Pour toute remarque sur ce corrigé : Serge Dupont à moduloserge@free.fr

I. Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

I.A – On sait que les applications

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbb{C}\times\mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \\ (\lambda, A) \longmapsto \lambda A \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{c} \mathcal{M}_d(\mathbb{C})\times\mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C}) \\ (A, B) \longmapsto AB \end{array}\right.$$

sont continues. Donc par une récurrence immédiate et par composition, $A \mapsto A^n$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par somme de fonctions continues, $A \mapsto \sum_{i=0}^{n} \lambda_i A^i$ est continue sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Par restriction à $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, f_P est continue.

I.B –

- Linéarité à droite : soient $A, B, B' \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}({}^tA(\lambda B + \mu B')) &= \operatorname{Tr}(\lambda {}^tAB + \mu {}^tAB') \\ &= \lambda \operatorname{Tr} {}^tAB + \mu \operatorname{Tr} {}^tAB' \qquad \text{(linéarité de Tr)} \end{aligned}$$

- Symétrie : $\operatorname{Tr}({}^tBA) = \operatorname{Tr}({}^t({}^t(BA)) = \operatorname{Tr}({}^tAB)$ car $\operatorname{Tr} {}^tM = \operatorname{Tr} M$, ${}^t({}^tM) = M$ et ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM)$.
- La symétrie et la linéarité à droite impliquent la linéarité à gauche.
- Définie positif : en notant $(\alpha_{i,j})_{i,j} = {}^tAA$, on a $\alpha_{i,i} = \sum_{k=1}^{d} A_{k,i}^2$. D'où $\operatorname{Tr} {}^tAA = \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} A_{k,i}^2$ qui est toujours positif. De plus, $\operatorname{Tr}({}^tAA)$ est nul si et seulement si $A_{k,i} = 0$ pour tout $(k,i) \in [\![1,d]\!]^2$, *i.e.* si et seulement si A est nulle.

Remarquons pour la suite que $\|A\|^2 = \sum_{p=1}^{d}\sum_{q=1}^{d} A_{p,q}^2$.

I.C – Pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, $A_{i,j}^2 \leqslant \sum_{p=1}^{d}\sum_{q=1}^{d} A_{p,q}^2 = \|A\|^2$, d'où $|A_{i,j}| \leqslant \|A\|$.

I.D – Montrons que $\|AB\|^2 \leqslant \|A\|^2\|B\|^2$, *i.e.* $\sum_{p,q=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} A_{p,k}B_{k,q}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j}^2\right)\left(\sum_{p,q=1}^{d} B_{p,q}^2\right)$.

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^d$, $\left(\sum_{k=1}^{d} A_{p,k}B_{k,q}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} A_{p,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{d} B_{l,q}^2\right)$.

Ainsi,

$$\sum_{p,q=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} A_{p,k}B_{k,q}\right)^2 \leqslant \sum_{p,q=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} A_{p,k}^2\right)\left(\sum_{l=1}^{d} B_{l,q}^2\right) = \left(\sum_{i,j=1}^{d} A_{i,j}^2\right)\left(\sum_{p,q=1}^{d} B_{p,q}^2\right).$$

I.E – D'après la question I.D, $\|A^2\| \leqslant \|A\|^2$ et par une récurrence immédiate, $\|A^n\| = \|A^{n-1}A\| \leqslant \|A^{n-1}\|\|A\| \leqslant \|A\|^n$.

II. Séries entières de matrices

II.A – Soit $R_0 \in [0, R[$. Alors la série de terme général $a_n R_0^n$ converge absolument car $R_0 \in [0, R[$. La série de terme génferal $a_n A^n$ converge donc normalement sur la boule fermée $B_f(0, R_0)$ car si $\|A\| \leqslant R_0$, $\|a_n A^n\| \leqslant |a_n| R_0^n$ d'après l'inégalité (I.E). Puisque $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, il est complet et la série de terme général $a_n A^n$ converge pour $\|A\| \leqslant R_0$. De plus, les fonctions $A \mapsto a_n A^n$ étant continues, la limite ϕ est continue sur $B_f(0, R_0)$. Puisque ceci est valable pour tout $R_0 \in [0, R[$, ϕ est bien définie et continue sur $\mathcal{B}$.

II.B.1) On considère l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N}^* | (A^k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \text{ est libre}\}$.

— E est non vide car contient 1, puisque $A^0 = I_d$ est non nul, donc la famille (A^0) est libre.

— E est borné car $E \subset [\![1, d^2]\!]$; en effet, pour tout $n \geqslant d^2$, la famille $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant d^2}$ est liée car contient $n \geqslant d^2 + 1$ éléments appartenant à un espace de dimension d^2.

Soit $r = \max E \in [\![1, d^2]\!]$. Alors $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ est libre car $r \in E$ et $(A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r}$ est liée par maximalité de r.

II.B.2) Soit $V = \mathrm{Vect}(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Montrons que $\mathcal{F} = (A^k)_{0 \leqslant k \leqslant r-1}$ est une base de V. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont dans V. La famille $\mathcal{F}$ est libre d'après la question précédente. Montrons qu'elle est génératrice. Soit donc $V' = \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$. Il suffit pour cela de montrer que tous les A^n appartiennent à V' lorsque $n \geqslant r$.

Montrons d'abord que $A^r \in V'$. Puisque $(A^0, A^1, \ldots, A^r)$ est liée, il existe $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \lambda_k A^k = 0$. Par liberté de la famille $(A^0, A^1, \ldots, A^{r-1})$, λ_r est non nul. D'où $A^r = -\dfrac{1}{\lambda_r} \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_k A^k$ et donc appartient à V'. En particulier, $\mathrm{Vect}(A^0, A^1, \ldots, A^r) = V'$.

Montrons ensuite que $A^n \in V'$ pour tout $n \geqslant r$ par récurrence sur n. C'est fait si $n = r$. Supposons que c'est vrai pour un entier $n \geqslant r$. Alors $A^{n+1} = AA^n$ et $A^n \in V' = \mathrm{Vect}(A^0, A^1, \ldots, A^{r-1})$. Donc $A^{n+1} \in \mathrm{Vect}(A^1, \ldots, A^r) \subset V'$. On a bien $V' = V$.

II.B.3) Puisque $\mathcal{F}$ est une base de V, l'application

$$\left\{ \begin{array}{c} N : V \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k A^k \longmapsto \sum_{k=0}^{r-1} |\alpha_k| \end{array} \right.$$

est bien définie et est une norme sur V. (C'est la norme 1 associée à la base $\mathcal{F}$.)

Puisque V est de dimension finie, toutes les normes sur V sont équivalentes, en particulier N et la restriction de $\|\cdot\|$ à V (encore notée $\|\cdot\|$). D'où l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $N \leqslant C\|\cdot\|$. En particulier, puisque $A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$,

$$\sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leqslant C\|A^n\|.$$

II.B.4) Soit $k \in [\![1, r-1]\!]$. On a

$$|a_n \lambda_{k,n}| \leqslant |a_n| \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leqslant C|a_n|\|A^n\| \leqslant C|a_n|\|A\|^n.$$

Or $|a_n|\|A\|^n$ est le terme général d'une série positive convergente car $\|A\| < R$. Ainsi la série de terme général $a_n \lambda_{k,n}$ converge absolument dans $\mathbb{C}$, donc converge.

II.B.5) Puisque V est un espace vectoriel normé de dimension finie, il est fermé dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. D'après la question **II.B.2)**, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ appartient à V pour tout n. Donc sa limite $\varphi(A)$ appartient aussi à V. Puisque $\mathcal{F}$ est une base de V, il existe une unique famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1}) \in \mathbb{C}^r$ telle que $\varphi(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k A^k$. Le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ convient et est unique par unicité de la famille $(\alpha_0, \dots, \alpha_{r-1})$.

Remarque : l'énoncé contenait une coquille ; il fallait prendre P dans $\mathbb{C}[X]$ au lieu de $\mathbb{R}[X]$.

II.B.6) Déjà, $\sum \frac{1}{n!} z^n$ est une série entière de rayon de convergence $+\infty$ (série définissant l'exponentielle). Un calcul immédiat donne $A^2 = A$, et donc $A^n = A$ pour tout $n \geqslant 1$ par récurrence immédiate. Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n = I_d + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} A = I_d + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - 1 \right) A = I_d + (e-1)A$.

II.C − Montrons que φ coïncide avec une fonction polynomiale sur son domaine de définition si et seulement si a_n est nul à partir d'un certain rang. En particulier, φ est elle-même polynomiale et donc a un rayon de convergence infini.

L'implication réciproque est évidente : prendre $\varphi = P$. Réciproquement, on suppose $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et que $A \mapsto \varphi(A)$ et de la forme $A \mapsto P(A)$ pour un certain $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $x \in [0, R/\sqrt{d}[$. (Avec la convention $R/\sqrt{d} = +\infty$ si $R = +\infty$.) Alors $\|xI_d\| = x\sqrt{d} < R$ car $\|I_d\| = \sqrt{d}$. Donc

$$P(x)I_d = P(xI_d) = \varphi(xI_d) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n I_d = \varphi(x) I_d.$$

Ainsi, $\varphi(x) = P(x)$ pour tout $x \in [0, R/\sqrt{d}[\subset [0, R[$. Par unicité du développement en série entière, les coefficients de ϕ sont ceux de P, qui sont nuls à partir d'un certain rang. Donc ϕ est polynomiale.

III. Deux applications

III.A.1) Proposition : *Soient $\sum a_n$, $\sum b_n$ deux séries complexes absolument convergentes. Alors la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ converge absolument et*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right).$$

On admet :

Proposition : *Soient $\sum A_n$, $\sum B_n$ deux séries d'éléments de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ absolument convergentes. Alors la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}$ converge absolument et*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k} \right).$$

III.A.2) Soient $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. Puisque la série définissant l'exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, les séries de terme général $\frac{A^n}{n!}$ et $\frac{B^n}{n!}$ convergent absolument car $\|\frac{A^n}{n!}\| \leqslant \frac{\|A\|^n}{n!}$ terme général d'une série absolument convergente.

En vertu du résultat précédent, la série de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}$ converge absolument et

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B^n}{n!}\right) = \exp A \exp B.$$

D'autre part, si A et B commutent, en vertu de la formule du binôme,

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} (A+B)^n,$$

suite qui converge vers $\exp(A+B)$ par définition de l'exponentielle de matrice.

On a donc $\exp(A+B) = \exp A \exp B$ pour tout $(A,B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ tel que $AB = BA$. *A fortiori*, $\exp i(A+B) = \exp iA \exp iB$ pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qui commutent, car alors iA et iB commutent.

III.A.3) Les suites $R^{2n}/(2n)!$ et $R^{2n+1}/(2n+1)!$ étant bornées pour tout $R \geqslant 0$ par croissances comparées, les séries entières $\sum z^{2n}/(2n)!$ et $\sum z^{2n+1}/(2n+1)!$ ont un rayon de convergence infini (par définition du rayon de convergence). D'après la question **II.B.5)**, $\cos A$ et $\sin A$ existent et sont des polynômes en A, donc commutent. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \cos^2 A + \sin^2 A &= (\cos A + i \sin A)(\cos A - i \sin A) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{i^{2n}}{(2n)!} A^{2n} + \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}\right]\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{i^{2n}}{(2n)!} A^{2n} - \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}\right]\right) \\ &= (\exp iA)(\exp -iA) = \exp 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{C})} = I_d \end{aligned}$$

car $\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{i^{2n}}{(2n)!} A^{2n} - \frac{i^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1}\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} (-iA)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} (-iA)^{2n+1}\right]$ et puisque iA et $-iA$ commutent.

III.B.1) Le résultat est évident si $A = 0$. On suppose donc $A \neq 0$. Soit $R > 1/\|A\|$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note $z = Re^{i\theta}$. Donc $z \neq 0$. De plus, $\|\frac{1}{z} A\| = \frac{1}{R} \|A\| < 1$. D'après le cours, $I_d - \frac{1}{z} A$ est inversible d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} A^n$. Donc $zI_d - A = z(I_d - \frac{1}{z} A)$ est inversible d'inverse $\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} A^n$. On a bien pour $R > \|A\|$:

$$(Re^{i\theta} I_d - A)^{-1} = (Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n.$$

III.B.2) Soit $R > \|A\|$. Considérons pour tout $k \in \mathbb{N}$ la fonction $u_k : [0, 2\pi] \to \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, $\theta \mapsto (Re^{i\theta})^{-k} A^k$. Les fonctions u_k sont continues par composition. La série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$ car $\|u_k\|_\infty = R^{-k} \|A^k\| \leqslant \left(\frac{\|A\|}{R}\right)^k$, terme général d'une série géométrique convergente (car $\|A\|/R \in [0, 1[$).

On en déduit la continuité sur $[0, 2\pi]$ de

$$\theta \mapsto (Re^{i\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (Re^{i\theta})^{-n} A^n = (Re^{i\theta} I_d - A)^{-1}.$$

En particulier, $\theta \mapsto (Re^{i\theta})^n(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui justifie l'existence de l'intégrale.

Par convergence normale sur un segment, on peut permuter les symboles $\displaystyle\int$ et $\displaystyle\sum$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^{n-1}\sum_{k=0}^{+\infty}(Re^{i\theta})^{-k}A^k\mathrm{d}\theta \quad = \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-k-1)\theta}\mathrm{d}\theta\right)R^{n-k-1}A^k.$$

Or $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-k-1)\theta}\mathrm{d}\theta$ est nul si $k \neq n-1$ et vaut 1 si $k = n-1$. Il ne reste donc que A^{n-1} dans la somme.

III.B.3) D'après les questions précédentes, pour $R > \|A\|$,

$$\begin{aligned}\chi_A(A) &= \sum_{p=0}^{d}a_pA^p = \sum_{p=0}^{d}a_p\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^{p+1}(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})\left(\sum_{p=0}^{d}a_p(Re^{i\theta})^p\right)(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})\chi_A(Re^{i\theta})(Re^{i\theta}I_d - A)^{-1}\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

III.B.4) Pour $M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ inversible, on a ${}^t\mathrm{Com}\, M = (\det M)M^{-1}$. D'où pour $R > \|A\|$,

$$\chi_A(Re^{i\theta}) = (Re^{i\theta}I_d - A)^{-1} = {}^t\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A).$$

D'après la question précédente, $\chi_A(A) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Re^{i\theta}\ {}^t\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A)\mathrm{d}\theta$. Puisque les coefficients de ${}^t\mathrm{Com}\, M$ sont des déterminants d'ordre $d-1$ extraits de M, et qu'ils sont donc polynomiaux en les coefficients de M, l'application $\theta \mapsto {}^t\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A)$ est polynomiale en $e^{i\theta}$. On écrit ${}^t\mathrm{Com}(Re^{i\theta}I_d - A) = (\alpha_{i,j}(\theta))_{i,j}$, de sorte que

$$\chi_A(A)_{i,j} = \frac{R}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\theta}\alpha_{i,j}(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Puisque $e^{i\theta}\alpha_{i,j}(\theta) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n}\lambda_pe^{ip\theta}$ et que $\displaystyle\int_0^{2\pi}e^{ip\theta}\mathrm{d}\theta = 0$, on a bien $(\chi_A(A))_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,d]\!]^2$, et donc $\chi_A(A) = 0$.

IV. Étude d'une équation fonctionnelle

IV.A – Montrons plus généralement que pour tous $x, y \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$,

$$(y-\alpha)f(2x) = 2F(x+y) - 2F(x+\alpha) - \frac{1}{2}F(2y) + \frac{1}{2}F(2\alpha).$$

Cette égalité est vraie pour $y = \alpha$ et tout $x < M/2$. Il suffit donc de voir que la dérivée par rapport à y des deux membres est la même pour tout y dans l'intervalle $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$. Or on a bien

$$f(2x) = 2f(x+y) - f(2y) + 0.$$

IV.B – Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^n$ par récurrence sur n. Déjà, f est continue par hypothèse. Supposons f de classe $\mathcal{C}^n$. Alors F est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et d'après l'expression précédente, $x \mapsto f(2x)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$, d'où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

IV.C – On dérive successivement par rapport à x puis par rapport à y l'égalité $2f(x+y) = f(2x) + f(2y)$, ce qui donne $2f''(x+y) = 0$ pour tous $x, y \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$. Puisque tout réel z de $]-\infty, M[$ est de la forme $z = x + y$ avec $x, y \in \left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$ (par exemple $x = y = z/2$), on a bien $f'' = 0$.

Donc il existe $m, p \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = mx + p$ pour tout $x \in]-\infty, M/2[$. Réciproquement, pour toute fonction affine, on a l'égalité $2f(x+y) = f(2x) + f(2y)$. Une base de l'espace des solutions est donc $(x \mapsto 1, x \mapsto x)$.

V. Étude d'une autre fonction matricielle

Le sujet fait un choix de notation regrettable car incohérent : la lettre d désigne dans la même formule la dimension des matrices carrées considérées, mais aussi un paramètre réel destiné à varier au cours de cette partie. On désignera ici par d_0 la taille des matrices carrées, au lieu de d, jusqu'à la question (V.H).

V.A – Si $d_0 = 1$, $A \in \mathcal{M}_{d_0}(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si A est un réel non nul. Donc la fonction ξ vérifie (V.1) si et seulement si ξ envoie $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$.

V.B – Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & & & \\ \cdots & \cdots & & I_{d_0-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc \neq 0$. D'après la formule donnant le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, $\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \det I_{d_0-2} = ad - bc \neq 0$. Puisque M est inversible,

$$f_\xi(M) = \begin{pmatrix} \xi(a) & \xi(b) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ \xi(c) & \xi(d) & \xi(0) & \cdots & \xi(0) \\ \xi(c) & \xi(d) & & & \\ \cdots & \cdots & & f_\xi(I_{d_0-2}) & \\ \xi(c) & \xi(d) & & & \end{pmatrix}$$

est aussi inversible. Or en effectuant les opérations élémentaires $L_n \leftarrow L_n - L_2$ pour tout $n \geqslant 3$ sur $f_\xi(M)$ (ce qui ne change pas le déterminant), on obtient

$$\det f_\xi(M) = \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) & * \\ \xi(c) & \xi(d) & * \\ 0 & 0 & * \\ \vdots & \vdots & * \\ 0 & 0 & * \end{vmatrix}$$

Cette matrice étant triangulaire par blocs, son déterminant est de la forme $k \begin{vmatrix} \xi(a) & \xi(b) \\ \xi(c) & \xi(d) \end{vmatrix} = k(\xi(a)\xi(d) - \xi(b)\xi(c)) \neq 0$. *(Remarque : $k = (\xi(1) - \xi(0))^{d_0-2}$ car le bloc inférieur droit est $(\xi(1) - \xi(0))I_{d_0-2}$.) A fortiori,* $\xi(a)\xi(d) - \xi(b)\xi(c)$ est non nul.

V.C – Déjà ξ n'est pas identiquement nulle : sinon on aurait $f_\xi(I_{d_0}) = 0$ et $\det f_\xi(I_{d_0}) = 0$, ce qui est absurde.

Il existe donc un réel c tel que $\xi(c) \neq 0$. On pose aussi $d = c$. D'après la question précédente, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, on a $\xi(a)\xi(c) \neq \xi(b)\xi(c)$. Puisque $\xi(c) \neq 0$, ceci implique $a \neq b \Rightarrow \xi(a) \neq \xi(b)$, *i.e.* ξ est injective.

Enfin, une fonction continue et injective sur $\mathbb{R}$ est strictement monotone.

V.D – Par l'absurde : supposons $c \in \mathbb{R}^*$ avec $\xi(c) = 0$. En reprenant la matrice de (V.B) avec $c = d$ et $a \neq b$, on a $\det M = ad - bc = (a-b)c \neq 0$ car $ac = ad \neq bc$ et $\det f_\xi(M) = k(\xi(a)\xi(c) - \xi(b)\xi(c)) = 0$, contradiction.

V.E.1) D'après la question précédente, si $\xi(0) \neq 0$, ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et donc pas non plus sur $[0, +\infty[$. Par continuité et grâce au théorème des valeurs intermédiaires, ξ est de signe constant sur $[0, +\infty[$.

Considérons $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \xi(1)\xi(t) - \xi(0)\xi(2)$; g est une fonction strictement monotone (car ξ l'est et $\xi(1) \neq 0$) et continue. Mais $g(0) = \xi(0)(\xi(1) - \xi(2))$ et $g(2) = \xi(2)(\xi(1) - \xi(0))$. Puisque $\xi(0)$ et $\xi(2)$ sont de même signe, et que par monotonie de ξ, $\xi(1) - \xi(2)$ et $\xi(1) - \xi(0)$ sont de signes opposés, g s'annule sur $]0, 2[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. D'où l'existence de $\alpha \in]0, 2[$ tel que $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

V.E.2) Puisque $\alpha \in]0, 2[$, on a $0 \times 2 \neq 1 \times \alpha$. Donc $\xi(0)\xi(2) \neq \xi(1)\xi(\alpha)$ d'après la question (V.B), ce qui est absurde vu la question précédente. Donc l'hypothèse $\xi(0) \neq 0$ est absurde.

V.F – Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x^2, y^2, xy \in I = \xi(\mathbb{R})$. D'après la question (V.B), en passant à la contraposée :

$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad \xi(a)\xi(d) = \xi(b)\xi(c) \Longrightarrow ad = bc.$$

On applique ceci à $a = d = \xi^{-1}(xy)$, $b = \xi^{-1}(x^2)$ et $c = \xi^{-1}(y^2)$. Alors

$$\xi(a)\xi(d) = (xy)(xy) = x^2y^2 = \xi(b)\xi(c).$$

D'où $ad = bc$, *i.e.* $\eta(xy)^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$.

V.G.1) Remarquons que η est aussi strictement monotone en tant que réciproque de ξ fonction strictement monotone. La condition $\xi(0) = 0$ (qui équivaut à $\eta(0) = 0$) et la positivité de η sur $I \cap]0, +\infty[$ garantissent que η (et donc aussi ξ) est strictement croissante. Soit $I_+ = I \cap]0, +\infty[$. C'est un intervalle non-vide de la forme $]0, m[$ puisque $\xi(0) = 0$ et ξ strictement croissante, avec $m \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$. En posant $M = \ln m$ si $m \in \mathbb{R}$ et $M = +\infty$ si $m = +\infty$, on a $\ln : I_+ \to]-\infty, M[$ est un homéomorphisme (par restriction de l'homéomorphisme ln).

Pour tous $x, y \in]-\infty, M/2[$, on a $2f(x+y) = 2\ln\eta(e^{x+y}) = \ln\eta(e^{2x}e^{2y}) = \ln(\eta(e^{2x})\eta(e^{2y})) = f(2x) + f(2y)$ d'après la question précédente.

V.G.2) De plus f est continue par composition. D'après la partie (IV), f est affine. Il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \alpha_1 x + p$ sur $]-\infty, M[$. On a même $\alpha_1 > 0$ par stricte croissante de η. Mais pour tout $x \in]-\infty, M[$, $\eta(x) = \exp(\alpha_1 \ln x + p) = e^p x^{\alpha_1} = K_1 x^{\alpha_1}$ en posant $K_1 = e^p$ qui est bien strictement positif.

V.G.3) On raisonne comme dans les deux questions précédentes. Soit I_- l'intervalle $I \cap]-\infty, 0[=]-M_1, 0[$ avec $M_1 > 0$ ou $M_1 = +\infty$. On commence par montrer que là où cela est défini (*i.e.* $-xy, -x^2, -y^2 \in I$),

$$(\eta(-xy))^2 = \eta(-x^2)\eta(-y^2).$$

Comme à la question (V.F), on pose $a = d = \xi^{-1}(-xy)$, $b = \xi^{-1}(-x^2)$ et $c = \xi^{-1}(-y^2)$. Alors $\xi(a)\xi(d) = (-xy)(-xy) = (-x^2)(-y^2) = \xi(b)\xi(c)$. D'où $ad = bc$, *i.e.* $\eta(-xy)^2 = \eta(-x^2)\eta(-y^2)$.

On pose maintenant $\eta_1(x) = -\eta(-x)$ et $f_1 = \ln \circ \eta_1 \circ \exp$ définie sur $]0, m_1[$ avec $m_1 \in]0, +\infty[\cup \{+\infty\}$. Comme précédemment, η_1 est croisante par composition et continue. On a, là où cela est défini,

$$\begin{aligned} 2f_1(x+y) &= \ln(\eta_1(e^{x+y}))^2 = \ln(\eta[-e^x e^y])^2 = \ln(\eta(-e^{2x})\eta(-e^{2y})) \\ &= \ln[(-\eta(-e^{2x}))(-\eta(-e^{2y}))] = f_1(2x) + f_1(2y). \end{aligned}$$

On a encore par la partie (IV) que $f_1(x) = \alpha_2 x + p$ avec $\alpha_2 > 0$ et $p \in \mathbb{R}$. D'où $\eta_1(x) = \exp(\alpha_2 \ln x + p) = e^p x^{\alpha_2}$ et $\eta(x) = -e^p(-x)^{\alpha_2}$ pour tout $x \in I_-$. En posant $K_2 = -e^p$, on a bien $K_2 < 0$.

V.G.4) La réciproque sur $]0, M[$ de η est donc $\xi : t \mapsto (t/K_1)^{1/\alpha_1}$, définie sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $M = +\infty$. Par le même raisonnement sur $\mathbb{R}^-$, on a $I = \mathbb{R}$.

Donc l'égalité $\eta(xy)^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$ est vraie pour tous réels x, y. D'où pour $x \neq 0$:

$$(\eta(-x))^2 = \eta((-x)^2)\eta(1^2) = \eta((-x)^2\eta((-1)^2) = (\eta(x))^2.$$

D'où $|\eta(-x)| = |\eta(x)|$. Mais par injectivité de η, $\eta(x) \neq \eta(-x)$. Donc $\eta(-x) = -\eta(x)$ pour $x \neq 0$. On a déjà $\eta(0) = 0$, donc η est impaire.

V.H – Si ξ est positive sur $\mathbb{R}^+$, alors η est impaire d'après les questions (V.G). Donc sa réciproque ξ est aussi impaire. Sinon, ξ est négative sur $\mathbb{R}^+$ (car monotone et valant 0 en 0). La fonction $-\xi$ vérifie encore (V.1), et donc est impaire. Donc ξ est impaire. En posant $\beta = \alpha_1$ et $C = K_1$, on a bien $\xi(x) = Cx^\beta$ pour tout $x > 0$.

V.I – *On désigne de nouveau par d le côté des matrices carrées, au lieu de d_0.*

Soit $A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)I_{d_0} + U \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ où $U \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est la matrice dont les coefficients valent 1.

Puisque toutes les colonnes de U sont les mêmes (et sont non nulles), U est de rang 1. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} U = n - 1$. Donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $d - 1$ de U. De plus, $\operatorname{Tr} U = d$. La somme des valeurs propres avec multiplicité valant d, d est valeur propre simple et 0 est valeur propre de multiplicité $d - 1$.

Alors U est diagonalisable et est semblable à $U' = \begin{pmatrix} 0_{\mathcal{M}_{d-1}(\mathbb{R})} & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Il existe donc $P \in GL_d(\mathbb{R})$ telle que $PUP^{-1} = U'$. Mais alors

$$\det A_\lambda = \det((\lambda-1)I_d+U) = \det((\lambda-1)P^{-1}P+P^{-1}U'P) = \det(\lambda-1)I_d+U') = (\lambda-1)^{d-1}(\lambda-1+d)$$

(déterminant d'un matrice diagonale).

(On pouvait aussi ajouter dans A toutes les colonnes à la première et en soustrayant ensuite la première ligne à toutes les autres.)

V.J – Précisons la fonction ξ. D'après les questions (V.G) et (V.H),

$$\xi(x) = \begin{cases} K_1 x^{\alpha_1} & \text{si } x \geqslant 0 \\ K_2(-x)^{\alpha_2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Par parité, $K_2 = \xi(-1) = -\xi(1) = -K_1$. On pose $K_1 = C$ (qui est non nul). De plus, $|\xi(x)| = |\xi(-x)|$ donne $|x|^{\alpha_1} = |-x|^{\alpha_2} = |x|^{\alpha_2}$, d'où $\alpha_1 = \alpha_2$, noté α. On a donc

$$\xi(x) = \begin{cases} Cx^\alpha & \text{si } x \geqslant 0 \\ -C(-x)^\alpha & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En introduisant la fonction signe $\operatorname{sgn}(x) = +1$ si $x \geqslant 0$ et $\operatorname{sgn}(x) = -1$ si $x < 0$, on a donc $\xi(x) = \operatorname{sgn}(x)C|x|^\alpha$.

Remarquons que ξ vérifie (V.1), si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $k\xi$ vérifie aussi (V.1). On peut donc supposer que $C = 1$. On a donc que $\xi(x) = x^\alpha$ si $x \geqslant 0$ et $\xi(x) = -(-x)^\alpha$ si $x < 0$.

On distingue deux cas.

1^{er}*cas* : $d \geqslant 3$. Montrons par l'absurde que $\alpha = 1$.

Le même calcul qu'à la question précédente donne que

$$\det f_\xi(A_\lambda) = (\xi(\lambda)-1)^{d-1}(\xi(\lambda)-1+d) = \begin{cases} (\lambda^\alpha - 1)^{d-1}(\lambda^\alpha - 1 + d) & \text{si } \lambda \geqslant 0 \\ (-(-\lambda)^\alpha - 1)^{d-1}(-(-\lambda)^\alpha - 1 + d) & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

La condition (V.1) assure que $h : \lambda \mapsto (\xi(\lambda)-1)^{d-1}(\xi(\lambda)-1+d)$ ne s'annule qu'au plus en 1 et $1-d$. Or $1-d<0$ et donc h s'annule lorsque $(-(-\lambda)^\alpha - 1 + d) = 0$, *i.e.* $\lambda = -(d-1)^{1/\alpha}$. On a donc nécessairement $-(d-1)^{1/\alpha} = 1-d$, *i.e.* $(d-1)^{1-1/\alpha} = 1$. Mais si $\alpha \neq 1$, la stricte monotonie sur $]0,+\infty[$ de $t \mapsto t^{1-1/\alpha}$ rend la condition $(d-1)^{1-1/\alpha} = 1$ impossible. Donc $\alpha = 1$.

2^e*cas* : $d=2$. Montrons que toutes les fonctions $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)C|x|^\alpha$ avec $C \in \mathbb{R}^*$, $\alpha > 0$ conviennent. Comme précédemment, on peut supposer $C=1$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a $\xi(x)\xi(y) = \xi(xy)$ car $\operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(xy)$ et $|x|^\alpha|y|^\alpha = |xy|^\alpha$. On a immédiatement aussi $\xi(x)\xi(y) = \xi(xy)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ en considérant le cas où $x = 0$.

D'où pour tous $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ tels que $ab' - a'b \neq 0$, on a $\xi(a)\xi(b') - \xi(a')\xi(b) = \xi(ab') - \xi(a'b)$. Cette expression ne s'annule pas injectivité de ξ. On a donc que f_ξ envoie la matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} \xi(a) & \xi(b) \\ \xi(a') & \xi(b') \end{pmatrix}$ qui est inversible par ce qui précède. La fonction f_ξ vérifie donc (V.1).

Si $d \neq 2$, les fonctions qui vérifient (V.1) sont les $x \mapsto Cx$ avec $C \in \mathbb{R}^*$. Si $d=2$, les fonctions qui vérifient (V.1) sont les $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)C|x|^\alpha$ avec $C \in \mathbb{R}^*$, $\alpha > 0$.