CORRIGÉ : MATH 2 ; MP ; Centrale_2013

I - Décomposition polaire d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$

I.A - On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.
I.A.1) Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, B une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et M la matrice de u dans cette base. [u est autoadjoint si et seulement si M est symétrique].
De plus u et M ont le même spectre, $sp(u) = sp(M)$. supposons alors que M est symétrique.
[u est défini positif $\Leftrightarrow sp(u) = sp(M) \subset \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow M \in S_n^{++}(\mathbb{R})$].

I.A.2) Si $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ alors S est symétrique et $sp(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors S est inversible et S^{-1} est symétrique, et puisque S est diagonalisable, $sp(S^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda} \quad tq \quad \lambda \in sp(S)\} \quad \subset \mathbb{R}_+^*$.
D'où $S^{-1} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.B - Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif.
I.B.1) Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ autoadjoint défini positif tel que $v^2 = u$.
Soit $\lambda \in sp(u)$. $uv = v^3 = vu$, alors $\ker(u - \lambda Id)$ est stable par v. Notons v_λ la restriction de v à $\ker(u - \lambda Id)$. Puisque v est diagonalisable, alors v_λ est aussi diagonalisable, et si μ est une valeur propre de v_λ alors il existe un vecteur non nul x de $\ker(u - \lambda Id)$ tel que $v(x) = \mu x$ et $u(x) = \mu^2 x = \lambda x$. Mais $\mu > 0$, alors $\mu = \sqrt{\lambda}$ et $v_\lambda = \sqrt{\lambda}\, Id_{\ker(u-\lambda Id)}$.

I.B.2) Puisque u est diagonalisable, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} \ker(u - \lambda Id)$, alors $v = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} v_\lambda$.
C'est à dire que : $\forall \lambda \in sp(u) \;;\; \forall x \in \ker(u - \lambda Id) \;;\; v(x) = \sqrt{\lambda}\,.x$
Reciproquement, pour ce v ainsi défini, on a : $v \in £(\mathbb{R}^n)$ et $v^2 = u$.
u est autoadjoint, donc diagonalisable et ses sous espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Il existe alors une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la somme directe, $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} \ker(u - \lambda Id)$ dans laquelle la matrice de v est diagonale à élèments diagonaux dans $\mathbb{R}_+^*$.
v est alors bien autoadjoint défini positif vérifiant : $v^2 = u$. D'où l'existence et l'unicité de v.

I.B.3) Soient $\lambda_1,...,\lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u, et $m_1,\ldots,m_p$ leurs multiplictés respectives, il existe une base orthonormale B de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de u est diagonale (par blocs) donnée par : $M_B(u) = diag(\lambda_1 I_{m_1}, \lambda_2 I_{m_2}, \ldots, \lambda_p I_{m_p})$, alors par unicité de v, on a : $M_B(v) = diag(\sqrt{\lambda_1}\, I_{m_1}, \sqrt{\lambda_2}\, I_{m_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_p}\, I_{m_p})$.
Soient $L_1,\ldots,L_p$ les polynômes de Lagrange associés au réels $\lambda_1,...,\lambda_p$.
C'est à dire : $\forall i \in [[1,p]] \;;\; L_i(X) = \prod_{j=1\,;\,j\neq i}^{p} \left(\frac{X-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right)$. on a : $L_i(\lambda_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si non} \end{cases}$.
Posons : $Q(X) = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i}\, L_i(X)$. Q est un polynôme vérifiant : $\forall i \in [[1,p]] \;;\; Q(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.
Donc $Q(M_B(u)) = M_B(v)$ c'est à dire encore : $v = Q(u)$.

I.C - Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
I.C.1) ${}^tAA$ est symétrique, et $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \;;\; {}^tX\,{}^tAAX = {}^t(AX)AX > 0$ pour $X \neq 0$, car dans ce cas $AX \neq 0$, puisque A est inversible. D'où ${}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

I.C.2) D'aprés **I.B**) il existe une unique matrice $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que : ${}^tAA = S^2$.
Posons : $O = AS^{-1}$, ${}^tOO = S^{-1}({}^tAA)S^{-1} = S^{-1}(S^2)S^{-1} = I_n$, alors $O \in O(n)$.
Reciproquement si $(O,S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que : $A = OS$, alors ${}^tAA = S^2$ et $O = AS^{-1}$.

D'où l'existence et l'unicité de $(O,S) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.

I.C.3) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 3\sqrt{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; ${}^tA = \begin{pmatrix} 3 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$; ${}^tAA = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -6 \\ 0 & 36 & 0 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Notons : $M = {}^tAA$ et Le polynôme carctéristique de M est :
$\chi_M(X) = (36-X)(4-X)(16-X)$.
Les sous espaces propres de M sont :

$E_{36}(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $E_4(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $E_{16}(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

sont deux à deux orthogonaux, alors par unicité de S, ona : $S = P\Delta P^{-1}$.

avec $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = diag(6,2,4)$.

$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

I.D.1) Soit $M \in O(n)$, les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, alors $\forall i,j \in [[1,n]]$; $|m_{i,j}| \leq 1$ et donc $\|M\| \leq n^2$, de plus $I_n \in O(n)$, alors $O(n)$ est une partie non vide bornée de l'espace vectoriel normé $M_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, alors pour montrer que c'est un compact, il suffit de montrer que $O(n)$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$.
L'application $[X \overset{F}{\mapsto} F(X) = {}^tXX]$ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$, car les coefficients de ${}^tXX$ sont des polynômes aux coefficients de X. $O(n) = F^{-1}(\{I_n\})$ est donc un fermé comme image reciproque par une application continue d'un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

I.D.2) $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$, puisque sous espace vectoriel de dimension finie, il suffit alors de montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$.
Soit $(A_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_n^+(\mathbb{R})$ convergente vers $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrons que $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, l'application $[M \mapsto {}^tXMX]$ est une forme linéaire continue sur $S_n(\mathbb{R})$.
$\forall q \in \mathbb{N}$; ${}^tXA_qX \geq 0$, alors par passage à la limite ${}^tXAX \geq 0$. D'où $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

I.D.3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, le nombre des valeurs propres de A est fini, alors il existe un entier non nul N tel que : $\forall q \geq N$; $\frac{1}{q} \notin sp(A)$ ou encore $(A - \frac{1}{N+p}I_n)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A. D'où $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

I.D.4) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, d'aprés la question précèdente, il existe une suite $(A_q)_{q\in\mathbb{N}}$ de $GL_n(\mathbb{R})$ qui converge vers A, alors d'aprés **I.C.2**) il existe deux suites $(O_q)_{q\in\mathbb{N}}$ de $O(n)$ et $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que : $\forall q \in \mathbb{N}$; $A_q = O_qS_q$.
Mais d'aprés **I.D.1**) $O(n)$ est compact, alors il existe une sous suite $(O_{\varphi(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $O \in O(n)$. Mais $\forall q \in \mathbb{N}$; $S_{\alpha(q)} = {}^tO_{\alpha(q)}A_{\alpha(q)} \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} {}^tOA = S$.

Mais $(S_{\alpha(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R}) \subset S_n^+(\mathbb{R})$ alors d'aprés **I.D.2**) $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Ce couple n'est pas unique, voici un contre exemple :
$O = diag(-1,1,1,\ldots,1)$ et $S = diag(0,1,2,\ldots,n-1)$.
$O \neq I_n$, O et I_n sont dans $O(n)$ et $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $OS = I_nS = S$.

I.E - Soit φ l'application de $O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$ par : $\varphi(O,S) = OS$.
D'aprés **I.C.2**) tout élèment A de $GL_n(\mathbb{R})$ admet un et un seul antécèdent par φ, alors φ est bijective. De plus φ est la restriction d'une application bilinéaire en dimension finie, alors φ est continue.
Soit $(A_q)_{q\in\mathbb{N}}$ une suite de $GL_n(\mathbb{R})$, convergente vers $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
On pose : $(O,S) = \varphi^{-1}(A)$ et $\forall q \in \mathbb{N}$; $(O_q,S_q) = \varphi^{-1}(A_q)$.
$\forall q \in \mathbb{N}$; ${}^tA_qA_q = S_q^2 \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} {}^tAA = S^2$.
$\forall q \in \mathbb{N}$; $S_q = {}^tO_qA_q$, alors pour la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$.
$\||S_q|\| = \||A_q|\|$, alors la suite $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ est bornée dans un espace vectoriel de dimension finie, alors d'aprés le théorème de Bolzano-Weirstrass, cette suite admet une sous suite $(S_{\alpha(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ convergente vers une certaine matrice $S' \in S_n^+(\mathbb{R})$.
La suite $(S^2_{\alpha(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers $S^2 = S'^2$ qui est inversible, alors $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
D'où d'aprés **I.B**) $S = S'$. On vient de montrer que S est la seule valeur d'adhérence de la suite $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$. Montrons que $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers S.
Par l'absurde supposons que la suite $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers S.
Il existe $\varepsilon > 0$, et une sous suite $(S_{\beta(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall q \in \mathbb{N}$; $\|S - S_{\beta(q)}\| \geq \varepsilon$.
D'aprés ce qui précède $(S_{\beta(q)})_{q\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée, donc admet une valeur d'adhérence, qui est aussi valeur d'adhérence de la suite $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$, donc ne peut être que S.
ceci est absurde car $\forall q \in \mathbb{N}$; $\|S - S_{\beta(q)}\| \geq \varepsilon.$.
Finalement la suite $(S_q)_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers S et par conséquent, la suite $(S_q^{-1})_{q\in\mathbb{N}}$ converge vers S^{-1}.
En effet : l'application $[M \mapsto M^{-1}]$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.
La suite $(O_q)_{q\in\mathbb{N}} = (A_qS_q^{-1})_{q\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $AS^{-1} = O$.
Finalement $\lim\limits_{q\to\infty} \varphi^{-1}(A_q) = \varphi^{-1}(A)$, φ^{-1} est séquentiellement continue sur $GL_n(\mathbb{R})$ donc continue sur $GL_n(\mathbb{R})$.

II - Deux applications

II.A - Première application

Soient $A,B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $U \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $UU^* = I_n$ et $A = UBU^{-1}$.
II.A.1) $U^{-1} = U^* = {}^t\overline{U} \Rightarrow \overline{U} = {}^t(U^{-1}) \Rightarrow {}^tA = \overline{U}({}^tB){}^tU$.
Mais A est réelle alors ${}^tA = \overline{\overline{U}({}^tB){}^tU} = U({}^tB){}^t\overline{U} = U({}^tB)U^{-1}$.

II.A.2) On note X,Y les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ telles que : $U = X + iY$.
a) $R(t) = \det(X + tY)$ définit une fonction polynôme, non nulle puisque $R(i) \neq 0$, et donc admet un nombre fini de zéros réels. D'où il existe un réel μ tel que : $R(\mu) \neq 0$.

b) $AU = UB$, alors en séparant parties réelles et imaginaires, on obtient : $AX = XB$ et $AY = YB$.

c) On pose : alors $P = X + \mu Y \in GL_n(\mathbb{R})$ et $AP = PB$ c'est à dire : $A = PBP^{-1}$.
De même, on a : ${}^tAU = U^tB$ alors ${}^tAX = X^tB$ et ${}^tAY = Y^tB$ et donc ${}^tAP = P^tB$.
D'où $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P^tBP^{-1}$

II.A.3) On écrit P sous la forme $P = OS$ avec $O \in O(n)$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) $A = PBP^{-1}$ et ${}^tA = P^tBP^{-1}$ et ${}^tPP = S^2$.
Calculons A^2 de deux façons, $A^2 = PB^2P^{-1} = {}^t(P^tBP^{-1})PBP^{-1} = {}^tP^{-1}B^tPPBP^{-1}$
$PB^2P^{-1} = {}^tP^{-1}BS^2BP^{-1}$. On multiplie par ${}^tP$ à gauche et par P à droite.
On obtient alors $S^2B^2 = BS^2B$. Si B est inversible, on on a évidement $BS^2 = S^2B$.
Dans le cas général, soit v un réel qui n'est pas valeur propre de B, et posons :
$B' = B - vI_n$ et $A' = A - vI_n$
Tout ce qui précède dans cette application reste vrai en remplaçant A par A' et B par B'.
B' étant inversible, alors $B'S^2 = S^2B'$ et par conséquent : $BS^2 = S^2B$.
Montrons maintenant que $BS = SB$.
D'aprés **I**.**B**.**3**), il existe un polynôme Q tel que $Q(S^2) = S$, d'où $BS = SB$.

b) D'aprés la question précèdente, $B = SBS^{-1}$, alors $A = PBP^{-1} = OSBS^{-1t}O = OB^tO$.

II.**B** - Seconde application

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, on se propose de donner une condition nécesaire et suffisante d'existence d'une solution $X \in GL_n(\mathbb{R})$ au système : $(*)\begin{cases} {}^tAA + {}^tXX = I_n \\ {}^tAX - {}^tXA = 0_n \end{cases}$.

II.**B**.**1**) Supposons que le système admet une solution $X \in GL_n(\mathbb{R})$.
$\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}\ ;\ {}^tZ\,{}^tAAZ + {}^tZ\,{}^tXXZ = {}^tZZ$.
Or ${}^tXX \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors ${}^tZ\,{}^tXXZ > 0$ et donc $\forall Z \in M_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}\ ;\ {}^tZ(I_n - {}^tAA)Z > 0$.
$I_n -^t AA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $sp(I_n - {}^tAA) = \{1 - \lambda\ tq\ \lambda \in sp({}^tAA)\} \subset \mathbb{R}_+^*$. D'où $sp({}^tAA) \subset [0,1[$.

II.**B**.**2**) On suppose dans cette question que $sp({}^tAA) \subset [0,1[$.
a) D'aprés **I**.**D**.**4**) Tout $X \in GL_n(\mathbb{R})$ s'écrit d'une unique façon sous la forme : $X = UH$
avec $(U,H) \in O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$.

b) ${}^tXX = H^2 = I_n - {}^tAA \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Puisque $I_n - {}^tAA \in S_n(\mathbb{R})$ et $sp(I_n - {}^tAA) = \{1 - \lambda\ \ tq\ \ \lambda \in sp({}^tAA)\} \subset \mathbb{R}_+^*$.
Alors d'aprés **I**.**B**) il existe une unique matrice $H \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que : $H^2 = I_n - {}^tAA$.

c) Fixons alors le H de la question précèdente, et Posons $X = UH$ avec $U \in O(n)$.
Il s'agit alors de trouver $U \in O(n)$ tel que : ${}^tAUH - H^tUA = 0_n$ càd $B = {}^tAUH$ est symétrique.
Selon **I**.**D**.**4**) on peut écrire $A = OS$ avec $(O,S) \in O(n) \times S_n^+(\mathbb{R})$. Posons $U = O$, alors $B = SH$.
${}^tAA + {}^tXX = I_n = S^2 + H^2$, alors S^2 et H^2 commutent, et en appliquant la technique de **I**.**B**.**3**) à S et à H, on a : $SH = HS$, c'est à dire $B = {}^tB$.

III - **Valeurs propres d'une matrice**

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{R})$.

Soit le polynôme réel : $P_p(x) = \det(xI_p - A_p)$.

III.A - Soit $p \geq 3$. $P_p(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & x-2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$

On développe suivant la première ligne.

$$P_p(x) = (x-2)P_{p-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & x-2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)P_{p-1}(x) - P_{p-2}(x).$$

III.B - Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|2-x| < 2$, $\frac{2-x}{2} \in]-1;1[$ et l'application $[\theta \mapsto \cos(\theta)]$ est une bijection de $]0,\pi[$ vers $]-1;1[$, alors il existe un unique $\theta \in]0,\pi[$ tel que : $(2-x) = 2\cos(\theta)$.
$P_1(x) = x-2 = -2\cos(\theta) = -\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)}$;
$P_2(x) = (x-2)^2 - 1 = \frac{4\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{2\sin(2\theta)\cos(\theta)-\sin(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(3\theta)}{\sin(\theta)}$.
Par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, montrons que $P_p(x) = (-1)^p \frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.
Ceci est vrai pour $p \in \{1,2\}$, supposons que c'est vrai pour $p \in [[1, q-1]]$ tel que $q \geq 3$.
$P_q(x) = (x-2)P_{q-1}(x) - P_{q-2}(x) = -2\cos(\theta)(-1)^{q-1}\frac{\sin(q\theta)}{\sin(\theta)} - (-1)^q \frac{\sin((q-1)\theta)}{\sin(\theta)}$
$P_q(x) = (-1)^q\left(2\cos(\theta)\frac{\sin(q\theta)}{\sin(\theta)} - \frac{\sin((q-1)\theta)}{\sin(\theta)}\right) = (-1)^q \frac{\sin((q+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

N.B : On a utilisé la formule trigonométrique : $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

III.C - $P_p(x) = \frac{\sin((p+1)\theta)}{\sin(\theta)} = 0$ si et seulement si $\theta = \frac{k\pi}{p+1}$ avec $k \in [[1,p]]$.
$P_p(x) = 0$ si et seulement si $x = 2(1-\cos(\frac{k\pi}{p+1})) = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})$ avec $k \in [[1,p]]$.
Les valeurs propres de A_p sont les $\lambda_{k,p} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})$ avec $k \in [[1,p]]$.

III.D - $A_p \in M_p(\mathbb{R})$ et admet p valeurs propres réelles distinctes, alors A_p est diagonalisable.

Fixons $k \in [[1,p]]$ et posons : $X_k = \begin{pmatrix} x_{1,k} \\ . \\ . \\ . \\ x_{p,k} \end{pmatrix} \in M_{p,1}(\mathbb{R})$;

$$A_pX_k = \lambda_{k,p}X_k \iff \begin{cases} 2x_{1,k} - x_{2,k} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})x_{1,k} \\ -x_{1,k} + 2x_{2,k} - x_{3,k} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})x_{2,k} \\ \dots \\ -x_{p-2,k} + 2x_{p-1,k} - x_{p,k} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})x_{p-1,k} \\ -x_{p-1,k} + 2x_{p,k} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})x_{p,k} \end{cases}.$$

$$A_pX_k = \lambda_{k,p}X_k \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x_{2,k} = 2\cos(\frac{k\pi}{p+1})x_{1,k} \\ x_{1,k}+x_{3,k} = 2\cos(\frac{k\pi}{p+1})x_{2,k} \\ \dots \\ x_{p-2,k}+x_{p,k} = 2\cos(\frac{k\pi}{p+1})x_{p-1,k} \end{array}\right. .$$

On prend $x_{1,k} = 1$; $x_{2,k} = 2\cos(\frac{k\pi}{p+1})$ et pour $3 \leq q \leq p\ :\ x_{q,k} - 2\cos(\frac{k\pi}{p+1})x_{q-1,k} + x_{q,k} = 0.$

L'équation caractéristique de cette suite est :

$$t^2 - 2t\cos(\frac{k\pi}{p+1}) + 1 = 0 = (t - \exp(i\frac{k\pi}{p+1}))(t - \exp(-i\frac{k\pi}{p+1})).$$

$x_{q,k} = \alpha_k \cos\left(q\frac{k\pi}{p+1}\right) + \beta_k \sin\left(q\frac{k\pi}{p+1}\right)$

$$\left\{\begin{array}{l} x_{1,k} = \alpha_k\cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) + \beta_k\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) = 1 \\ x_{2,k} = \alpha_k\cos\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) + \beta_k\sin\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) = 2\cos(\frac{k\pi}{p+1}) \end{array}\right. .$$

$\Delta = \sin\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) = \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right).$

$\alpha_k = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ 2\cos(\frac{k\pi}{p+1}) & \sin\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) \end{vmatrix}}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)} = 0$ et $\beta_k = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) & 1 \\ \cos\left(\frac{2k\pi}{p+1}\right) & 2\cos(\frac{k\pi}{p+1}) \end{vmatrix}}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)} = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)}.$

$x_{q,k} = \dfrac{\sin\left(q\frac{k\pi}{p+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right)}.$

Donc un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_{k,p} = 4\sin^2(\frac{k\pi}{2(p+1)})$ avec $k \in [[1,p]]$ est

$$Z_k = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \sin\left(2\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \vdots \\ \sin\left((p-1)\frac{k\pi}{p+1}\right) \\ \sin\left(p\frac{k\pi}{p+1}\right) \end{pmatrix}.$$

IV - Soit f une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
IV.**A** - On muni $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire, $< X,Y >= Tr({}^tXY)$.
Il existe une unique matrice $A' \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})\ ;\ f(M) = < A',M > = Tr({}^tA'M)$.
La matrice $A = {}^tA'$ répond bien à la question.

IV.**B**.**1**) - f est une forme linéaire sur l'espace vectriel normé de dimension finie $M_n(\mathbb{R})$ donc continue, en particulier continue sur le compact $O(n)$ à valeurs réelles, donc bornée et atteint ses bornes sur $O(n)$.
D'où l'existence de $M_n = \sup(\{f(O), O \in O(n)\})$.

IV.**B**.**2**) ${}^tAA$ est symétrique positive.

IV.**B**.**3**) D'aprés **I**.**D**.**4**) il existe $(O_1,S_1) \in O(n) \times S_n^+(\mathbb{R})$ tel que : $A = O_1S_1$. alors ${}^tAA = S_1^2$.
S_1 est diagonalisable par une matrice orthogonale T et $S_1 = TD{}^tT$ où $D = diag(\sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_n})$.

$\{ f(O), O \in O(n)\} = \{Tr(AO), O \in O(n)\} = \{Tr(O_1TD^tTO), O \in O(n)\}$
$\{ f(O), O \in O(n)\} = \{Tr(D^tTOO_1T), O \in O(n)\}$. ($\forall X, Y \in M_n(\mathbb{R})$; $Tr(XY) = Tr(YX)$)
L'application $[O \mapsto {}^tTOO_1T]$ est une bijection de $O(n)$ vers $O(n)$.
Alors : $\{f(O), O \in O(n)\} = \{Tr(D\Omega), \Omega \in O(n)\}$.
D'où $M_n = \sup(\{Tr(D\Omega), \Omega \in O(n)\})$.

IV.B.4) Soit $\Omega \in O(n)$; $\Omega = (\Omega_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. $Tr(D\Omega) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}\,\Omega_{k,k} \le \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$, car $\forall k \in [[1,n]]$; $\Omega_{k,k} \le 1$, puisque les colonnes de Ω sont de norme 1. Mais ce majorant est atteint pour $\Omega = I_n$.
D'où $M_n = \sup(\{Tr(D\Omega), \Omega \in O(n)\}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k}$.

IV.C - Dans cette question, f désigne la forme linéaire définie par :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}) \text{ ; } f(M) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} m_{i,j}.$$

IV.C.1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \le j \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

IV.C.2) Soient $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice A dans la base canonique. $\forall j \in [[1,n]]$; $w(e_j) = \sum_{k=1}^{j} e_k$ pour $j \ge 2$, $w(e_j) - w(e_{j-1}) = w(e_j - e_{j-1}) = e_j$.
D'où $w^{-1}(e_1) = e_1$ et pour $j \ge 2$, $w^{-1}(e_j) = e_j - e_{j-1}$.

IV.C.3) Posons $T = A^{-1}\ {}^tA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de T est :

$$Q_n(x) = \det(xI_n - T) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & x-2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Utilisons encore les notations et les résultats de la partie **III.B**)
Pour $n \ge 3$, développons suivant la dernière colonne : $Q_n(x) = (x-1)\mathrm{P}_{n-1}(x) - \mathrm{P}_{n-2}(x)$.
Posons encore $2 - x = 2\cos(\theta)$ avec $\theta \in]0,\pi[$.
$Q_n(x) = (1 - 2\cos(\theta))(-1)^{n-1}\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} - (-1)^n \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin(\theta)}$
$Q_n(x) = \frac{(-1^n}{\sin(\theta)}(2\sin(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta))$
$Q_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sin(\theta)}(\sin(n+1)\theta) - \sin(n\theta)) = (-1)^n \frac{\cos((n+\frac{1}{2})\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})}$.
$Q_n(x) = 0 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi. (k \in [[0, n-1]]) \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2n+1} + \frac{2k\pi}{2n+1}. (k \in [[0, n-1]])$.
Les valeurs propres de $A^{-1}\ {}^tA^{-1}$ sont les
$v_{n-k} = 2(1 - \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1})) = 2(1 + \cos(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n+1})) = 2(1 + \cos(\frac{2(n-k)\pi}{2n+1})) = 4\cos^2(\frac{(n-k)\pi}{2n+1})$.

Les valeurs propres de $A^{-1}\ {}^tA^{-1}$ sont les $\nu_k = 4\cos^2(\frac{k\pi}{2n+1})$ pour $k \in [[1,n]]$.

IV.C.4) D'aprés la question précèdente, les valeurs propres de ${}^tAA$ sont les $\mu_k = \frac{1}{4\cos^2(\frac{k\pi}{2n+1})}$ pour $k \in [[1,n]]$. D'où selon **IV.B.4**) $M_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\mu_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\cos(\frac{k\pi}{2n+1})}$.

IV.C.5) $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$ et $x - \frac{x^3}{6} \geq x(1 - \frac{\pi^2}{24}) > 0$.

$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} \leq M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sin(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)}(1-\frac{1}{6}(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})^2)} = S_n$

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{6^p}(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})^{2p-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} + T_n$$

D'une part : $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})} = \frac{(2n+1)}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{n+\frac{1}{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k-\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \ln(n)$.

D'autre part, $0 \leq T_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{6^p}(\frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)})^{2p-1} \leq \frac{n}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{\pi^2}{24}\right)^p \underset{n\to\infty}{=} \circ\ (\frac{n}{\pi} \ln(n))$.

Finalement $\boxed{M_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{\pi} \ln(n)}$.