Mathématiques 2

MP

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées — 2013

Notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On note :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathrm{O}(n)$ le groupe orthogonal d'ordre n ;
- $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles, respectivement strictement positives ;
- I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- 0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ sa matrice transposée, $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace, et, pour $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, m_{ij} le coefficient qui se trouve à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par $\|M\| = \sup(|m_{ij}|, (i,j) \in \{1,\dots,n\}^2)$.

I Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

I.A – On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

I.A.1) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que u est autoadjoint défini positif si et seulement si sa matrice dans n'importe quelle base orthonormée appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.A.2) Montrer que si $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors S est inversible et $S^{-1} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.B – Dans cette question, u désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif. On se propose de démontrer qu'il existe un unique endomorphisme v de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint, défini positif, tel que $v^2 = u$.

I.B.1) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, autoadjoint défini positif et vérifiant $v^2 = u$, et soit λ une valeur propre de u. Montrer que v induit un endomorphisme de $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$ que l'on déterminera.

I.B.2) En déduire v, puis conclure.

I.B.3) Montrer qu'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que $v = Q(u)$.

I.C – Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

I.C.1) Montrer que ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.C.2) En déduire qu'il existe un unique couple $(O, S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

I.C.3) Déterminer les matrices O et S lorsque $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

I.D –

I.D.1) Montrer que $\mathrm{O}(n)$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.2) Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.3) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est une partie dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

I.D.4) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple $(O, S) \in \mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$. Un tel couple est-il unique ?

I.E – Soit φ l'application de $\mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(O, S) = OS$ pour tout couple (O, S) de $\mathrm{O}(n) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Montrer que φ est bijective, continue et que sa réciproque est continue.

II Deux applications

II.A – Première application

Dans cette partie, A et B désignent deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice U carrée de taille n, inversible, à coefficients complexes, telle que $U\,{}^t\overline{U} = I_n$ et $A = UBU^{-1}$, où $\overline{U}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de U.

II.A.1) Justifier que ${}^tA = U({}^tB)U^{-1}$.

II.A.2) On se propose de montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P\,{}^tBP^{-1}$. Pour cela, on note X et Y les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U = X + \mathrm{i}Y$.

a) Montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X + \mu Y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer que $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) Conclure.

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$, avec $O \in \mathrm{O}(n)$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $BS^2 = S^2B$, puis que $BS = SB$.

b) En déduire qu'il existe $O \in \mathrm{O}(n)$ tel que $A = OB{}^tO$.

II.B – Seconde application

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ au système

$$(*) : \begin{cases} {}^tAA + {}^tXX = I_n \\ {}^tAX - {}^tXA = 0_n \end{cases}$$

II.B.1) Montrer que si le système $(*)$ admet une solution dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

II.B.2) On suppose dans cette question que les valeurs propres de ${}^tAA$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

a) Justifier que l'on peut chercher les solutions X de $(*)$ sous la forme $X = UH$, avec $U \in \mathrm{O}(n)$ et $H \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) Déterminer H.

c) Montrer l'existence d'une solution $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de $(*)$ appartenant à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

III Valeurs propres d'une matrice

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

On note P_p le polynôme tel que, pour tout réel x, $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$.

III.A – Montrer qu'à $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(P_p(x))_{p\in\mathbb{N}^*}$ vérifie une relation linéaire d'ordre 2, que l'on précisera.

III.B – Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2-x| < 2$. Après avoir justifié l'existence d'un unique $\theta \in]0,\pi[$ tel que $2-x = 2\cos\theta$, déterminer $P_p(x)$ en fonction de $\sin((p+1)\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

III.C – Déterminer les valeurs propres de A_p.

III.D – Montrer que A_p est diagonalisable, et en déterminer une base de vecteurs propres, en précisant pour chacun la valeur propre associée.

IV

Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

IV.A – Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
Dans la suite, A désigne la matrice définie dans cette ***question IV.A****.*

IV.B –

IV.B.1) Justifier l'existence de $M_n = \sup(\{f(O), O \in \mathrm{O}(n)\})$.

IV.B.2) Justifier que ${}^tAA$ admet n valeurs propres positives $\mu_1, \ldots, \mu_n$, comptées avec multiplicités.

IV.B.3) Montrer que $M_n = \sup(\{\mathrm{Tr}(D\Omega), \Omega \in \mathrm{O}(n)\})$, où D est la matrice diagonale, dont les éléments diagonaux sont $\sqrt{\mu_1}, \ldots, \sqrt{\mu_n}$.

IV.B.4) En déduire que $M_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.

IV.C – Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} m_{i,j}$.

IV.C.1) Déterminer la matrice A telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = Tr(AM)$.

IV.C.2) Montrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.C.3) Déterminer les valeurs propres de $A^{-1}\ {}^tA^{-1}$.

IV.C.4) Montrer que $M_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos\dfrac{k\pi}{2n+1}}$.

IV.C.5) Donner un équivalent de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.

• • • FIN • • •
