Concours Centrale-Supélec

Mathématiques 1 - MP - 2015

I Préliminaires géométriques

I.A - Isométries affines directes du plan euclidien

I.A.1) Il suffit de prendre $A = I_2$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

I.A.2) Résultat immédiat en faisant un produit par blocs.

I.A.3) A est inversible. En prenant $A' = A^{-1}$ et $\vec{b}' = -A^{-1}\vec{b}$ dans la formule de la question 2), on obtient $M(A, \vec{b}).M(A', \vec{b}') = I_3$.

$\boxed{\text{Tout élément } M(A, \vec{b}) \text{ de } G \text{ est donc inversible et } M(A, \vec{b})^{-1} = M(A^{-1}, -A^{-1}\vec{b})}$

I.A.4) D'après **A.3)**, $G \subset \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.
D'après **A.2)**, $\mathrm{SO}(2)$ étant stable pour le produit, G est stable pour le produit.
D'après **A.3)**, $\mathrm{SO}(2)$ étant stable pour l'inversion, G est stable pour l'inversion.
$\boxed{G \text{ est donc un sous-groupe de } \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})}$

I.A.5) $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, $\Phi(M(I_2, \vec{b})) = \vec{b}$ donc $\boxed{\Phi \text{ est surjective}}$

$\forall A \in \mathrm{SO}(2)$, $\Phi(M(A, \vec{0})) = \vec{0}$ donc $\boxed{\Phi \text{ n'est pas injective}}$

I.B - Droites affines du plan

I.B.1) $\Delta(0, \vec{e}_1)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. C'est l'axe Oy.

$\Delta\left(2, \dfrac{\vec{e}_1 + \vec{e}_2}{\sqrt{2}}\right)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et dirigée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

I.B.2) La droite $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ passe par $\begin{pmatrix} q\cos\theta \\ q\sin\theta \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

Elle a donc comme équation cartésienne : $\boxed{\cos\theta\ X + \sin\theta\ Y = q}$

I.B.3) La droite $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ passe par $\begin{pmatrix} q\cos\theta \\ q\sin\theta \end{pmatrix}$ et est dirigée par $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

Elle a donc comme équation paramétrique $\boxed{\begin{cases} x(t) = q\cos\theta - t\sin\theta \\ y(t) = q\sin\theta + t\cos\theta \end{cases} \text{, pour } t \in \mathbb{R}}$

I.B.4) La droite $\Delta(q, \vec{u})$ est orthogonale à $\vec{u}$ et la droite $\Delta(r, \vec{v})$, est orthogonale à $\vec{v}$. Si elles sont confondues, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et comme ils sont unitaires, ils sont égaux ou opposés. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_\theta$.

Si $\vec{u} = \vec{v}$, alors $\Delta(q, \vec{u})$ et $\Delta(r, \vec{v})$ ont pour équation cartésienne $\cos\theta\ X + \sin\theta\ Y = q$ et $\cos\theta\ X + \sin\theta\ Y = r$. Si elles sont confondues alors $q = r$.

Si $\vec{u} = -\vec{v}$, alors $\vec{v} = \vec{u}_{\theta+\pi}$ et $\Delta(q, \vec{u})$ et $\Delta(r, \vec{v})$ ont pour équation cartésienne $\cos\theta\ X + \sin\theta\ Y = q$ et $-\cos\theta\ X - \sin\theta\ Y = r$. Si elles sont confondues alors $q = -r$.

Réciproquement, si $\vec{u} = \vec{v}$ et $q = r$ ou si $\vec{u} = -\vec{v}$ et $q = -r$ alors $\Delta(q, \vec{u}) = \Delta(r, \vec{v})$.

Finalement, $\boxed{\Delta(q, \vec{u}) \text{ et } \Delta(r, \vec{v}) \text{ sont confondues si et seulement si } \vec{u} = \vec{v} \text{ et } q = r \text{ ou } \vec{u} = -\vec{v} \text{ et } q = -r.}$

I.C - *Action de G sur les droites*

I.C.1) On remarque que $\Psi(M(R_\theta,\vec{b}))$ est la droite passant par $\langle R_\theta\vec{e}_1,\vec{b}\rangle R_\theta\vec{e}_1 = \langle \vec{u}_\theta,\vec{b}\rangle \vec{u}_\theta$ qui est la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\operatorname{Vect}(\vec{u}_\theta)$ et orthogonale à $\vec{u}_\theta$, donc

$\boxed{\Psi(M(R_\theta,\vec{b})) \text{ est la droite passant par } \vec{b} \text{ et orthogonale à } \vec{u}_\theta}$.

Dans le cas $A = R_{\pi/6}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\boxed{\Psi(M(A,\vec{b})) \text{ est la droite passant par } \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \text{ et orthogonale à } \vec{u}_{\pi/6}.}$

I.C.2) $\Psi(M(I_2,\vec{0}))$ est la droite passant par $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ et orthogonale à $\vec{e}_1$. $\boxed{\Psi(M(I_2,\vec{0})) \text{ est l'axe } Oy}$

I.C.3) $\Psi(M(R_\theta,q\vec{u}_\theta))$ est la droite passant par $q\vec{u}_\theta$ et orthogonale à $\vec{u}_\theta$

On a donc bien $\boxed{\Psi(M(R_\theta,q\vec{u}_\theta)) = \Delta(q,\vec{u}_\theta)}$

Toute droite affine de $\mathbb{R}^2$ est de la forme $\Delta(q,\vec{u}_\theta)$ en prenant $\vec{u}_\theta$ orthogonal à la droite et q la distance de la droite à l'origine. $\boxed{\text{L'application } \Psi \text{ est donc surjective.}}$

I.C.4) a) Soit $A \in \mathrm{SO}(2)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $A = R_\theta$.

$M(A,\vec{b})$ est dans H si et seulement si la droite passant par b et orthogonale à u_θ est égale à $\Delta(0,\vec{e}_1)$, c'est à dire à l'axe Oy.

Donc $M(A,\vec{b})$ est dans H si et seulement si $A = \pm I_2$ et $\vec{b} \in Oy$.

$$\boxed{H \text{ est donc l'ensemble des matrices de la forme } \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&x\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}}$$

b) On vérifie facilement que H est une partie non vide de G, stable pour le produit et pour l'inverse ; $\boxed{H \text{ est donc un sous groupe de } G}$

c) Soit $g \in G$ et $h \in H$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $g = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & x\\ \sin\theta & \cos\theta & y\\ 0&0&1\end{pmatrix}$ et il existe $z \in \mathbb{R}$ et $t \in \{-1,1\}$ tels que $h = \begin{pmatrix}t&0&0\\0&t&z\\0&0&1\end{pmatrix}$.

On a alors $gh = \begin{pmatrix}t\cos\theta & -t\sin\theta & -z\sin\theta + x\\ t\sin\theta & t\cos\theta & z\cos\theta + y\\ 0&0&1\end{pmatrix}$.

$\Psi(gh)$ est donc la droite passant par $\begin{pmatrix}-z\sin\theta + x\\ z\cos\theta + y\end{pmatrix}$ et orthogonale à $t\vec{u}_\theta$ et donc à $\vec{u}_\theta$ et $\Psi(g)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et orthogonale à $\vec{u}_\theta$.

Or, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-z\sin\theta + x\\ z\cos\theta + y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z\sin\theta\\ -z\cos\theta\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_\theta$, ces deux droites sont donc égales et $\boxed{\text{pour tout } g \text{ de } G \text{, et tout } h \text{ de } H \text{, on a } \Psi(gh) = \Psi(g)}$

II Fonctions radicales

II.A - *Étude d'un exemple*

II.A.1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|(x^2+y^2)f(x,y)\right| = \dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \leqslant 1$.

f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)f(x,y)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$ donc $\boxed{f \text{ est dans } \mathcal{B}_1}$.

II.A.2) $\forall (q,\theta) \in \mathbb{R}^2$, $f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta) = \dfrac{1}{1+q^2+t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{1+q^2+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\boxed{\hat{f} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^2}$.

$$\hat{f}(q,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+q^2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{dt}{\sqrt{1+q^2}}}{1+\frac{t^2}{1+q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+q^2}} \Big[\arctan(\frac{t}{\sqrt{1+q^2}})\Big]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}.$$

Donc $\boxed{\hat{f}(q,\theta) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}.}$

II.A.3) $\forall q \in]0,+\infty[,\ R(q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\,d\theta = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \dfrac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}\,d\theta = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+q^2}}.$

On a donc $\dfrac{R'(q)}{q} = -\dfrac{\pi}{(1+q^2)^{3/2}}.$

- $q \mapsto \dfrac{R'(q)}{q}$ est continue sur $]0,+\infty[$
- $q \mapsto \dfrac{R'(q)}{q}$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1]$
- $\left|\dfrac{R'(q)}{q}\right| = \mathcal{O}_{q\to+\infty}\left(\dfrac{1}{q^2}\right)$ et $q \mapsto \dfrac{1}{q^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc $q \mapsto \dfrac{R'(q)}{q}$ est intégrable sur $1,+\infty[$

et donc $\boxed{q \mapsto \dfrac{R'(q)}{q} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$.

$-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{R'(q)}{q}\,dq = -\dfrac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} -\dfrac{\pi}{(1+q^2)^{3/2}}\,dq = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{(1+q^2)^{3/2}}\,dq.$

$q \mapsto \dfrac{1}{(1+q^2)^{3/2}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ et $u \mapsto \operatorname{sh} u$ est bijective et de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$, on peut donc procéder au changement de variable $q = \operatorname{sh}(u)$ ($dq = \operatorname{ch} u\,du$).

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+q^2)^{3/2}}\,dq = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+\operatorname{sh}^2(u))^{3/2}} \operatorname{ch} u\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(\operatorname{ch}^2(u))^{3/2}} \operatorname{ch} u\,du = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}^2(u)}\,du$

$= \Big[\operatorname{th}(u)\Big]_0^{+\infty} = 1$

Or $f(0,0) = 1$, on a donc $\boxed{-\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{R'(q)}{q}\,dq = f(0,0)}$

II.A.4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}.$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4 \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{x\to+\infty} x^4 \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = +\infty$

$(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'est donc pas bornée sur $\mathbb{R}^2$ et donc $\boxed{\text{la fonction } \dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ n'est pas dans } \mathcal{B}_2.}$

II.B - Fonctions radicales : cas général

II.B.1) $\forall (r,t) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi],\ f(r\cos t, r\sin t) = \varphi(r)$ donc $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\,dt = \varphi(r)$ et $\boxed{\bar{f}(r) = \varphi(r).}$

II.B.2) Pour tout réel $q \geqslant 0$,

- $r \mapsto \dfrac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}$ est continue sur $]q,+\infty[$
- Sur $]q,q+1]$, $\left|\dfrac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\right| = \mathcal{O}_{r\to q}\left(\dfrac{1}{\sqrt{r-q}}\right)$ et $r \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{r-q}}$ est intégrable sur $]q,q+1]$ donc $r \mapsto \dfrac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}$ est intégrable sur $]q,q+1]$.
- Sur $[q+1,+\infty[$, $\left|\dfrac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\right| = \mathcal{O}_{x\to+\infty}(\varphi(r))$ et $r \mapsto \varphi(r)$ est intégrable sur $[q+1,+\infty[$ donc $r \mapsto \dfrac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}$ est intégrable sur $[q+1,+\infty[$.

Finalement, $r \mapsto \dfrac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}$ est intégrable sur $]q,+\infty[$ et $\boxed{\displaystyle\int_q^{+\infty} \dfrac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr \text{ converge.}}$

II.B.3) Pour tout réel $q \geqslant 0$, $\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr$ converge et $r \mapsto \sqrt{r^2-q^2}$ est $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]q,+\infty[$ dans $]0,+\infty[$. On peut donc faire le changement de variable $t=\sqrt{r^2-q^2}$, ($dt = \dfrac{r}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr$, $r=\sqrt{t^2+q^2}$),

et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(\sqrt{t^2+q^2})\,dt$ converge et $\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr = \int_0^{+\infty} \varphi(\sqrt{t^2+q^2})\,dt$

Or, $\forall(\theta,t)\in\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, $\quad f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta) = \varphi(\sqrt{t^2+q^2})$

et donc $\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr = \int_0^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)\,dt.$

De même en faisant le changement de variable $t=-\sqrt{r^2-q^2}$, on montre que

$\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr = \int_{-\infty}^{0} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)\,dt.$

Et finalement, $\boxed{\displaystyle\hat{f}(q,\theta) = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr.}$

II.B.4) En II.B.1), on a montré que $\bar{f}(r)=\varphi(r)$

Dans la question précédente, on a montré que $\hat{f}(q,\theta) = 2\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\varphi(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr$ et donc, que $\hat{f}(q,\theta)$ ne dépend pas de θ.

On en déduit : $\boxed{\forall q\in\mathbb{R}^+,\ \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{f}(q,\theta)\,d\theta = \hat{f}(q,\theta) = 2\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr.}$

III Transformée de Radon d'une fonction de $\mathcal{B}_1$

III.A -

Soit $(q,\theta)\in\mathbb{R}^2$, f appartient à $\mathcal{B}_1$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $((q\cos\theta - t\sin\theta)^2+(q\sin\theta+t\cos\theta)^2)f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta) = (q^2+t^2)f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)$ est bornée pour $t\in\mathbb{R}$.
On en déduit que :

- $t\mapsto f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Sur $[1,+\infty[$, $|f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)| = \mathcal{O}_{t\to+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et $t\mapsto\dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc $t\mapsto f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- De même, $t\mapsto f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)$ est intégrable sur $]-\infty,-1]$.
- Sur $[-1,1]$, $t\mapsto f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)$ est continue, donc intégrable.

Finalement, $t\mapsto f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta+t\cos\theta)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc $\boxed{\hat{f} \text{ est définie sur } \mathbb{R}^2.}$

III.B -

Pour tout q et tout θ,

$$\hat{f}(-q,\theta+\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-q\cos(\theta+\pi) - t\sin(\theta+\pi), -q\sin(\theta+\pi)+t\cos(\theta+\pi))dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta + t\sin\theta, q\sin\theta - t\cos\theta)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - u\sin\theta, q\sin\theta + u\cos\theta)du \quad \text{(changement de variable } u=-t)$$

$$= \hat{f}(q,\theta)$$

Donc pour tout q et tout θ on a $\boxed{\hat{f}(-q,\theta+\pi) = \hat{f}(q,\theta).}$

III.C -

III.C.1) On note $h(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$. Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$, montrons que $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$.

- h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]\times[0,2\pi]$ et
  $\forall(r,t)\in[-a,a]\times[0,2\pi]$, $\dfrac{\partial h}{\partial r}(r,t) = \cos t\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin t\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)$

- $\forall r \in [-a, a]$, $t \mapsto h(r,t)$ est continue, donc intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$
- $\dfrac{\partial h}{\partial r}$ est continue sur le compact $[-a, a] \times [0, 2\pi]$, on note $M = \sup\limits_{[-a,a]\times[0,2\pi]} \left|\dfrac{\partial h}{\partial r}\right|$.
  $t \mapsto M$ est positive, continue et intégrable sur $[0, 2\pi]$ et $\forall (r,t) \in [-a, a] \times [0, 2\pi]$, $|h(r,t)| \leqslant M$

D'après le théorème de dérivation sous le signe $\displaystyle\int$, $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a, a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, et donc $\boxed{\bar{f} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ et

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \bar{f}'(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos t \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin t \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\right) dt.$$

III.C.2) f appartient à $\mathcal{B}_1$, donc $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)f(x,y)$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$. Notons $M = \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left|(x^2+y^2)f(x,y)\right|$, alors, $\forall (r,t) \in \mathbb{R}^2$, $|r^2 f(r\cos t, r\sin t)| \leqslant M$, donc

$$\left|r^2 \bar{f}(r)\right| = \left|r^2 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M\, dt = M.$$

Donc, $\boxed{\text{la fonction } r \mapsto r^2\bar{f}(r) \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$

III.C.3) On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$, alors, $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $(x,y) \mapsto (x^2+y^2)^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

soit $M = \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)^2\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| + \sup\limits_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)^2\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$,

alors, $\forall (r,t) \in \mathbb{R}^2$, $r^4\left(\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\right| + \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\right|\right) \leqslant M$.

On en déduit que $\forall r \in \mathbb{R}$,

$$\left|r^4\bar{f}'(r)\right| = \left|\frac{r^4}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\cos t\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t) + \sin t\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\right) dt\right|$$
$$\leqslant \frac{r^4}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos t, r\sin t)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos t, r\sin t)\right|\right) dt$$
$$\leqslant M.$$

$\boxed{r \mapsto r^4\bar{f}'(r) \text{ est donc bornée sur } \mathbb{R}.}$

IV Formule d'inversion

IV.A - Résultats préliminaires

IV.A.1) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2-1}$ ($du = \dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}$, $t = \sqrt{u^2+1}$), on montre que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ admet comme primitive $t \mapsto -\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right)$, de plus , $\lim\limits_{t\to1} -\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$ et

$\lim\limits_{t\to+\infty} -\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}\right) = 0$. On en déduit que l'intégrale $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} \text{ existe et vaut } \frac{\pi}{2}.}$

IV.A.2) Soit $((\varepsilon, r) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < \varepsilon < r$. On montre facilement que l'intégrale $\displaystyle\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}$ converge et que $\theta \mapsto r\cos\theta$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\arccos\frac{\varepsilon}{r}, 0[$ dans $[\varepsilon, r[$. On fait donc le changement de variable $q = r\cos\theta$ ($dq = -r\sin\theta\, d\theta$) :

$$\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = \int_{\arccos\frac{\varepsilon}{r}}^0 \frac{-r\sin\theta\, d\theta}{(r\cos\theta)^2\sqrt{r^2-(r\cos\theta)^2}} = \frac{1}{r^2}\int_0^{\arccos\frac{\varepsilon}{r}} \frac{d\theta}{(\cos\theta)^2}$$
$$= \frac{1}{r^2}\Big[\tan\theta\Big]_0^{\arccos\frac{\varepsilon}{r}} = \frac{1}{r^2}\tan(\arccos\frac{\varepsilon}{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\sqrt{1-(\frac{\varepsilon}{r})^2}}{\frac{\varepsilon}{r}} = \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}$$

On a donc $\boxed{\displaystyle\int_\varepsilon^r \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}.}$

IV.B - Étude d'une fonction définie par une intégrale

IV.B.1) On note $u(t,q)=\dfrac{th(qt)}{\sqrt{t^2-1}}$. Soit $a\in\mathbb{R}^{+*}$, montrons que H est continue sur $[a,+\infty[$.

On suppose que $r\mapsto r^2h(r)$ est bornée, soit $M=\sup\limits_{r\in\mathbb{R}^+}|r^2h(r)|$.

- u est continue sur $]1,+\infty[\times[a,+\infty[$
- Soit $\varphi(r)=\dfrac{M}{ta^2\sqrt{t^2-1}}$; φ est positive, continue et d'après IV.A.1), intégrable sur $]1,+\infty[$ et $\forall(t,q)\in\,]1,+\infty[\times[a,+\infty[$, $|u(t,q)|\leqslant\varphi(t)$

D'après le théorème de continuité sous le signe somme, H est donc continue sur $[a,+\infty[$ pour tout $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et donc $\boxed{H \text{ est continue sur }]0,+\infty[.}$

IV.B.2) En gardant les notations de la question précédente, on a : $|h(tq)|\leqslant\dfrac{M}{t^2q^2}$ et donc

$$|H(q)|=\left|\int_1^{+\infty}\frac{th(qt)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\right|\leqslant\int_1^{+\infty}\frac{tM}{t^2q^2\sqrt{t^2-1}}\,dt=\frac{1}{q^2}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{1}{q^2}\frac{\pi}{2}$$

On a donc $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty,\ H(q)=\mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right).}$

IV.B.3) On garde les notations de B.1).

On suppose que $r\mapsto r^4h'(r)$ est bornée, soit $N=\sup\limits_{r\in\mathbb{R}^+}|r^4h'(r)|$.

- u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[\times[a,+\infty[$
- $\forall q\in[a,+\infty[$, $t\mapsto u(t,q)$ est intégrable sur $]1,+\infty[$
- $\dfrac{\partial u}{\partial q}(t,q)=\dfrac{t^2h'(tq)}{\sqrt{t^2-1}}$

  Soit $\varphi(r)=\dfrac{N}{t^2a^4\sqrt{t^2-1}}$; de même qu'en B.1), on montre que φ est positive, continue et intégrable sur $]1,+\infty[$ et $\forall(t,q)\in]1,+\infty[\times[a,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial u}{\partial q}(t,q)\right|\leqslant\varphi(t)$

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme, H est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,+\infty[$ pour tout $a\in\mathbb{R}^{+*}$ et donc $\boxed{H \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[.}$

IV.C - Vers la formule d'inversion

IV.C.1) $F(q)=2\displaystyle\int_q^{+\infty}\frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr.$

En faisant le changement de variable $r=tq$, pour $q>0$, on obtient :

$F(q)=2q\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{t\bar{f}(tq)}{\sqrt{t^2-1}}\,dt.$

La fonction f est dans $\mathcal{B}_1$ et ses dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont dans $\mathcal{B}_2$, donc d'après III.C), $\bar{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $r\mapsto r^4\bar{f}'(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

On utilise alors IV.B.2) et IV.B.3) en remplaçant h et H par $\bar{f}$ et F, on obtient que $\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[}$ et qu'au voisinage de $+\infty$ on a $F(q)=q\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{q^2}\right)$ et donc $\boxed{\text{au voisinage de } +\infty \text{ on a } F(q)=\mathcal{O}\left(\frac{1}{q}\right).}$

IV.C.2) Pour tout $\varepsilon>0$, $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F(q)}{q^2}\,dq$ converge car F est continue sur $]0,+\infty[$ et qu'au voisinage de $+\infty$ on a $F(q)=\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{q}\right)$

F étant de classe $\mathcal{C}^1$, on fait une intégration par parties : $\left|\begin{array}{ll} u=F(q) & u'=F'(q)\\ v'=\frac{1}{q^2} & v=-\frac{1}{q}\end{array}\right.$

$$\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F(q)}{q^2}\,dq=\left[-\frac{F(q)}{q}\right]_\varepsilon^{+\infty}+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F'(q)}{q}\,dq=\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon}+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{F'(q)}{q}\,dq$$

On en déduit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq$ et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F(q)}{q^2}$.

Or $F(q) = 2\displaystyle\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr$ et donc $\boxed{\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{q^2}\left(\int_q^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-q^2}}\,dr\right)dq.}$

IV.C.3) En utilisant la question IV.C.2) et l'interversion des intégrales, on obtient :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} + 2\int_{\varepsilon}^{+\infty}\left(\int_{\varepsilon}^{r} \frac{r\bar{f}(r)}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}\,dq\right)dr.$$

Or $\displaystyle\frac{F(\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{2}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,dr$.

et $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{r} \frac{r\bar{f}(r)}{q^2\sqrt{r^2-q^2}}\,dq = r\bar{f}(r)\int_{\varepsilon}^{r} \frac{dq}{q^2\sqrt{r^2-q^2}} = r\bar{f}(r)\frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}\,dr$. (IV.A.2))

Donc $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -\frac{2}{\varepsilon}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,dr + 2\int_{\varepsilon}^{+\infty} r\bar{f}(r)\frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}\,dr$

$$= -2\int_{\varepsilon}^{+\infty} r\bar{f}(r)\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{r^2-\varepsilon^2}} - \frac{\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}{r^2\varepsilon}\right)dr$$

$$= 2\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{r\bar{f}(r)}{\varepsilon\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\left(1-\frac{r^2-\varepsilon^2}{r^2}\right)dr = -2\varepsilon\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,dr.$$

Et donc, $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -2\varepsilon\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,dr.}$

IV.D - La formule d'inversion

IV.D.1) En faisant le changement de variable $r = t\varepsilon$, on obtient $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\bar{f}(r)}{r\sqrt{r^2-\varepsilon^2}}\,dr = \frac{1}{\varepsilon}\int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$

et donc $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -2\int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

Calculons $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

- Pour tout $\varepsilon>0$, $t\mapsto \dfrac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$.
- $\forall t\in]1,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{f(0,0)}{t\sqrt{t^2-1}}$ et $t\mapsto \dfrac{f(0,0)}{t\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,+\infty[$.
- D'après la questions III.C.1, on sait que $\bar{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc bornée sur le segment $[0,1]$
  D'après la questions III.C.2, on sait que $r\mapsto r^2\bar{f}(r)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ et donc $\bar{f}$ est bornée sur $]1,+\infty[$
  $\bar{f}$ est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$; Notons $M = \sup_{\mathbb{R}^+}|\bar{f}|$. Soit $\varphi(t) = \dfrac{M}{t\sqrt{t^2-1}}$, φ est positive, continue et intégrable sur $]1,+\infty[$, et $\forall(\varepsilon,t)\in]0,+\infty[\times]1,+\infty[$, $\left|\dfrac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t\sqrt{t^2-1}}\right| \leqslant \varphi(t)$.

D'après l'extension du théorème de convergence dominée au cas d'une famille à paramètre réel, on peut conclure que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_1^{+\infty} \frac{\bar{f}(t\varepsilon)}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{f(0,0)}{t\sqrt{t^2-1}}\,dt$.

En IV.A.1), on a montré $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}} = \frac{\pi}{2}$.

On a donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq = -\pi f(0,0)$, ce qui montre que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq$ existe et que $f(0,0) = \dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F'(q)}{q}\,dq$.

Or, $R_{0,0} = F$, on a donc montré la formule d'inversion de Radon pour f au point $(x,y) = (0,0)$: $\boxed{f(0,0) = \dfrac{-1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{R'_{0,0}(q)}{q}\,dq}$

IV.D.2) Dans la partie II, on a étudié la fonction f définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$. On a montré la formule d'inversion de Radon pour f au point $(x,y) = (0,0)$: $f(0,0) = -\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{R'(q)}{q}\,dq$ et on a montré que la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas dans $\mathcal{B}_2$.

Les hypothèses faites sur f ne sont donc pas nécessaires pour que la formule d'inversion de Radon soit vérifiée au point $((x,y) = (0,0)$.

IV.D.3) Pour obtenir la formule d'inversion de Radon en un point (x_0, y_0), on peut considérer la fonction $(x,y) \mapsto f(x+x_0, y+y_0)$ et lui appliquer la formule d'inversion de Radon en $(0,0)$.

V Interprétation et application à la radiographie

V.A - Fonction invariante sur G

V.A.1) Soit g dans G et r tel que $\Phi(r) = \vec{0}$.

Il existe $A \in \mathrm{SO}(2)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ tels que $g = M(A, \vec{b})$; il existe $B \in \mathrm{SO}(2)$ tel que $r = M(B, \vec{0})$.

On a alors $gr = M(AB, \vec{b})$, et donc $\Phi(gr) = \Phi(g) = \vec{b}$ et $\boxed{f^*(gr) = f^*(g).}$

V.A.2) Supposons que les deux droites $\Delta(q_1, \vec{u}_{\theta_1})$ et $\Delta(q_2, \vec{u}_{\theta_2})$ coïncident. D'après la question I.B.4), on a donc $q_1 = q_2$ et $\vec{u}_{\theta_1} = \vec{u}_{\theta_2}$ ou bien $q_1 = -q_2$ et $\vec{u}_{\theta_1} = -\vec{u}_{\theta_2}$ c'est à dire $q_1 = q_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2[2\pi]$ ou bien $q_1 = -q_2$ et $\theta_1 \equiv \theta_2 + \pi[2\pi]$.

De III.B, on déduit que $\boxed{\hat{f}(q_1, \theta_1) = \hat{f}(q_2, \theta_2)}$

V.A.3) Soient $g \in G$ et $h \in H$. Dans I.C.4)c), on a montré que $\Psi(gh) = \Psi(g)$. On a donc $\boxed{\hat{f}^*(gh) = \hat{f}^*(g).}$

V.B - Reconstruction en radiographie

V.B.1) $\Delta(q, \vec{u}_\theta)$ est la droite passant par $\begin{pmatrix} q\cos\theta \\ q\sin\theta \end{pmatrix}$ et dirigée par $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

On peut définir $\displaystyle\int_{\Delta(q,\vec{u}_\theta)} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\begin{pmatrix} q\cos\theta \\ q\sin\theta \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q\cos\theta - t\sin\theta, q\sin\theta + t\cos\theta)dt = \hat{f}(q,\theta)$.

$$\boxed{\int_{\Delta(q,\vec{u}_\theta)} f = \hat{f}(q,\theta).}$$

V.B.2) L'intensité mesurée de part et d'autre de la zone visée nous donne la transformée de Radon $\hat{f}$ de la fonction f.

La formule d'inversion de Radon permet ensuite de calculer f en fonction de $\hat{f}$ et donc de connaître la densité des tissus dans la zone radiographiée.