;
- soit c tel que $0 < c < 1$, on a la domination pour $y \in [c,+\infty[$:

$$\forall t \in]0,1[, \quad \left|\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(y,t)\right| = \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \leqslant \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}(1-t)^{c-1} = H(t)$$

avec H continue sur $]0,1[$, $H(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x+1}$, $H(t) \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc H intégrable sur $]0,1[$.

Ainsi le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique et $y \mapsto \beta(x,y)$ est de classe C^2 sur $[c,+\infty[$ et sa dérivée seconde est donnée par dérivation sous l'intégrale. Ceci donne, en $y = 1$, $\forall x > 0,\ B(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1-t)\big)^2 t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

IV.B.2) De la même façon, on obtiendrait $\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x > 0, \quad B^{(p)}(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1-t)\big)^2 \big(\ln(t)\big)^p\, t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

IV.B.3) Selon [**I.F.2**], $\forall r \geqslant 2,\ S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$. Mais, on a $\forall r \geqslant 2,\ \forall x > 0,\ B^{(r-2)}(x) = \displaystyle\int_0^1 \big(\ln(1-t)\big)^2\big(\ln(t)\big)^{r-2}\,t^{x-1}\,\mathrm{d}t$ et

- $\forall t \in]0,1[[,\ \big(\ln(1-t)\big)^2\big(\ln(t)\big)^{r-2}\,t^{x-1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \dfrac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$;
- $t \mapsto \dfrac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$ est continue (par morceaux) sur $]0,1[$;
- on a la domination $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \in]0,1[[,\ \left|\big(\ln(1-t)\big)^2\big(\ln(t)\big)^{r-2}\,t^{x-1}\right| \leqslant \dfrac{\big(\ln(1-t)\big)^2\big|\ln t\big|^{r-2}}{t}$ et cette fonction dominante est intégrable sur $]0,1[$ d'après [**I.F.2**]

En appliquant le théorème de convergence dominée pour $x \to 0^+$, on obtient

$$B^{(r-2)}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et donc $\underline{S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} B^{(r-2)}(x)}$.

IV.B.4) Notamment, $S_2 = \frac{1}{2}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} B(x)$ et la formule du [**A**] jointe au développement trouvé au [**III.3**] donne

$$\begin{aligned} B(x) &= \frac{1}{x}\Big[\big(\psi(1)-\psi(x+1)\big)^2 + \big(\psi'(1)-\psi'(x+1)\big)\Big] \\ &\underset{x\to 0^+}{=} \frac{1}{x}\Big[\big(\psi(1)-\psi(1)-\zeta(2)x+o(x)\big)^2 + \big(\zeta(2)-\zeta(2)+2\zeta(3)x+o(x)\big)\Big] \\ &\underset{x\to 0^+}{=} 2\zeta(3)+o(1) \end{aligned}$$

ce qui redonne bien $\underline{S_2 = \zeta(3)}$.

IV.C -

IV.C.1) $\diamond$ ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\underline{\varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]-1,+\infty[}$.

$\diamond$ La formule de Leibniz donne, pour tout $x \in]-1,+\infty[$ et tout $n \geqslant 2$,

$$\varphi^{(n)}(x) = \big(\psi(x+1)-\psi(1)\big)\psi^{(n)}(x+1) + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\psi^{(k)}(x+1)\psi^{(n-k)}(x+1) + \psi^{(n)}(x+1)\big(\psi(x+1)-\psi(1)\big) - \psi^{(n+1)}(x+1)$$

donc $\underline{\forall n \geqslant 2,\ \varphi^{(n)}(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\psi^{(k)}(1)\psi^{(n-k)}(1) - \psi^{(n+1)}(1)}$.

IV.C.2) Selon [**A**], B est C^∞ sur $]0,+\infty[$ et , selon [**B.3**], $\forall p \in \mathbb{N},\ B^{(p)}(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 2(-1)^p p! S_{p+2}$. Le théorème de prolongement C^∞ donne que B se prolonge en une fonction $\widetilde{B}$ C^∞ sur $[0,+\infty[$ et telle que $\forall p \in \mathbb{N},\ \widetilde{B}^{(p)}(0) = 2(-1)^p p! S_{p+2}$. $\widetilde{B}$ admet donc un développement limité à l'ordre $r-2$ en 0 donné par la formule de Taylor-Young:

$$\widetilde{B}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{p=0}^{r-2} 2(-1)^p S_{p+2}\,x^p + o\big(x^{r-2}\big).$$

Mais $\forall x > 0,\ \widetilde{B}(x) = B(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{=} \dfrac{1}{x}\left[\displaystyle\sum_{q=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!}x^q + o\big(x^{r-1}\big)\right] = \displaystyle\sum_{p=0}^{r-2} \frac{\varphi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}x^p + o\big(x^{r-2}\big)$ car $\varphi(0) = 0$. Par unicité du développement limité, on a donc $\forall p \in [\![0, r-2]\!],\ 2(-1)^p S_{p+2} = \dfrac{\varphi^{(p+1)}(0)}{(p+1)!}$.. En particulier, $\forall r \geqslant 2,\ 2S_r = (-1)^r \dfrac{\varphi^{(r-1)}(0)}{(r-1)!}$. Et, pour $r \geqslant 3$, la formule du [**1**] donne

$$2S_r = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} \psi^{(k)}(1)\psi^{(r-1-k)}(1) - \psi^{(r)}(1)\right].$$

D'autre part, le développement en série entière trouvé au [**III.D.3**] donne $\psi^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}n!\zeta(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a donc

$$\begin{aligned} 2S_r &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\sum_{k=1}^{r-2} \binom{r-1}{k} (-1)^{k+1}k!\zeta(k+1)\,(-1)^{r-k}(r-1-k)!\zeta(r-k) - (-1)^{r+1}r!\zeta(r+1)\right] \\ &= \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\left[\sum_{k=1}^{r-2} \frac{(r-1)!}{k!(r-1-k)!}(-1)^{r+1}k!(r-1-k)!\zeta(k+1)\zeta(r-k) - (-1)^{r+1}r!\zeta(r+1)\right] \end{aligned}$$

soit $\underline{2S_r = r\zeta(r+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{r-2} \zeta(k+1)\zeta(r-k)}$.

* * *
* *
*