# Centrale MP 2012, Épreuve de Mathématiques 2

*Jean-Pierre Roudneff, lycée Louis-le-Grand*

## I. Produit de convolution

### A. Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

– L'ensemble $J_x$ est déjà non vide car il contient le polynôme nul.
– Pour tous polynômes $A$ et $B$ de $J_x$ et tous scalaires $\alpha$ et $\beta$ de $\mathbb{K}$ on a, par morphisme d'algèbre de $P \longmapsto P(\sigma)$ :

$$(\alpha A + \beta B)(\sigma)(x) \; = \; \big(\alpha A(\sigma) + \beta B(\sigma)\big)(x) \; = \; \alpha A(\sigma)(x) + \beta B(\sigma)(x) \; = \; 0,$$

d'où $\alpha A + \beta B \in J_x$.
– Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$ et tout $B \in J_x$,

$$(AB)(\sigma)(x) \; = \; \big(A(\sigma) \circ B(\sigma)\big)(x) \; = \; A(\sigma)\big(B(\sigma)(x)\big) \; = \; A(\sigma)(0) \; = \; 0,$$

d'où $AB \in J_x$.
L'ensemble $J_x$ est donc un idéal de $\mathbb{K}[X]$ et, comme $x$ est une suite récurrente linéaire, il existe un polynôme $A$ non nul tel que $A(\sigma)(x) = 0$, donc $J_x$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

### B. Quelques exemples

**1°)** – $x$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $0$ si et seulement si il existe un scalaire $a_0$ non nul tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_0 x_n = 0$ si et seulement si $x$ est la suite nulle.

– $x$ est une suite récurrente linéaire d'ordre $1$ si et seulement si il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$ si et seulement si il existe $r \in \mathbb{K}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = r x_n$. Les suites récurrentes linéaires d'ordre $1$ sont donc exactement les suites géométriques.

– Les suites récurrentes linéaires dont $(X-1)^2$ est un polynôme caractéristique sont celles qui vérifient la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$. Le polynôme $(X-1)^2$ étant du second degré et ayant $1$ comme racine double, ce sont exactement les suites de la forme

$$x_n \; = \; (\alpha n + \beta).1^n$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes. De plus, si $(X-1)^2$ en est le polynôme minimal, $(X-1)$ ne doit pas être un polynôme caractéristique donc $x$ ne doit pas être une suite géométrique de raison $1$. Les suites récurrentes linéaires de polynôme caractéristique $(X-1)^2$ sont donc les suites de la forme $x_n = \alpha n$, où $\alpha$ est une constante non nulle.

**2°)** Le polynôme minimal $B$ de $x$ divise déjà le polynôme $A(X) = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 = (X+1)^3$, donc $B(X) = (X+1)^p$ avec $p \in \{0, 1, 2, 3\}$.
De plus, $p \geqslant 2$ car sinon $x$ serait une suite géométrique de raison $-1$, ce qu'interdisent les conditions initiales.
Soit $y$ la suite récurrente linéaire d'ordre $2$ définie par $y_0 = x_0 = 0$, $y_1 = x_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0$. Par définition, $(X+1)^2 \in J_y$ donc $A(X) \in J_y$. Or $y_2 = -2y_1 - y_0 = 2 = x_2$ donc $x$ et $y$ sont deux éléments de $\mathcal{R}_A$ satisfaisant les mêmes trois conditions initiales, d'où $x = y$.
On a ainsi $x \in \mathcal{R}_B$ avec $B(X) = (X+1)^2$ donc le polynôme minimal de $x$ est $(X+1)^2$.

### Partie C.

**1°)** – $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est une partie non vide de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (car contient la suite nulle). De plus, $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire vu qu'on a facilement $A(\sigma)(\lambda x + \mu y) = \lambda A(\sigma)(x) + \mu A(\sigma)(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
$\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
– L'application $\varphi :\ x \longmapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ est clairement linéaire de $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^p$ et est de plus bijective car une suite récurrente linéaire d'ordre $p$ est entièrement déterminée par la donnée de ses $p$ premiers termes. Autrement dit, $\varphi$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, d'où $\dim \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = p$.

**2°)** – Par définition, $\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+p} = 0$, c'est-à-dire telles que $\forall k \geqslant p,\ x_k = 0$.
Il s'agit donc de l'ensemble des suites nulles à partir du rang $p$.
– Les $p$ suites définies par $(1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots), \ldots (0, 0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ (où les "1" figurent en positions successives) forment une famille libre de $\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$ donc une base de celui-ci pour une question de cardinalité.

**3°) a)** $\psi : Q \longmapsto \big(Q(n)\lambda^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ définit de manière immédiate une application linéaire de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dont l'image est $E_A(\mathbb{K})$ par définition : $E_A(\mathbb{K})$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

L'application $\psi$ est de plus injective car si $\psi(Q) = 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ Q(n) = 0$ (vu que $\lambda \neq 0$), d'où $Q = 0$ (car $Q$ a alors une infinité de racines).

Il en résulte que $\dim E_A(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}_{p-1} = p$.

**b)** Soit $Q$ un polynôme de $\mathbb{K}_{p-1}[X]$ et $x$ la suite $\big(Q(n)\lambda^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors $(\sigma - \lambda.\mathrm{Id})(x)$ est la suite de terme général $Q(n{+}1)\lambda^{n+1} - \lambda Q(n)\lambda^n$, c'est-à-dire $\big(\Delta(Q)(n)\big)\lambda^{n+1}$, où $\Delta$ désigne l'opérateur ("de dérivation discrète") défini par $\Delta(Q) = Q(X{+}1) - Q(X)$. Par une récurrence immédiate sur $k$, on en déduit que $(\sigma - \lambda.\mathrm{Id})^k(x)$ est la suite de terme général $\big(\Delta^k(Q)(n)\big)\lambda^{n+k}$.
Or, $\deg \Delta(Q) \leqslant \deg Q - 1$, si bien que $\forall k \geqslant p,\ \Delta^k(Q) = 0$. En particulier, $(\sigma - \lambda.\mathrm{Id})^p(x) = 0$, ce qui montre que $x$ appartient à $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

L'inclusion $E_A(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ obtenue et l'égalité des dimensions permettent alors de conclure que $E_A(\mathbb{K}) = \mathcal{R}_A(\mathbb{K})$.

**Partie D.**

**1°)** – En convenant de poser $\lambda_0 = 0$, les scalaires $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts donc les polynômes $(X - \lambda_k)^{m_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Le théorème de décomposition des noyaux implique alors que

$$\operatorname{Ker} A(\sigma) \ = \ \bigoplus_{k=0}^{d} \operatorname{Ker}\big((X - \lambda_k)^{m_k}(\sigma)\big),$$

soit $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=0}^{d} \mathcal{R}_{(X-\lambda_k)^{m_k}}(\mathbb{K})$.

– D'après la question **I.C.3°)b)**, les suites de $\mathcal{R}_{(X-\lambda_k)^{m_k}}(\mathbb{K})$ avec $k \geqslant 1$ sont exactement celles de la forme $\big(Q_k(n)\lambda_k^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ où $Q_k$ est un polynôme de degré strictement inférieur à $m_k$.

– Enfin, le **I.C.2°)** établit que $\mathcal{R}_{X^{m_0}}$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang $m_0$ (et donc telles que $x_0, x_1, \ldots, x_{m_0-1}$ soient arbitraires).

– On peut alors conclure que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites de $x$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \geqslant m_0, \qquad x_n \ = \ \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n,$$

où $Q_1, Q_2, \ldots, Q_d$ sont des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $\forall k \in [\![1,\, d]\!],\ \deg Q_k < m_k$.

## II. Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

**Partie A.**

**1°)** – Soit $x$ un élément de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$. Alors la suite $\sigma(x) = \big(x_{n+1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que $x$ et, par une récurrence immédiate, on a $\forall k \in [\![0,\, p{-}1]\!],\ \sigma^k(x) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Si $\big(\sigma^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$ n'était pas une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$, cela signifierait (puisque $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$) qu'il existe des scalaires non tous nuls $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k\sigma^k(x) = 0$. Le polynôme non nul $\sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ serait un polynôme caractéristique de $x$, ce qui contredit la minimalité de $p$.

– Si $n \leqslant p$, alors $\big(\sigma^k(x)\big)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ est libre comme sous-famille d'une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$, donc de rang $n$.

– Si $n > p$, alors $\left(\sigma^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une partie génératrice de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ (comme sur-famille d'une base), donc est de rang $p$ vu que $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$.

**2°)** – Une suite de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ étant entièrement déterminée par ses $p$ premiers termes, il en existe au plus une dont les $n$ premiers termes $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ (avec $n \geqslant p$) sont connus : l'application $\varphi_n$ est donc injective.

– Le rang de la matrice $H_n(x)$ est égal à celui de la famille de ses vecteurs lignes, c'est-à-dire à celui de $\left(\varphi_n(x), \varphi_n(\sigma(x)), \ldots, \varphi_n(\sigma^{n-1}(x))\right)$. Dans le cas où $n \geqslant p$, ce rang vaut $p$ étant donné que $\left(x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{n-1}(x)\right)$ est de rang $p$ et que l'application linéaire $\varphi_n$ est injective.

### B. Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

**1°)** Il résulte directement du **II.A.2°)** que la suite $\left(\mathrm{rg}\,(H_n(x))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ devient stationnaire précisément à partir de l'ordre minimal de $x$. Comme $\mathrm{rg}\,(H_m(x)) = p$, l'élément $x$ est d'ordre minimal $p$.
En particulier, la matrice $H_{p+1}(x)$ de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{K})$ étant de rang $p$, son noyau est une droite vectorielle d'après le théorème du rang. De plus, un vecteur directeur $(b_0, b_1, \ldots, b_p)$ de cette droite ne peut pas vérifier $b_p = 0$ car sinon $(b_0, b_1, \ldots, b_{p-1})$ serait un vecteur non nul du noyau de $H_p(x)$, ce qui est impossible vu que cette matrice est inversible.
Quitte à diviser par $b_p$, on peut enfin se ramener à $b_p = 1$.

**2°)** Dire que $(b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}, 1)$ appartient au noyau de $H_{p+1}(x)$ se traduit par l'égalité

$$b_0\varphi_{p+1}(x) \;+\; b_1\varphi_{p+1}(\sigma(x)) \;+\; \cdots \;+\; b_{p-1}\varphi_{p+1}(\sigma^{p-1}(x)) \;+\; \varphi_{p+1}(\sigma^p(x)) \;=\; 0.$$

L'injectivité de $\varphi_{p+1}$ entraîne alors que $b_0 x + b_1\sigma(x) + \cdots + b_{p-1}\sigma^{p-1}(x) + \sigma^p(x) = 0$ et $B(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{p-1}X^{p-1} + X^p$ est ainsi un polynôme caractéristique de $x$, donc son polynôme minimal car $J_x$ contient un unique polynôme unitaire de degré $p$.

### C. Étude d'un exemple

**1°)** La procédure suivante, en langage Maple, renvoie la liste des $x_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$ :

```
suiterec := proc (n)
local k, x;
x[0] := 1; x[1] := 1; x[2] := 1; x[3] := 0;
for k from 0 to n
do
print(x[k]);
x[k+4] := x[k+3]-2*x[k+1]
end do
end proc
```

**2°)** La suite $x$ étant d'ordre minimal $p \leqslant 4$, la suite $\left(\mathrm{rg}\,(H_n)\right)_{n \geqslant 4}$ est constante d'après le **II.A.2°)**. Il suffit donc de calculer $\mathrm{rg}\,(H_n)$ pour $n \leqslant 4$ pour répondre à la question.
De manière immédiate, $\mathrm{rg}\, H_0(x) = 1$ et $\mathrm{rg}\, H_1(x) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$.
On vérifie de plus, en utilisant par exemple la méthode du pivot, que $\mathrm{rg}\, H_2(x) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3$
et que $\mathrm{rg}\, H_3(x) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} = 3$.
En conclusion, $\mathrm{rg}\, H_0(x) = \mathrm{rg}\, H_1(x) = 1$ et $\forall n \geqslant 3,\ \mathrm{rg}\, H_n(x) = 3$.

**3°)** La méthode du pivot, une calculatrice performante ou un peu de bricolage montrent que $(0, 2, -2, 1)$ appartient au noyau de $H_3(x)$. Comme $p = 3$, la question **II.B.2°)** implique que $x$ a pour polynôme minimal $B(X) = 2X - 2X^2 + X^3$.

**4°)** En se plaçant sur $\mathbb{C}$, le polynôme $B$ est scindé à racines simples et on trouve $B(X) = X(X-\lambda)(X-\mu)$ avec $\lambda = 1+i$ et $\mu = 1-i$. D'après le **I.D.**, il existe $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \geqslant 1,\ x_n = a\lambda^n + b\mu^n$.
On détermine $a$ et $b$ grâce aux conditions initiales, c'est-à-dire en résolvant le système $\begin{cases} \lambda a + \mu b = 1 \\ \lambda^2 a + \mu^2 b = 1 \end{cases}$, ce qui donne après calculs : $a = \dfrac{1-i}{4}$ et $b = \dfrac{1+i}{4}$.
Comme $(1+i)(1-i) = 2$, on obtient : $\forall n \geqslant 1,\ x_n = \dfrac{1}{2}\big((1+i)^n + (1-i)^n\big)$.

**5°)** On observe que changer la valeur de $x_0$ ne modifie pas les termes suivants : on a donc toujours $x_n = \dfrac{1}{2}\big((1+i)^n + (1-i)^n\big)$ pour $n \geqslant 1$ et on remarque de plus que $\forall n \geqslant 1,\ 2x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = 0$.
L'expression de $x_n$ montre que l'ordre de la nouvelle suite $x$ vaut soit $2$ soit $3$ et que son polynôme minimal est soit le polynôme $B(X)$ du **II.C.3°)** soit le polynôme $(X-\lambda)(X-\mu) = 2 - 2X + X^2$.
Or, en prenant $x_0 = \dfrac{1}{2}$, la relation $2x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$ est également vérifiée si bien que la relation de récurrence minimale de $x$ est donnée par $\forall n \in \mathbb{N},\ 2x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = 0$.

## III. Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

### A. Préliminaires

**1°)** Toute matrice de Hankel est symétrique réelle donc diagonalisable dans $O(n)$ d'après le théorème spectral. En particulier, elle admet $n$ valeurs propres réelles comptées avec leurs multiplicités.

**2°)** Si $(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$ était le $n$-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille $n$, alors $\lambda$ en serait l'unique valeur propre. Come $M$ est diagonalisable, on aurait $M \sim \lambda I_n$, d'où $M = \lambda I_n$ vu que $P^{-1}.\lambda I_n.P = \lambda I_n$ pour tout $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.
Or, pour $\lambda \neq 0$ et $n \geqslant 3$, la matrice $\lambda I_n$ ne peut pas être une matrice de Hankel, ce qui apporte une contradiction.

### B. Une première condition nécessaire

**1°)** – La matrice $H(a)$ étant diagonalisable, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ en représente la trace, d'où l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{2k}$.
– De même, la matrice $\big(H(a)\big)^2$ est diagonalisable, de valeurs propres égales à $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$, donc $\operatorname{tr}\big(H(a)\big)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.
Or le $i$-ième terme diagonal de $\big(H(a)\big)^2$ est donné par $b_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i+j-2}^2$ d'où

$$\operatorname{tr}\big(H(a)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i+j-2}^2.$$

Il en ressort que $\operatorname{tr}\big(H(a)\big)^2 = \sum\limits_{k=0}^{2n-2} \alpha_k a_k^2$, où $\alpha_k$ désigne le nombre de manières d'écrire l'entier $k$ sous la forme $i+j-2$ avec $i, j \in [\![1,\, n]\!]$. À l'aide d'une figure, $\alpha_k$ peut être vu comme le nombre de points à coordonnées entières du carré $[1,n] \times [1,n]$ sur une droite parallèle à la diagonale non principale de celui-ci. Un dénombrement élémentaire conduit alors à $\alpha_k = k+1$ si $k \in [\![0,\, n-1]\!]$ et $\alpha_k = 2n-k-1$ si $k \in [\![n,\, 2n-2]\!]$.
On peut ainsi conclure sur la formule $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k^2 + \sum\limits_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2$.

**2°)** En utilisant les expressions des $v_i$ et des $w_i$ selon la position de $i$ par rapport à $p$,

$$< v\,,\, w > = \sum_{i=1}^{p} a_{2(i-1)} + \sum_{i=p+1}^{n} a_{2(i-1)} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

De même,
$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{p}(2i-1)a_{2(i-1)}^2 + \sum_{i=p+1}^{n}(2n-2i+1)a_{2(i-1)}^2$$
d'où, par une majoration grossière,
$$\|v\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{2p-2}(k+1)a_k^2 + \sum_{k=2p}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2.$$
– Si $n=2p$, on obtient directement $\|v\|^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ grâce au **III.B.1°)** en majorant $\sum\limits_{k=0}^{2p-2}(k+1)a_k^2$ par $\sum\limits_{k=0}^{2p-1}(k+1)a_k^2$.

– Si $n=2p-1$, on procède de même en majorant $\sum\limits_{k=2p}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2$ par $\sum\limits_{k=2p-1}^{2n-2}(2n-k-1)a_k^2$.

Ceci permet de conclure sur l'inégalité $\|v\|^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2$.

**3°)** Par symétrie des rôles de $i$ et $j$,
$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)^2,$$
soit
$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = \sum_{i=1}^{n}\Big[n\lambda_i^2 - 2\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\Big]$$
ou encore
$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\lambda_j + n\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - 2\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)^2,$$
ce qui donne finalement $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 = n\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i^2 - <v\,,\,w>$ d'après **III.B.1°)** et **III.B.2°)**.

Enfin, en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $<v\,,\,w>^2 \leqslant \|v\|^2\,.\,\|w\|^2$ et, en reportant dans l'inégalité précédente, il vient
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2 \geqslant K_n\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

**4°)** Si $n=3$, alors $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_j)^2$ vaut
$$\big(\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2\big) + \big(\lambda_1^2-2\lambda_1\lambda_3+\lambda_3^2\big) + \big(\lambda_2^2-2\lambda_2\lambda_3+\lambda_3^2\big),$$
soit $2\big(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\lambda_3\big)$, tandis que
$$K_3 = 3 - \big(1+\frac{1}{3}+1\big) = \frac{2}{3}.$$
L'inégalité (III.1) équivaut alors à
$$2\big(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\big) \geqslant 3.\big(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\big).$$

### C. D'autres conditions nécessaires

**1°)** La matrice $B$ n'ayant que trois termes non nuls, $B-X.I_n$ possède $n-3$ colonnes dont le seul terme non nul, situé sur la diagonale principale, est $-X$. En développant successivement $\det(B-X.I_n)$ suivant ces colonnes, on obtient
$$\det(B-X.I_n) = (-X)^{n-3}.\begin{vmatrix}-X & 0 & 1\\ 0 & -2-X & 0\\ 1 & 0 & -X\end{vmatrix},$$
ce qui amène à $\det(B-X.I_n) = (-1)^n.X^{n-3}(X+2)(X+1)(X-1)$.

Le spectre ordonné de $B$ est donc $(1,0,0,\dots,0,-1,-2)$.

**2°)** D'après le résultat (III.2) admis dans cette partie,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_{n+1-i} \ \leqslant \ \mathrm{tr}\,(MB) \ \leqslant \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i,$$

où $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ désigne ici le spectre ordonné de $B$. Les calculs du **III.C.1°)** donnent alors

$$-2\lambda_1 \ - \ \lambda_2 \ + \ \lambda_n \ \leqslant \ \mathrm{tr}\,(MB) \ \leqslant \ \lambda_1 \ - \ \lambda_{n-1} \ - \ 2\lambda_n.$$

Or $\mathrm{tr}\,(MB) = a_{2p-2} - 2a_{2p-2} + a_{2p-2} = 0$ (en calculant les trois seuls termes diagonaux non nuls de $MB$), ce qui conduit aux deux inégalités demandées.

## D. Un exemple

**1°)** On commence par remarquer que $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c \\ 0 \\ a-c \end{pmatrix}$ donc $a-c$ est valeur propre de la matrice $M$.

En explicitant le polynôme caractéristique de $M$ et en effectuant la division euclidienne par $X-(a-c)$, on trouve, après un calcul un peu fastidieux :

$$\chi_M(X) \ = \ \big(X - (a-c)\big).\big(X^2 - (a+2c)X + c^2 + ab - 2b^2\big).$$

Les deux autres valeurs propres de $M$ (nécessairement réelles car $M$ est symétrique réelle) sont les racines du trinôme $X^2 - (a+2c)X + c^2 + ab - 2b^2$, soit

$$c \ + \ \frac{1}{2}a \ \pm \ \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 8b^2}.$$

**2°)** Cherchons $a$, $b$, $c$ (avec $b \geqslant 0$) tels que

$$\lambda_1 \ = \ c \ + \ \frac{1}{2}a \ + \ \frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b^2}, \qquad \lambda_2 \ = \ a - c \qquad \text{et} \qquad \lambda_3 \ = \ c \ + \ \frac{1}{2}a \ - \ \frac{1}{2}\sqrt{a^2+8b^2} \qquad (*).$$

Par substitution, ce système (d'inconnues $a$, $b$, $c$) équivaut à

$$2a \ + \ c \ = \ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \qquad a \ + \ 2c \ = \ \lambda_1 - \lambda_3 \qquad \text{et} \qquad \sqrt{a^2+8b^2} \ = \ \lambda_1 - \lambda_3.$$

Les deux premières équations conduisent à

$$a \ = \ \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3}{3} \qquad \text{et} \qquad c \ = \ \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{3}$$

et, comme $\lambda_1 \geqslant \lambda_3$, la troisième équation équivaut à $a^2 + 8b^2 = (\lambda_1 - \lambda_3)^2$ soit, en réinjectant, à

$$8b^2 \ = \ (\lambda_1 - \lambda_3)^2 \ - \ \frac{1}{9}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2.$$

Or $(2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3).(\lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3) \geqslant 0$ et on vérifie, en développant chacune des deux expressions, que cette inégalité est équivalente au fait que $(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \dfrac{1}{9}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2$ soit positif.

Il existe donc une solution (d'ailleurs unique) $(a,\, b,\, c)$ du système $(*)$ telle que $b \geqslant 0$, donnée par

$$a \ = \ \frac{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3}{3}, \qquad b \ = \ \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_3)^2 - \frac{1}{9}(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)^2} \qquad \text{et} \qquad c \ = \ \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{3}.$$

**3°)** – La condition (III.3) est ainsi une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice de Hankel de spectre ordonné $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ dans le cas $n = 3$.

– Pour le triplet $(\lambda, 1, 1)$ (avec $\lambda \geqslant 1$), la condition (III.1) équivaut à $2(\lambda^2 + 2) \geqslant 3(2\lambda + 1)$, c'est-à-dire à $2\lambda^2 - 6\lambda + 1 \geqslant 0$. Cette condition est notamment remplie (avec égalité d'ailleurs) lorsque $\lambda = \dfrac{3+\sqrt{7}}{2}$, valeur qui ne vérifie pas en revanche l'inégalité $\lambda - 3 \geqslant 0$ déduite du (III.3).

La condition (III.1) n'est donc pas suffisante pour que $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ soit le spectre ordonné d'une matrice de Hankel d'ordre 3.