

I. Produit de convolution

A. Généralités

1°) a) Si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ alors, à x fixé, la fonction $\varphi_x : t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue et majorée en module par l'application intégrable $t \mapsto \|g\|_\infty \cdot |f(t)|$: l'expression $(f * g)(x)$ a donc un sens et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|(f * g)(x)| \leq \|g\|_\infty \cdot \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$, soit $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_\infty$.

b) Observons que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|\varphi_x(t)| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(x-t)|^2)$. Si f et g appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, alors $t \mapsto g(x-t)$ est de carré intégrable car un changement de variable affine conserve l'intégrabilité, et il en résulte que $(f * g)(x)$ est à nouveau bien défini. De plus, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |(f * g)(x)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \times \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^2 dt,$$

soit $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$.

2°) Par le changement de variable affine, $u = x - t$, on obtient directement $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u) du$, ce qui conduit à l'égalité $f * g = g * f$ dès que $f * g$ est bien défini.

3°) En supposant f et g à support compact, il existe $A \geq 0$ et $B \geq 0$ tels que f et g soient nulles en dehors de $[-A, A]$ et $[-B, B]$ respectivement. Si $|x| > A + B$ alors, par inégalité triangulaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a soit $|t| > A$, soit $|x - t| > B$, donc dans tous les cas $f(t)g(x-t) = 0$: l'application $f * g$ est donc à support compact inclus dans $[-A - B, A + B]$.

B. Produit de convolution de deux éléments de $L^2(\mathbb{R})$

1°) L'application h est uniformément continue si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |x - y| \leq \eta \implies |h(x) - h(y)| \leq \varepsilon$$

ou, de manière équivalente, si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in [-\eta, \eta], |h(x-\alpha) - h(x)| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\|T_\alpha(h) - h\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $\alpha \in [-\eta, \eta]$.

h est donc uniformément continue si et seulement si $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(h) - h\|_\infty = 0$.

2°) $\forall x \in \mathbb{R}, T_\alpha(f * g)(x) = (f * g)(x-\alpha) = (g * f)(x-\alpha) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-\alpha-t) dt$, soit $T_\alpha(f * g) = g * T_\alpha(f) = T_\alpha(f) * g$.

3°) Pour tout x réel, $T_\alpha(f * g)(x) - (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(t-\alpha) - f(t))g(x-t) dt$. Les fonctions $t \mapsto f(t-\alpha) - f(t)$ et $t \mapsto g(x-t)$ étant de carré intégrable, l'inégalité de Schwarz donne alors

$$|T_\alpha(f * g)(x) - (f * g)(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t-\alpha) - f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \times \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^2 dt \right)^{1/2},$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |T_\alpha(f * g)(x) - (f * g)(x)| \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2,$$

ce qui conduit à l'inégalité $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leq \|T_\alpha(f) - f\|_2 \times \|g\|_2$.

4°) Si f est continue à support compact, alors elle est uniformément continue sur \mathbb{R} (c'est une conséquence facile du théorème de Heine en se plaçant sur un compact du type $[-A - 1, A + 1]$, où $[-A, A]$ contient le support de f).

D'après le **I.B.1°**), on a alors $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f) - f\|_\infty = 0$. Or, avec les notations précédentes, $\int_{\mathbb{R}} |T_\alpha(f) - f|^2 = \int_{-A-\alpha}^{A+\alpha} |f(x-\alpha) - f(x)|^2 dx$ et cette quantité est majorée par $(2A + 2) \|T_\alpha(f) - f\|_\infty^2$ dès que $|\alpha| \leq 1$. Par suite, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f) - f\|_2 = 0$ d'où, en utilisant **I.B.3°**), $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty = 0$, ce qui traduit bien l'uniforme continuité de $f * g$.

5°) Remarquons que l'ensemble des fonctions à support compact de $L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. En effet, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et si ε est un réel strictement positif donné, on peut trouver $A > 0$ tel que $\int_{-\infty}^{-A} |f|^2 + \int_A^{+\infty} |f|^2 \leq \varepsilon^2$. Posons $M = \sup\{|f(x)|, x \in [-A, A]\}$ et appelons \tilde{f} l'application définie par

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{sur} \quad \left[-A - \frac{\varepsilon^2}{2M^2}, A + \frac{\varepsilon^2}{2M^2}\right], \quad f(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R} \setminus [-A, A]$$

et prolongée par continuité de manière affine sur \mathbb{R} . Alors, $\|f - \tilde{f}\|_\infty \leq 2M$ d'où $\|f - \tilde{f}\|_2^2 \leq 2 \frac{\varepsilon^2}{2M^2} \times 4M^2 = 4\varepsilon^2$, ce qui montre bien que toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ peut être approchée d'aussi près qu'on veut par une fonction \tilde{f} de $L^2(\mathbb{R})$ à support compact.

Avec les notations précédentes,

$$\|T_\alpha(f) - f\|_2 \leq \|T_\alpha(f) - T_\alpha(\tilde{f})\|_2 + \|T_\alpha(\tilde{f}) - \tilde{f}\|_2 + \|\tilde{f} - f\|_2.$$

Or $\|T_\alpha(f) - T_\alpha(\tilde{f})\|_2 = \|\tilde{f} - f\|_2 \leq 2\varepsilon$ et, d'après le **I.B.4°**), $\|T_\alpha(\tilde{f}) - \tilde{f}\|_2$ peut être rendu inférieur à ε pourvu que α soit suffisamment petit. On a alors $\|T_\alpha(f * g) - f * g\|_\infty \leq 5\varepsilon \|g\|_2$ (toujours pour α suffisamment petit), ce qui établit que $f * g$ est uniformément continue dans le cas général.

C. Continuité, dérivabilité, séries de Fourier

1°) a) Vérifions les hypothèses du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre.

Soit h la fonction numérique définie par $\forall(x, t) \in \mathbb{R}^2, h(x, t) = f(t)g(x-t)$.

– À x fixé, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} ;

– à t fixé, l'application $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ;

– (hypothèse de domination) $\forall(x, t) \in \mathbb{R}^2, |h(x, t)| \leq \|g\|_\infty \cdot |f(t)|$ avec $|f|$ intégrable sur \mathbb{R} .

On peut alors conclure que $f * g$ est continue sur \mathbb{R} .

b) Reprenons la définition de l'uniforme continuité :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad / \quad \forall u, v \in \mathbb{R}, \quad |u - v| \leq \eta \implies |g(u) - g(v)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, si $|x - y| \leq \eta$, alors $\forall t \in \mathbb{R}, |g(x-t) - g(y-t)| \leq \varepsilon$, d'où

$$|(f * g)(x) - (f * g)(y)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \cdot \varepsilon \, dt = \|f\|_\infty \varepsilon,$$

ce qui traduit l'uniforme continuité de $f * g$.

2°) Vérifions à présent les hypothèses du théorème de Leibniz itéré sur la dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre. Avec les notations du **I.C.1°**),

– à x fixé, les applications $t \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t) = f(t)g^{(p)}(x-t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} pour tout $p \in \llbracket 0, k \rrbracket$;

– à t fixé, l'application $x \mapsto \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ;

– (hypothèse de domination) $\forall(x, t) \in \mathbb{R}^2, \left| \frac{\partial^p h}{\partial x^p}(x, t) \right| \leq \|g^{(p)}\|_\infty \cdot |f(t)|$ avec $|f|$ intégrable sur \mathbb{R} .

Le théorème de Leibniz garantit alors que $f * g$ est de classe \mathcal{C}^k et de plus

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)^{(p)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g^{(p)}(x-t).$$

3°) a) Le théorème s'énonce de la manière suivante : si f est une fonction continue, 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément sur \mathbb{R} et sa somme est égale à f .

b)– Si g est 2π -périodique, alors $\forall x \in \mathbb{R}, (f * g)(x+2\pi) = (g * f)(x+2\pi) = (g * f)(x)$ par un simple report dans l'intégrale, donc $f * g$ est également 2π -périodique.

– De plus, toute fonction 2π -périodique continue étant bornée sur \mathbb{R} , le **I.C.1°**) nous indique que $f * g$ est continue. En outre, $f * g$ est même de classe \mathcal{C}^1 en vertu du **I.C.2°**).

D'après le théorème rappelé au **a**), $f * g$ est somme de sa série de Fourier sur \mathbb{R} et la limite est même uniforme.

– Enfin, le n -ième coefficient de Fourier $c_n(f * g)$ (avec $n \in \mathbb{Z}$) est donné par

$$c_n(f * g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) \, dt \right) e^{-inx} \, dx.$$

Or l'application $F : (x, t) \mapsto \frac{1}{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx}$ satisfait les hypothèses du théorème de Fubini sur les intégrales doubles. En effet,

- F est continue sur $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$;
- à x fixé, $t \mapsto F(x, t) dt$ est intégrable sur \mathbb{R} ;
- l'application $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x, t) dt$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 2\pi]$.

On a donc $c_n(f * g) = \iint_{[0, 2\pi] \times \mathbb{R}} F(x, t) dt dx$.

De plus, comme à $t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $[0, 2\pi]$, que (facilement) $t \mapsto \int_0^{2\pi} F(x, t) dx$ est continue et que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left| \int_0^{2\pi} F(x, t) dx \right| \leq \|g\|_{\infty} \cdot |f(t)|$, le théorème de Fubini s'applique aussi en changeant l'ordre des intégrations, d'où

$$c_n(f * g) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)e^{-inx} dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \left(f(t)e^{-int} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-in(x-t)} dx \right) dt.$$

Or, par changement de variable affine (et 2π -périodicité de g), $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-t)e^{-in(x-t)} dx = c_n(g)$, ce qui conduit à la formule

$$c_n(f * g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-int} dt \times c_n(g).$$

D. Approximation de l'unité

1°) Soit x un réel fixé et α un réel strictement positif donné. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(f * \delta_n)(x) - f(x) = (\delta_n * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} \delta_n(t)(f(x-t) - f(x)) dt.$$

La continuité de f au point x garantit l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $|f(x-t) - f(x)| \leq \alpha$. Par inégalité triangulaire et positivité de l'intégrale, on a alors

$$|(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha \delta_n(t) dt + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt.$$

Or $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt \leq 2 \|f\|_{\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(t) dt$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt = 0$ en utilisant

la définition d'une approximation de l'unité. De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \delta_n(t)|f(x-t) - f(x)| dt = 0$ et on peut donc

trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leq 2\alpha + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \alpha \delta_n(t) dt$, d'où $|(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leq 3\alpha$

vu que δ_n est positive et que $\int_{\mathbb{R}} \delta_n = 1$.

Ceci montre, qu'à x fixé, la suite de terme général $(f * \delta_n)(x)$ converge vers $f(x)$, ce qui traduit bien la convergence simple de la suite de fonctions $(f * \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f .

2°) Si f est continue à support compact, alors f est uniformément continue sur \mathbb{R} . En particulier, α étant à nouveau un réel strictement positif donné, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $|f(x-t) - f(x)| \leq \alpha$.

La suite du raisonnement est ensuite identique à celui du **I.D.1°**) : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|(f * \delta_n)(x) - f(x)| \leq 3\alpha$, mais le caractère uniforme de ε par rapport à la variable x montre que la suite de fonctions $(f * \delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge cette fois uniformément vers f .

3°) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est clairement positive, à support compact et continue par morceaux (et même continue si $n \geq 1$).

$$\text{De plus, } \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt = 1.$$

Montrons que si ε est un réel strictement positif donné (avec $\varepsilon < 1$ sinon ce qui suit est trivial), alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t) dt = 0.$$

Une minoration évidente fournit déjà $\lambda_n \geq (1-\varepsilon) \cdot (1-\varepsilon^2)^n$ et il en résulte que

$$\forall t \in [-1, -\varepsilon[, \quad |h_n(t)| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{1-t^2}{1-\varepsilon^2} \right)^n.$$

La suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction nulle sur $[-1, -\varepsilon[$ et, $|h_n|$ étant majorée par la fonction constante égale à $\frac{1}{1-\varepsilon}$ intégrable sur cet intervalle, on déduit du théorème de convergence dominée que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1}^{-\varepsilon} h_n(t) dt = 0$. Enfin, h_n étant nulle sur $] -\infty, -1[$, on a bien $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} h_n(t) dt = 0$. On procéderait de même avec $\int_{-\varepsilon}^{+\infty} h_n(t) dt$, ce qui montre que $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.

b)– Si f est continue à support compact inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, alors $f * h_n$ est continue à support compact inclus dans $[-\frac{1}{2} - 1, \frac{1}{2} + 1] = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ d'après les questions **I.C.1°** et **I.A.3°**).

– De plus, $\forall x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $(f * h_n)(x) = (h_n * f)(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{-1/2}^{1/2} f(t)(1 - (x-t)^2)^n dt$ (vu que $x-t$ appartient à $[-1, 1]$ pour tous $x, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$). En développant $(1 - (x-t)^2)^n$ selon les puissances de x , il est clair que $(f * h_n)(x)$ s'exprime comme un polynôme en x sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

c)– Soit f une fonction à valeurs complexes continue sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} avec $-\frac{1}{2} < a < b < \frac{1}{2}$. On peut alors prolonger f sur \mathbb{R} en une fonction continue \tilde{f} à support compact inclus dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (par un simple prolongement affine entre $-\frac{1}{2}$ et a , et entre b et $\frac{1}{2}$). Cette nouvelle fonction \tilde{f} satisfait les hypothèses du **I.D.** donc $(\tilde{f} * h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers \tilde{f} sur \mathbb{R} donc vers f sur $[a, b]$.

– Enfin, si a et b sont quelconques, on se ramène au cas précédent par une transformation affine sur la variable en remarquant que si θ est une fonction affine non constante, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur un intervalle I si et seulement si $(g_n \circ \theta)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ \theta$ sur $\theta^{-1}(I)$ et que P est polynomiale sur I si et seulement si $P \circ \theta$ est polynomiale sur $\theta^{-1}(I)$.

Le théorème de Weierstrass s'ensuit alors dans sa généralité.

4°) S'il existait une fonction $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g = f$, on aurait en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n * g = \delta_n$. Or la suite de fonctions $(\delta_n * g)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers g d'après **I.D.1°**) alors que la suite de fonctions $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne saurait converger simplement vu que $h_n(0) = \frac{1}{\lambda_n}$ et qu'on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$ (en majorant par exemple $(1 - t^2)^n$ par $(1 - |t|)^n$ dans l'intégrale).

En conclusion, il n'existe pas de fonction $g \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$, $f * g = f$.

II. Transformée de Fourier

Partie A.

Vérifions à nouveau les hypothèses du théorème de continuité pour les intégrales dépendant d'un paramètre.

Soit h la fonction numérique définie par $\forall(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $h(x, t) = f(t)e^{ixt}$.

- À x fixé, l'application $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} ;
- à t fixé, l'application $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} ;
- (hypothèse de domination) $\forall(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $|h(x, t)| \leq |f(t)|$ avec $|f|$ intégrable sur \mathbb{R} .

La transformée de Fourier \hat{f} de f est donc continue sur \mathbb{R} .

– Enfin, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\hat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt$ donc \hat{f} est bornée sur \mathbb{R} .

B. Transformée de Fourier d'un produit de convolution

1°) a)– f et g étant continues et intégrables avec g bornée, le **I.C.1°) a)** montre que $f * g$ est continue. Une fonction étant intégrable si et seulement si son module l'est, $|f| * |g|$ a un sens et, de manière immédiate, $|f * g| \leq |f| * |g|$, l'application $|f| * |g|$ étant également continue sur \mathbb{R} .

Il en ressort que, pour tout $A \in \mathbb{R}^+$,

$$\int_{-A}^A |f * g|(x) dx \leq \int_{-A}^A (|f| * |g|)(x) dx = \int_{-A}^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |g(x-t)| dt \right) dx.$$

La fonction $(x, t) \mapsto |f(t)| \cdot |g(x-t)|$ étant continue et positive sur $D = [-A, A] \times \mathbb{R}$, l'intégrale double $\iint_D |f(t)| \cdot |g(x-t)| dt dx$ est bien définie et est donnée par l'expression ci-dessus.

Comme $t \mapsto \int_{-A}^A |f(t)| \cdot |g(x-t)| dx$ est elle-même continue sur \mathbb{R} , le théorème de Fubini pour les fonctions positives entraîne que $\iint_D |f(t)| \cdot |g(x-t)| dt dx$ vaut aussi $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-A}^A |f(t)| \cdot |g(x-t)| dx \right) dt$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-A}^A |f(t)| \cdot |g(x-t)| dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(\int_{-A}^A |g(x-t)| dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \left(\int_{-A-t}^{A-t} |g(y)| dy \right) dt.$$

Or $\int_{-A-t}^{A-t} |g(y)| dy \leq \|g\|_1$, ce qui montre que $\int_{-A}^A |f * g|(x) dx$ est majorée par la constante $\|f\|_1 \times \|g\|_1$ et, par conséquent, que $f * g$ est intégrable sur \mathbb{R} .

– Appliquons à nouveau le théorème de Fubini, cette fois pour les fonctions sans valeurs absolues.

L'application $(x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, de même que $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$. Comme $f * g$ est intégrable sur \mathbb{R} , on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt dx.$$

De plus, $t \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dx = f(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} g(y) dy$ est continue et intégrable sur \mathbb{R} donc, d'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(f(t) \cdot \int_{\mathbb{R}} g(y) dy \right) dt = \int_{\mathbb{R}} f \times \int_{\mathbb{R}} g.$$

b) x désignant un réel fixé, les applications \tilde{f} et \tilde{g} définies par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(t) = f(t)e^{-ixt} \quad \text{et} \quad \tilde{g}(t) = g(t)e^{-ixt}$$

sont continues et intégrables sur \mathbb{R} et \tilde{g} est bornée. D'après le **a)**, $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f} * \tilde{g} = \int_{\mathbb{R}} \tilde{f} \times \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}$.

Or $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(t) dt = \hat{f}(x)$, $\int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t) dt = \hat{g}(x)$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f} * \tilde{g} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-ixt} g(y-t)e^{-ix(y-t)} dy \right) dt = \int_{\mathbb{R}} (f * g)(y)e^{-ixy} dy = \widehat{f * g}(x).$$

Par suite, $\widehat{f * g} = \hat{f} \times \hat{g}$.

2°) Un contre-exemple

Soit f l'application paire, nulle sur $[0, 2]$ et définie sur chaque intervalle de la forme $[n, n+1]$ (avec n entier tel que $n \geq 2$) par :

$$f(n) = 0, \quad \forall t \in \left[n + \frac{1}{n^3}, n + \frac{2}{n^3} \right], \quad f(t) = n, \quad \forall t \in \left[n + \frac{3}{n^3}, n+1 \right], \quad f(t) = 0,$$

et prolongée par continuité de manière affine entre n et $n + \frac{1}{n^3}$ ainsi qu'entre $n + \frac{2}{n^3}$ et $n + \frac{3}{n^3}$.

Alors f est continue par construction et est de plus intégrable sur \mathbb{R} étant donné qu'elle est positive, paire et que $\forall n \geq 2, \int_n^{n+1} f(t) dt = \frac{2}{n^2}$, terme général d'une série convergente.

En prenant $g = f$, la quantité $(f * g)(0)$ n'est toutefois pas définie. En effet, $f(t)g(-t) = n^2$ sur $\left[n + \frac{1}{n^3}, n + \frac{2}{n^3} \right]$ donc $\int_n^{n+1} f(t)g(-t) dt \geq \frac{1}{n^3} \times n^2 = \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, ce qui montre que l'application positive $t \mapsto f(t)g(-t)$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$, donc que $(f * g)(0)$ n'est pas défini.

C. Sinus cardinal

1°) Par définition, $\hat{k}_n(x) = \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|t|}{n} \right) e^{-ixt} dt = \int_{-n}^n e^{-ixt} dt - \int_0^n \frac{t}{n} e^{-ixt} dt + \int_{-n}^0 \frac{t}{n} e^{-ixt} dt$ soit, après transformation par changement de variable $t := -t$ dans la dernière intégrale :

$$\hat{k}_n(x) = \int_{-n}^n e^{-ixt} dt - \frac{2}{n} \int_0^n t \cos(xt) dt.$$

– Si $x \neq 0$, une intégration par parties fournit

$$\hat{k}_n(x) = \frac{2 \sin(nx)}{x} - \frac{2n \sin(nx)}{nx} + \frac{2}{nx^2}(1 - \cos(nx)),$$

expression qui se simplifie en $\hat{k}_n(x) = n\varphi\left(\frac{nx}{2}\right)$.

– Si $x = 0$, un calcul direct donne $\hat{k}_n(0) = n = n\varphi(0)$, ce qui peut servir à contrôler le calcul ci-dessus étant donné que la fonction \hat{k}_n doit être continue d'après le **II.A**.

2°) L'application φ est continue donc localement intégrable sur \mathbb{R} . De plus, $\varphi(x) = O_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$, avec $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ intégrable au voisinage de $+\infty$. Comme φ est de plus paire, on en déduit qu'elle est intégrable sur \mathbb{R} .

3°) – Pour tout $n \geq 1$, l'application K_n est continue et intégrable sur \mathbb{R} et, par changement de variables :

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x) dx = \frac{n}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy = 1.$$

De même, si ε est un réel strictement positif donné,

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} K_n(x) dx = \frac{n}{2\pi} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi\left(\frac{nx}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{n\varepsilon/2}^{+\infty} \varphi(y) dy$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\varepsilon}{2} = +\infty$.

On procède de même pour $\int_{-\infty}^{-\varepsilon} K_n(x) dx$, ce qui montre que $(K_n)_{n \geq 1}$ est une approximation de l'unité.

D. Inversion de Fourier

1°) Observons pour commencer que, \hat{f} étant continue, $I_n(t)$ a bien un sens en tant qu'intégrale de Riemann sur le segment $[-n, n]$ et on a

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} k_n(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{ixy} dy \right) e^{-itx} dx.$$

L'application $(x, y) \mapsto k_n(x)f(y)e^{ix(y-t)}$ étant continue, ainsi que $x \mapsto k_n(x) \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) e^{ixy} dy \right) e^{-itx}$, le théorème de Fubini montre que

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x) f(y) e^{ix(y-t)} dy \right) dx = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} k_n(x) f(y) e^{ix(y-t)} dy dx.$$

De même, $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} k_n(x) f(y) e^{ix(y-t)} dx = f(y) \int_{\mathbb{R}} k_n(x) e^{ix(y-t)} dx$ est continue (en appliquant comme on l'a déjà fait le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre) et est de plus intégrable sur \mathbb{R} du fait f est intégrable et que $\left| \int_{\mathbb{R}} k_n(x) e^{ix(y-t)} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} k_n = n$.

Le théorème de Fubini s'applique une fois de plus et on peut écrire, en échangeant l'ordre des intégrations :

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}} k_n(x) e^{i(y-t)x} dx \right) dy,$$

soit finalement

$$I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \hat{k}_n(t-y) dy = (f * K_n)(t).$$

2°) – La suite $(K_n)_{n \geq 1}$ étant une approximation de l'unité, le **I.D.1°)** assure, qu'à t fixé, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f * K_n)(t) = f(t)$.

– Par ailleurs, la suite de fonctions continues $(j_n)_{n \geq 1}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R}, j_n(x) = \frac{1}{2\pi} k_n(x) \hat{f}(-x) e^{-itx}$ converge simplement vers la fonction (continue elle aussi) $j : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \hat{f}(-x) e^{-itx}$ et on a l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, |j_n(x)| \leq \frac{1}{2\pi} |\hat{f}(-x)|$ avec \hat{f} intégrable sur \mathbb{R} . D'après le théorème de convergence dominée, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-x) e^{-itx} dx$, soit encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx$ à l'aide du changement de variables $x := -x$.

Par unicité de la limite, on peut donc conclure sur la formule d'inversion de Fourier $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{itx} dx$.

III. Convolution et dimension finie

Partie A.

- 1°) L'application φ qui, à toute fonction g de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ associe φ_g , est clairement linéaire de $L^1(\mathbb{R})$ dans $(L^1(\mathbb{R}))^*$. Montrons que φ est injective : pour cela, il suffit de prouver que son noyau est réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire que si g est un élément de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ tel que $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), \varphi_g(f) = 0$, alors g est la fonction nulle.

Soit A un réel positif donné et f_n l'application continue à support compact définie par

$$f_n(t) = \overline{g(-t)} \text{ sur } [-A, A], \quad f_n(t) = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \left[-A - \frac{1}{n}, A + \frac{1}{n}\right]$$

et prolongée par continuité de manière affine sur $[-A - \frac{1}{n}, A]$ et $[A, A + \frac{1}{n}]$.

De façon immédiate, la suite de fonctions $(\tilde{f}_n)_{n \geq 1}$ définies par $\forall t \in \mathbb{R}, \tilde{f}_n(t) = f_n(t)g(-t)$ converge simplement vers la fonction continue par morceaux \tilde{f} donnée par

$$\tilde{f}(t) = |g(-t)|^2 \text{ sur } [-A, A] \quad \text{et} \quad \tilde{f}(t) = 0 \text{ sinon.}$$

On a de plus l'hypothèse de domination $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, |\tilde{f}_n(t)| \leq h(t)$, où h est la fonction continue par morceaux et intégrable définie par

$$h(t) = \|g\|_\infty^2 \text{ sur } [-A - 1, A + 1] \quad \text{et} \quad h(t) = 0 \text{ sinon.}$$

D'après le théorème de convergence dominée, il vient alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(t)g(-t) dt = \int_{-A}^A |g(-t)|^2 dt$.

Or, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{\mathbb{R}} f_n(t)g(-t) dt = 0$, d'où $\int_{-A}^A |g(-t)|^2 dt = 0$. L'application $t \mapsto |g(-t)|^2$ étant continue et positive sur $[-A, A]$, on a donc $\forall t \in [-A, A], g(-t) = 0$, et comme A a été choisi arbitrairement, g est bien l'application nulle.

L'injectivité (et la linéarité) de φ permettent alors de conclure que (g_1, g_2, \dots, g_p) est libre si et seulement si $(\varphi_{g_1}, \varphi_{g_2}, \dots, \varphi_{g_p})$ est libre.

- 2°) – Si le rang de la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est fini alors, sans nuire à la généralité, on peut supposer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_{p-1})$ est libre et que tous les f_n avec $n \geq p$ sont combinaisons linéaires de f_0, f_1, \dots, f_{p-1} . Il en résulte que $K = \bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker } f_k$.

Or $\text{Ker } f_k$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc possède un supplémentaire G_k dans E de dimension 1. Par suite, $\left(\bigcap_{k=0}^{p-1} \text{Ker } f_k\right) + (G_0 + G_1 + \dots + G_{p-1}) = E$, ce qui montre déjà que K est de codimension finie inférieure ou égale à p .

Si la codimension de K était strictement inférieure à p , il existerait un premier entier $q \leq p-1$ tel que $\dim(G_0 + G_1 + \dots + G_{q-1}) = q$ et $G_q \subset (G_0 + G_1 + \dots + G_{q-1})$ et on aurait aussi $\bigcap_{k=0}^{q-1} \text{Ker } f_k \subset \text{Ker } f_q$. En notant u_i un vecteur directeur de G_i , la famille $(u_0, u_1, \dots, u_{q-1})$ serait libre et, comme $(f_0, f_1, \dots, f_{q-1})$ l'est également (dans l'espace dual E^*), la matrice $(f_j(u_i))_{0 \leq i, j \leq q-1}$ serait inversible, d'où l'existence d'un vecteur colonne $X = {}^t(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{q-1})$ tel que $M.Y = Y$ où Y désigne le vecteur ${}^t(f_q(u_0), f_q(u_1), \dots, f_q(u_{q-1}))$.

Les formes linéaires f_q et $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_{q-1} f_{q-1}$ coïncideraient sur $\bigcap_{k=0}^{q-1} \text{Ker } f_k$ et sur $G_0 + G_1 + \dots + G_{q-1}$ donc seraient égales : contradiction.

On peut donc conclure que la codimension de K est précisément égale au rang de la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si celui-ci est fini.

– Si le rang de la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est infini, on peut, quitte à renuméroter, supposer que $(f_0, f_1, \dots, f_{p-1})$ est libre, où p est un entier arbitrairement choisi. Le raisonnement ci-dessus montre alors que la codimension de K est supérieure ou égale à p , donc infinie vu le choix arbitraire de p .

– On remarque (pour la question suivante) que, plus généralement, si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de formes linéaires sur E , alors la codimension de $K = \bigcap_{i \in I} \text{Ker } f_i$ est égale au rang de cette famille. En effet, soit ce rang est fini et on se ramène au premier cas étudié, soit ce rang est infini et on peut appliquer le raisonnement du second cas à une famille libre $(f_{i_0}, f_{i_1}, \dots, f_{i_{p-1}})$ de cardinal aussi grand que l'on veut.

- 3°) Dire que f appartient à N_g équivaut à ce qu'il appartienne à $\bigcap_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{Ker } \varphi_{T_\alpha(g)}$.

D'après le III.A.2°) (et en utilisant sa remarque finale), la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ est égale au rang

de la famille $(\varphi_{T_\alpha(g)})_{\alpha \in \mathbb{R}}$. Ce rang vaut encore celui de la famille $(T_\alpha(g))_{\alpha \in \mathbb{R}}$ selon le **III.A.1°**.
On peut alors conclure que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ est égale à la dimension de V_g .

4°) a) On vérifie de manière immédiate que $T_\alpha(g) = e^{-i\beta\alpha}g$ avec g non nulle. La dimension de V_g est donc 1 si bien que la codimension de N_g dans $L^1(\mathbb{R})$ vaut 1 pour cet exemple.

b) Notons ε_k la fonction (de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$) définie par $\forall t \in \mathbb{R}, \varepsilon_k(t) = e^{ikt}$. La famille $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ est alors libre.

Soit $g = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k$: clairement, V_g est inclus dans $V = \text{Vect}(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ donc N_g est de codimension au plus n dans $L^1(\mathbb{R})$.

De plus, $(T_{2k\pi/n}(g))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une famille libre : en effet, l'expression des composantes de ces vecteurs dans la base $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1})$ de V donne une matrice de Vandermonde de paramètres $e^{2ik\pi/n}$, $0 \leq k \leq n-1$, deux à deux distincts.

On a donc bien exhibé une fonction de $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ telle que N_g soit de codimension n dans $L^1(\mathbb{R})$.

B. Hypothèse A

1°) Si g vérifie l'hypothèse A alors, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$, le produit de convolution $f * g$ est de classe \mathcal{C}^∞ d'après le **I.C.2°**) et on a de plus $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, (f * g)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g^{(k)}(x-t) dt = (f * g^{(k)})(x)$.

Il en ressort que la suite $(N_{g^{(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion. En particulier, si N_g est de codimension finie p dans $L^1(\mathbb{R})$, cette suite est constante à partir d'un certain rang q . La suite $(V_{g^{(k)}})_{k \in \mathbb{N}}$ est donc également constante à partir du rang q et, ces espaces vectoriels étant de dimension p , la famille $(g^{(q)}, g^{(q+1)}, \dots, g^{(q+p)})$ est liée si bien que g satisfait une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

2°) Les solutions (non nulles) d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants s'écrivent de manière générique sous la forme :

$$g(x) = \sum_{k=1}^r P_k(x)e^{z_k x},$$

où z_1, z_2, \dots, z_r sont des nombres complexes deux à deux distincts et P_1, P_2, \dots, P_r des polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$.

Montrons par récurrence sur l'entier $s(g) = \sum_{k=1}^r \deg P_k$ que si une telle fonction g vérifie l'hypothèse A, alors tous les polynômes P_k sont constants et que $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \text{Re}(z_k) = 0$.

– Le résultat est immédiat si $s(g) = 0$.

– Supposons le résultat vérifié jusqu'à l'ordre $s-1$. Soit g une fonction du type précédent telle que $s(g) = s$.

· Si $r = 1$, le comportement asymptotique de g au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$ montre (par croissances comparées des exponentielles et des fonctions puissances) que P_1 est constant et $\text{Re}(z_1) = 0$.

· Si $r \geq 2$, soit ℓ un entier donné de $\llbracket 1, r \rrbracket$. La fonction définie par $h(x) = g'(x) - z_\ell g(x)$, c'est-à-dire par $h(x) = \sum_{k=1}^r (P_k'(x) + (z_k - z_\ell)P_k(x))e^{z_k x}$, a également toutes ses dérivées bornées et satisfait $0 \leq s(h) \leq s-1$.

Par hypothèse de récurrence, tous les polynômes $P_k' + (z_k - z_\ell)P_k$ sont constants, ce qui entraîne que P_k est constant pour tout $k \neq \ell$ et que $\text{Re}(z_k) = 0$ pour tout indice k tel que $P_k' + (z_k - z_\ell)P_k \neq 0$, ce qui est réalisé également pour $k \neq \ell$. Le caractère arbitraire de ℓ prouve alors que tous les polynômes P_k sont constants et que tous les z_k sont imaginaires purs, ce qui conclut le raisonnement.

Réciproquement, toute fonction de la forme $g(x) = \sum_{k=1}^r p_k e^{i\beta_k x}$, où p_1, p_2, \dots, p_r sont des constantes complexes et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ des constantes réelles, vérifie l'hypothèse A et est telle que N_g soit de codimension finie d'après le **III.A.4°**).

C. Cas général

1°) D'après le **III.A.3°**), la dimension de V_g est égale à n et cet espace vectoriel possède une base de la forme $(T_{\alpha_1}(g), T_{\alpha_2}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

En notant $m_1(\alpha), m_2(\alpha), \dots, m_n(\alpha)$ les composantes de T_α dans la base précédente, on a bien trouvé des réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et des fonctions m_1, m_2, \dots, m_n d'une variable réelle tels que, pour tout réel α ,

$$T_\alpha(g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha)T_{\alpha_i}(g).$$

2°) a) Remarquons pour commencer que les e_x définissent bien des formes linéaires sur F et que F^* est de dimension p . Soit $q (\leq p)$ le rang de la famille $(e_x)_{x \in \mathbb{R}}$ et $(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_q})$ une sous-famille libre maximale de celle-ci. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction e_x est combinaison linéaire de $e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_q}$, ce qui signifie qu'il existe des fonctions c_1, c_2, \dots, c_q telle que

$$\forall f \in F, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^q f(a_k) c_k(x).$$

L'espace vectoriel F est alors de dimension au plus q (notons que l'éventuelle continuité des fonctions c_k n'entre pas en ligne de compte si on considère F comme un sous-espace vectoriel que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$).

On a donc $q = p$, ce qui conduit au résultat demandé.

b) Raisonnons par contraposition.

– Si la famille (f_1, f_2, \dots, f_p) est liée, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\sum_{k=1}^p \lambda_k f_k = 0$, donc

$\text{Det}(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq p} = 0$ car les lignes de la matrice correspondante satisfont la même relation de liaison.

– Si $\text{Det}(f_i(a_j))_{1 \leq i, j \leq p} = 0$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\forall j \in [1, p]$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_{a_j}(f_i) = 0$.

Comme $(e_{a_1}, e_{a_2}, \dots, e_{a_p})$ engendre F^* , toute fonction e_x en est combinaison linéaire, si bien que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$\sum_{i=1}^p \lambda_i e_x(f_i) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = 0$: la famille (f_1, f_2, \dots, f_p) est donc liée.

3°) La famille $(T_{\alpha_1}(g), T_{\alpha_2}(g), \dots, T_{\alpha_n}(g))$ formant une base de N_g , le **III.C.2°** garantit l'existence de réels a_1, a_2, \dots, a_n tels que la matrice $M = (T_{\alpha_i}(g)(a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ soit inversible. Or, pour tout α réel,

$$M \cdot {}^t(m_1(\alpha), m_2(\alpha), \dots, m_n(\alpha)) = {}^t(g(a_1 - \alpha), g(a_2 - \alpha), \dots, g(a_n - \alpha)),$$

d'où (par résolution d'un système de Cramer)

$${}^t(m_1(\alpha), m_2(\alpha), \dots, m_n(\alpha)) = M^{-1} \cdot {}^t(g(a_1 - \alpha), g(a_2 - \alpha), \dots, g(a_n - \alpha)).$$

La matrice M étant à coefficients constants, il en résulte que si g est de classe \mathcal{C}^k , alors toutes les fonctions m_1, m_2, \dots, m_n le sont aussi.

4°) D'après les résultats de la partie **I**, $T_\alpha(h_r * g) = T_\alpha(g * h_r) = T_\alpha(g) * h_r$. De plus, le rang de la famille $(T_\alpha(g))_{\alpha \in \mathbb{R}}$ étant fini, le rang de la famille $(T_\alpha(g) * h_r)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ l'est aussi, par linéarité de l'application $f \mapsto f * h_r$.

Par suite, $V_{h_r * g}$ est de dimension finie, inférieure ou égale à celle de V_g .

5°) Supposons que l'application $f \mapsto h_r * f$, définie de V_g dans $V_{h_r * g}$, ne soit pas injective à partir d'un certain rang.

Pour une infinité d'indices r , on peut alors trouver des fonctions non nulles f_r de V_g telles que $h_r * f_r = 0$.

Chaque f_r peut s'écrire (relativement à la base définie dans le **III.C.1°**) sous la forme $f_r = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,r} T_{\alpha_i}(g)$, où $\lambda_{1,r}, \lambda_{2,r}, \dots, \lambda_{n,r}$ sont des scalaires non tous nuls.

Quitte à normaliser, on peut supposer que l'on a $|\lambda_{1,r}|^2 + |\lambda_{2,r}|^2 + \dots + |\lambda_{n,r}|^2 = 1$. La sphère unité \mathcal{S} pour la norme hermitienne usuelle de \mathbb{C}^n étant compacte, on peut trouver une extraction $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que la suite infinie des $(\lambda_{1,r_k}, \lambda_{2,r_k}, \dots, \lambda_{n,r_k})$ converge vers un certain élément $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de \mathcal{S} . La suite de fonctions

$(f_{r_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge alors vers la fonction $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i T_{\alpha_i}(g)$ de V_h de manière uniforme étant donné que la fonction g est bornée.

En remarquant que $\|h_{r_k} * f_{r_k} - h_{r_k} * f\|_\infty \leq \|f_{r_k} - f\|_\infty \int_{\mathbb{R}} h_{r_k}(t) dt = \|f_{r_k} - f\|_\infty$, il résulte de ce qui précède que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|h_{r_k} * f_{r_k} - h_{r_k} * f\|_\infty = 0$, soit $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|h_{r_k} * f\|_\infty = 0$. Or, d'après **I.D.1°**, la suite de fonctions $(h_{r_k} * f)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f : la limite précédente montre alors que f est la fonction nulle, ce qui est impossible vu que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$.

En conclusion, $V_{h_r * g}$ et V_g ont la même dimension pourvu que r soit suffisamment grand.

6°) On vérifie facilement, en appliquant de manière itérée le "théorème de prolongement de la dérivée", que l'application h_r est de classe \mathcal{C}^{r-1} (et que toutes ses dérivées k -ièmes jusqu'à l'ordre $r-1$ sont nulles aux points -1 et 1). De plus, étant à support compact, toutes les fonctions dérivées $h_r^{(k)}$ avec $k \leq r-1$, sont bornées sur \mathbb{R} . D'après le **I.C.2°**, $h_r * g$ est de classe \mathcal{C}^{r-1} sur \mathbb{R} .

En prenant r suffisamment grand, $\dim V_{h_r * g} = \dim V_g$ et, plus précisément, $f \mapsto h_r * f$ définit un isomorphisme de V_g sur $V_{h_r * g}$. Comme $T_\alpha(h_r * g) = \sum_{i=1}^n m_i(\alpha) T_{\alpha_i}(h_r * g)$, la question **III.C.3°** appliquée à $h_r * f$

montre que m_1, m_2, \dots, m_n sont de classe \mathcal{C}^{r-1} .

L'entier r pouvant être choisi aussi grand que l'on veut, m_1, m_2, \dots, m_n sont donc de classe \mathcal{C}^∞ .

7°) Le caractère \mathcal{C}^∞ des applications m_1, m_2, \dots, m_n entraîne de manière immédiate celui de l'application $\alpha \mapsto T_\alpha(g)(0)$, c'est-à-dire celui de l'application $\alpha \mapsto g(-\alpha)$: la fonction g est donc de classe \mathcal{C}^∞ .

De plus, les formules de Cramer du **III.C.3°**) montrent que m_1, m_2, \dots, m_n sont bornées.

Il nous reste à établir que les fonctions m_1, m_2, \dots, m_n ont leurs dérivées k -ièmes bornées pour tout entier naturel k . Pour cela, observons qu'à partir d'un certain rang, $h_r * g$ satisfait les mêmes propriétés que g .

Plus précisément, comme $T_\alpha(h_r * g) = h_r * T_\alpha(g)$ et que l'application $f \mapsto h_r * f$ est injective pourvu que r soit suffisamment grand, $m_1(\alpha), m_2(\alpha), \dots, m_n(\alpha)$ représentent également les composantes de $T_\alpha(h_r * g)$ dans la base $(T_{\alpha_1}(h_r * g), T_{\alpha_2}(h_r * g), \dots, T_{\alpha_n}(h_r * g))$ de $V_{h_r * g}$. En appliquant à nouveau le **III.C.3°**), chaque $m_i(\alpha)$ s'écrit comme combinaison linéaire (à coefficients constants) de $(h_r * g)(a_1 - \alpha), (h_r * g)(a_2 - \alpha), \dots, (h_r * g)(a_n - \alpha)$.

Or la fonction $h_r * g$ est de classe \mathcal{C}^∞ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(h_r * g)^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} h_r^{(k)}(x-t)g(t) dt.$$

Comme g est bornée et que $h_r^{(k)}$ est continue à support compact, il en résulte que $(h_r * g)^{(k)}$ est bornée et, en réinjectant, $m_1^{(k)}, m_2^{(k)}, \dots, m_n^{(k)}$ sont bornées sur \mathbb{R} .

L'application g satisfait alors l'hypothèse A et on peut conclure que les fonctions g telles que N_g soit de codimension finie sont exactement celles de la forme $g(x) = \sum_{k=1}^r p_k e^{i\beta_k x}$, où p_1, p_2, \dots, p_r sont des constantes complexes et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ des constantes réelles.