Mathématiques 1

MP

2013

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Dans tout le problème, $\mathbb{R}^2$ est muni du produit scalaire euclidien canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$ et de la norme $\|\ \|$ associée.
Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et si $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note $\mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de Ω dans $\mathbb{R}^n$.
Si $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, la différentielle de f au point p de Ω est notée $\mathrm{d}f_p$; sa matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^n$ est appelée *matrice jacobienne de f en p* et est notée $\mathrm{Jac}\, f(p)$.
Si f est dans $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, on dit que f vérifie (1) si et seulement si

$$\forall (x,y) \in \Omega, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 1 \tag{1}$$

On note $\mathcal{P}_2$ l'ensemble des fonctions polynomiales de degré $\leqslant 2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$x \mapsto ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \qquad \text{où} \qquad (a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{R}^6.$$

Le but principal du problème est de montrer que les solutions de (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

I Les équations de Cauchy-Riemann

Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant les équations, dites de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

On définit deux fonctions sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \text{et} \quad \widetilde{g}(r,\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $\mathcal{E}_n$ l'espace des fonctions f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad t^2 f''(t) + t\, f'(t) - n^2 f(t) = 0$$

I.A –

I.A.1) Exprimer $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$ en fonction de r, θ, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

I.A.2) Pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, montrer $\dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = \dfrac{1}{r} \times \dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial \theta}(r,\theta)$ et $\dfrac{\partial \widetilde{g}}{\partial r}(r,\theta) = -\dfrac{1}{r} \times \dfrac{\partial \widetilde{f}}{\partial \theta}(r,\theta)$.

I.B – Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, soit φ_α la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi_\alpha(t) = t^\alpha$$

I.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, déterminer les réels α tels que φ_α appartienne à $\mathcal{E}_n$.

I.B.2) Déterminer $\mathcal{E}_n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. On discutera séparément le cas $n = 0$.

I.C – Pour $n \in \mathbb{Z}$, soient $c_{n,f}$ et $c_{n,g}$ les fonctions de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \begin{cases} c_{n,f}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{f}(r,\theta)\, e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \\[2ex] c_{n,g}(r) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{g}(r,\theta)\, e^{-in\theta}\, \mathrm{d}\theta \end{cases}$$

I.C.1) Montrer que $c_{n,f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (c_{n,f})'(r) = \frac{in}{r}\, c_{n,g}(r)$$

I.C.2) Montrer que $c_{n,f}$ appartient à $\mathcal{E}_n$ et que $c_{n,f}$ est bornée au voisinage de 0. En déduire l'existence de $a_n \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}_+^*, \qquad c_{n,f}(r) = a_n\, r^{|n|}$$

I.C.3) En énonçant précisément le théorème utilisé, établir

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \widetilde{f}(r,\theta) = \lim_{p\to\infty} \sum_{n=-p}^{p} a_n r^{|n|}\, e^{in\theta}$$

I.D – Dans cette question, on suppose que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

I.D.1) Si $n \in \mathbb{Z}$, montrer que la fonction $(c_{n,f})'$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.D.2) Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes.

II Quelques solutions de (1)

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on dit que $u \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ vérifie (**II.1**) sur I si et seulement si

$$\forall t \in I, \qquad u(t)\,(u(t) + 2t\,u'(t)) = -1 \tag{II.1}$$

II.A – Déterminer les fonctions de $\mathcal{P}_2$ vérifiant (**1**) sur $\mathbb{R}^2$.

II.B – En énonçant précisément le théorème utilisé, montrer, si (t_0,u_0) est dans $(\mathbb{R}^*)^2$, l'existence d'un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ contenant t_0 et d'une fonction $u \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telle que u soit solution de (**II.1**) sur I et vérifie $u(t_0) = u_0$.

II.C – Soit J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Existe-t-il une fonction polynomiale solution de (**II.1**) sur J ?

II.D – Soient J un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $\Omega(J) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \in J\}$, w dans $\mathcal{C}^2(J,\mathbb{R})$ et W la fonction définie par

$$\forall (x,y) \in \Omega(J), \qquad W(x,y) = w(xy)$$

II.D.1) Montrer que $\Omega(J)$ est un ouvert non vide.

II.D.2) Montrer que W est dans $\mathcal{C}^2(\Omega(J),\mathbb{R})$ et que l'on a équivalence entre

i. W vérifie (1) sur $\Omega(J)$,

ii. w' vérifie (**II.1**) sur J.

II.D.3) Montrer que W est la restriction à $\Omega(J)$ d'une fonction de $\mathcal{P}_2$ si et seulement si w est affine.

II.E – Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, f dans $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ vérifiant (1) sur Ω, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega_{a,b}$ l'image de Ω par la translation de vecteur (a,b) et $f_{a,b}$ la fonction définie sur $\Omega_{a,b}$ par

$$\forall (x,y) \in \Omega_{a,b}, \qquad f_{a,b}(x,y) = f(x-a, y-b)$$

Montrer que $f_{a,b}$ vérifie (**1**) sur $\Omega_{a,b}$.

II.F – Si (x_0,y_0) est dans $\mathbb{R}^2$, montrer qu'il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ contenant (x_0,y_0) tel que l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ vérifiant (**1**) sur U et ne coïncidant sur U avec aucun élément de $\mathcal{P}_2$ soit infini.

III Un critère de difféomorphisme

III.A – Rappeler la définition d'un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et le théorème caractérisant un tel difféomorphisme parmi les applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite de cette partie, on considère $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. On suppose que pour tout $(p,h) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$

$$\langle dF_p(h), h\rangle \geqslant \alpha \|h\|^2$$

Le but de cette partie est de montrer que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

III.B – Soient p et q dans $\mathbb{R}^2$.

III.B.1) Vérifier

$$F(q) - F(p) = \int_0^1 dF_{p+t(q-p)}(q-p)\,\mathrm{d}t$$

III.B.2) Montrer

$$\langle F(q) - F(p), q - p \rangle \geqslant \alpha \|q - p\|^2$$

III.C – Soient $a \in \mathbb{R}^2$ et G^a l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{R}^2, \qquad G^a(p) = \|F(p) - a\|^2$$

III.C.1) Si p et h sont dans $\mathbb{R}^2$, calculer $dG^a{}_p(h)$.

III.C.2) Montrer que $G^a(p) \to +\infty$ quand $\|p\| \to +\infty$.

III.C.3) En déduire que G^a atteint un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ en un point p_0.

III.C.4) Montrer que $F(p_0) = a$.

III.D – Montrer que F réalise un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

IV Le théorème de Jörgens

Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soient $u(x, y) = x + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $v(x, y) = y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ et $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

On suppose dans les questions **IV.A** et **IV.B** que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) > 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

IV.A – Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\operatorname{Jac} F(x, y) - I_2$ (où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2) est symétrique positive. En déduire que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Dans la suite, soient, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $s(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $t(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ de sorte que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) > 0$ et $r(x, y)\, t(x, y) - s(x, y)^2 = 1$.

IV.B –

IV.B.1) Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} \varphi\,(u(x, y),\, v(x, y)) = x - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\[2ex] \psi\,(u(x, y),\, v(x, y)) = -y + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

IV.B.2) Calculer $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\,(u(x, y), v(x, y))$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\,(u(x, y), v(x, y))$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}\,(u(x, y), v(x, y))$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}\,(u(x, y), v(x, y))$ (que l'on abrégera en $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$, $\dfrac{\partial \psi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \psi}{\partial v}$) en fonction de $r(x, y)$, $s(x, y)$ et $t(x, y)$ (que l'on abrégera en r, s et t).

IV.B.3) Montrer que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^2$.

IV.B.4) Montrer, en utilisant la première partie, que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}$ sont constantes.

IV.B.5) En déduire que r, s et t sont constantes.

IV.C – Montrer que les seules fonctions de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant (1) sur $\mathbb{R}^2$ appartiennent à $\mathcal{P}_2$.

• • • FIN • • •
