Corrigé de la première épreuve de mathématiques
Centrale 2010 - Filière MP

L'objectif du problème est la construction d'une application f continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ dont l'image $f([0,1])$ est le triangle plein τ et l'étude de quelques unes de ses propriétés.

Partie I - Préliminaires géométriques.

I.A -

I.A.1) Soit $z \in \mathbb{C}$ et notons $\mathfrak{Re}(z)$ la partie réelle de z et $\mathfrak{Im}(z)$ sa partie imaginaire. Alors,

$$\begin{aligned} z \in \tau_0 &\iff \exists\,(\alpha,\beta,\gamma) \in K,\ z = -\alpha + i\beta \\ &\iff \mathfrak{Re}(z) \leqslant 0,\ \mathfrak{Im}(z) \geqslant 0 \text{ et } -\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) \leqslant 1 \end{aligned}$$

(avec $\alpha = -\mathfrak{Re}(z)$, $\beta = \mathfrak{Im}(z)$ et $\gamma = 1 - \alpha - \beta$). De la même façon,

$$z \in \tau_1 \iff \mathfrak{Re}(z) \geqslant 0,\ \mathfrak{Im}(z) \geqslant 0 \text{ et } \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) \leqslant 1$$

Maintenant, si $z \in \tau$, alors il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in K$ tel que $z = -\alpha + \gamma + i\beta$. Donc

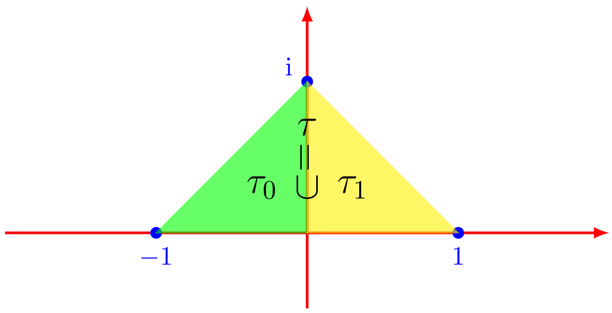
$$\mathfrak{Im}(z) = \beta \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |\mathfrak{Re}(z)| + \mathfrak{Im}(z) \leqslant \alpha + \beta + \gamma = 1.$$

Réciproquement, si $\mathfrak{Im}(z) \geqslant 0$ et $|\mathfrak{Re}(z)| + \mathfrak{Im}(z) \leqslant 1$, alors, pour $\beta = \mathfrak{Im}(z)$, $\gamma = \dfrac{1 - \mathfrak{Im}(z) + \mathfrak{Re}(z)}{2}$ et $\alpha = \dfrac{1 - \mathfrak{Im}(z) - \mathfrak{Re}(z)}{2}$ sont des réels tels que $(\alpha,\beta,\gamma) \in K$ et $z = -\alpha + \gamma + i\beta \in \tau$. Par suite,

$$\begin{aligned} z \in \tau &\iff \mathfrak{Im}(z) \geqslant 0 \text{ et } |\mathfrak{Re}(z)| + \mathfrak{Im}(z) \leqslant 1 \\ &\iff (\mathfrak{Im}(z) \geqslant 0,\ \mathfrak{Re}(z) \leqslant 0 \text{ et } -\mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) \leqslant 1) \text{ ou } (\mathfrak{Im}(z),\ \mathfrak{Re}(z) \geqslant 0 \geqslant 0 \text{ et } \mathfrak{Re}(z) + \mathfrak{Im}(z) \leqslant 1) \\ &\iff (z \in \tau_0) \text{ ou } (z \in \tau_1) \end{aligned}$$

ce qui établit $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$.

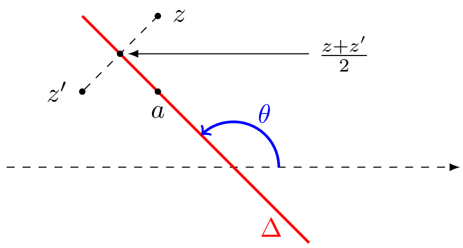
I.A.2)



τ_0, τ_1, τ sur une même figure

I.A.2)

a) Soit $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Notons z' l'image du complexe z par la réflexion dont l'axe est la droite Δ passant par a et dirigée par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.



Notons S cette réflexion, T_b la translation du vecteur b pour tout $b \in \mathbb{C}$, S_0 la réflexion d'axe la droite passant par les points 0 et 1 et, enfin, R la rotation de centre 0 et d'angle 2θ. Il s'agit en fait de montrer que $S = T_a \circ R \circ S_0 \circ T_{-a}$ puisque $S_0(z) = \bar{z}$ et $R(z) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. On sait que S et $S' = T_a \circ R \circ S_0 \circ T_{-a}$ sont des isométries négatives et ont a comme point invariant. Ceci montre que S' est une réflexion. Soit b un point de Δ autre que a de sorte que $b - a = |b-a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Alors,

$$\begin{aligned} S'(b) &= T_a \circ R \circ S_0 \circ T_{-a}(a + |b-a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\ &= T_a \circ R \circ S_0(|b-a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\ &= T_a \circ R(|b-a|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \\ &= T_a(|b-a|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \\ &= b \end{aligned}$$

Ceci qui justifie la relation $z' - a = e^{2\mathrm{i}\theta}\overline{(z-a)}$

b) Soit z un nombre complexe et z' son image par l'homothétie de centre a et de rapport $\rho > 0$. Alors,

$$z' - a = \rho(z - a)$$

c) On commence par chrecher les points invariants de ϕ_0. On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z = \phi_0(z) &\iff z = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\bar{z} + \frac{-1+\mathrm{i}}{2} \\ &\iff z = \frac{1+\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}z + \frac{-1-\mathrm{i}}{2}\right) + \frac{-1+\mathrm{i}}{2} \\ &\iff z = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} \iff z = -1 \end{aligned}$$

Donc $a = -1$ est le seul point invariant de ϕ_0. D'un autre coté, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \phi_0(z) - a &= \frac{1+\mathrm{i}}{2}\bar{z} + \frac{-1+\mathrm{i}}{2} + 1 \\ &= \frac{1+\mathrm{i}}{2}(\bar{z}+1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/8}\overline{(z+1)} \end{aligned}$$

Alors, ϕ_0 est la composée de la réflexion dont l'axe est la droites passant par $a = -1$ et dirigée par le vecteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta = \frac{\pi}{8}$ et de l'homothétie de rapport $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et dont le centre $a = -1$ appartient à l'axe de la réflexion. On reprend la même méthode : pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z = \phi_1(z) &\iff z = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\bar{z} + \frac{1+\mathrm{i}}{2} \\ &\iff z = \frac{1-\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1+\mathrm{i}}{2}z + \frac{1-\mathrm{i}}{2}\right) + \frac{1+\mathrm{i}}{2} \\ &\iff z = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2} \iff z = 1 \end{aligned}$$

Donc $a = 1$ est le seul point invariant de ϕ_1. D'un autre coté, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \phi_1(z) - a &= \frac{1-\mathrm{i}}{2}\bar{z} + \frac{1+\mathrm{i}}{2} - 1 \\ &= \frac{1-\mathrm{i}}{2}(\bar{z}-1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi/8}\overline{(z-1)} \end{aligned}$$

Alors, ϕ_1 est la composée de la réflexion dont l'axe est la droites passant par $a = 1$ et dirigée par le vecteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $\theta = -\frac{\pi}{8}$ et de l'homothétie de rapport $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et dont le centre $a = 1$ appartient à l'axe de la réflexion.

(On pourra remarquer aussi que si on écrit $\phi_0(z) = \alpha\bar{z} + \beta$, alors $\phi_1(z) = \bar{\alpha}\bar{z} - \bar{\beta}$. Donc si ϕ_1 est la composée d'une réflexion dont l'axe est dirigé par le vecteur $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$ et d'une mothétie de rapport $\rho' > 0$, on doit avoir $\rho' = \rho$ et $\gamma = -\theta$.)

Ces décompositions sont uniques puisque (pour $\phi_0 : z \mapsto \alpha\bar{z} + \beta$ par exemple) l'axe de la réflexion passe par l'unique point invariant de ϕ_0 qui est aussi le centre de l'homothétie et dirigé par $e^{i\theta}$, où $\theta = \frac{\arg(\alpha)}{2}$. En plus, $|\alpha|$ est le rapport de l'homothétie.

I.A.4) L'image d'un triangle plein $\widehat{abc}$ par ϕ_0 est le triangle plein $\phi_0(a)\widehat{\phi_0(b)}\phi_0(c)$ puisque ϕ_0 conserve le barycentre. De même, son image par ϕ_1 est le triangle plein $\phi_1(a)\widehat{\phi_1(b)}\phi_1(c)$. On a :

$$\begin{aligned} \phi_0(-1) = -1, &\quad \phi_1(-1) = i \\ \phi_0(1) = i, &\quad \phi_1(1) = 1 \\ \phi_0(i) = 0, &\quad \phi_1(i) = 0 \end{aligned}$$

donc $\phi_0(\tau) = \tau_0$ et $\phi_1(\tau) = \tau_1$.

I.B - (Diamètre d'un triangle plein)

I.B.1)

a) On a $K \subset [0,1]^3$, donc K est borné. En plus, K est fermé puisque c'est l'image réciproque de $\{1\}$ par la fonction $(\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha + \beta + \gamma$ continue sur $\mathbb{R}^3$. Il s'agit bien d'un compact de $\mathbb{R}^3$ pour sa topologie usuelle.

b) Soit $t \in [0,1]$ et un couple (u, v) d'éléments de K, où $u = (u_1, u_2, u_3)$ et $v = (v_1, v_2, v_3)$. Posons $w = tu + (1-t)v$ et $w = (w_1, w_2, w_3)$. Alors,

$$w_1 + w_2 + w_3 = t(u_1 + u_2 + u_3) + (1-t)(v_1 + v_2 + v_3) = t + 1 - t = 1$$

donc $w \in K$ et, par suite, K est convexe.

c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On a $\widehat{abc} = F(K)$, où F est l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha a + \beta b + \gamma c$$

Puisque K est compact et f continue, $\widehat{abc} = F(K)$ est un compact de $\mathbb{C}$ muni de sa topologie usuelle. En plus, K est convexe et F est affine (même linéaire) donc $\widehat{abc} = F(K)$ est convexe.

d) L'application $G : (z, z') \mapsto |z - z'|$ de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ est continue, $\widehat{abc}^2$ est un compcat de $\mathbb{C}^2$, G est donc majorée et atteint sa borne supérieure sur $\widehat{abc}^2$, d'où l'existence de :

$$\delta(\widehat{abc}) = \max\left\{|z' - z| \,/ (z', z) \in \widehat{abc}^2\right\}$$

I.B.2)

a) Soient $z \in \mathbb{C}$ et $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. Du fait que $\widehat{abc}$ soit un compact, $\max\left\{|z' - z| \,/ z' \in \widehat{abc}\right\}$ existe et atteint en un point $w = \alpha a + \beta b + \gamma c$ de $\widehat{abc}$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \in K$. Il est clair que

$$\max\left\{|z' - z| \,/ z' \in \widehat{abc}\right\} \geqslant \max\{|z - a|, |z - b|, |z - c|\}$$

Réciproquement,

$$\begin{aligned} \max\left\{|z' - z| \,/ z' \in \widehat{abc}\right\} &= |w - z| \\ &= |\alpha(a - z) + \beta(b - z) + \gamma(c - z)| \\ &\leqslant \alpha|a - z| + \beta|b - z| + \gamma|c - z| \\ &\leqslant (\alpha + \beta + \gamma)\max\{|z - a|, |z - b|, |z - c|\} \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

b) En remarquant que $\delta(\widehat{abc}) = \max\limits_{z \in \widehat{abc}} \max\limits_{z' \in \widehat{abc}} |z' - z|$, alors par la question précédente, $\delta(\widehat{abc}) = \max\limits_{z \in \widehat{abc}} \{|z - a|, |z - b|, |z - c|\}$.

Pour $z = \alpha a + \beta b + \gamma c \in \widehat{abc}$,

$$\begin{aligned} |z - a| &= |\alpha(a - a) + \beta(b - a) + \gamma(c - a)| \\ &\leqslant (\beta + \gamma)\max\{|b - a|, |c - a|\} \\ &\leqslant \max\{|b - a|, |c - a|\} \end{aligned}$$

De même pour $|z - b|$ et $|z - c|$. Donc une expression de $\delta(\widehat{abc})$ est $\delta(\widehat{abc}) = \max\{|b - a|, |c - a|, |b - c|\}$.

I.B.3) Soit $(r_n)_{n \geqslant 1}$ un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$. Pour chaque entier naturel non nul n, on note $\tilde{\tau}_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(\tau)$.

- Si $\Delta = \widehat{abc}$ est un triangle plein, alors pour tout $(z, z') \in \Delta^2$,

$$|\phi_0(z) - \phi_0(z')| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z - z'|$$

ceci montre que $\delta(\phi_0(\Delta)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(\Delta)$ et, de la même façon, $\delta(\phi_1(\Delta)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \delta(\Delta)$. En particulier,

$$\delta(\tilde{\tau}_n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \delta(\tau) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

En particulier, l'intersection de tous les $\tilde{\tau}_n$ contient au plus un point.
- Nous avons déjà vu que $\phi_0(\tau) = \tau_0 \subset \tau$ et $\phi_1(\tau) = \tau_1 \subset \tau$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors, puisque $\phi_{r_{n+1}}(\tau) \subset \tau$

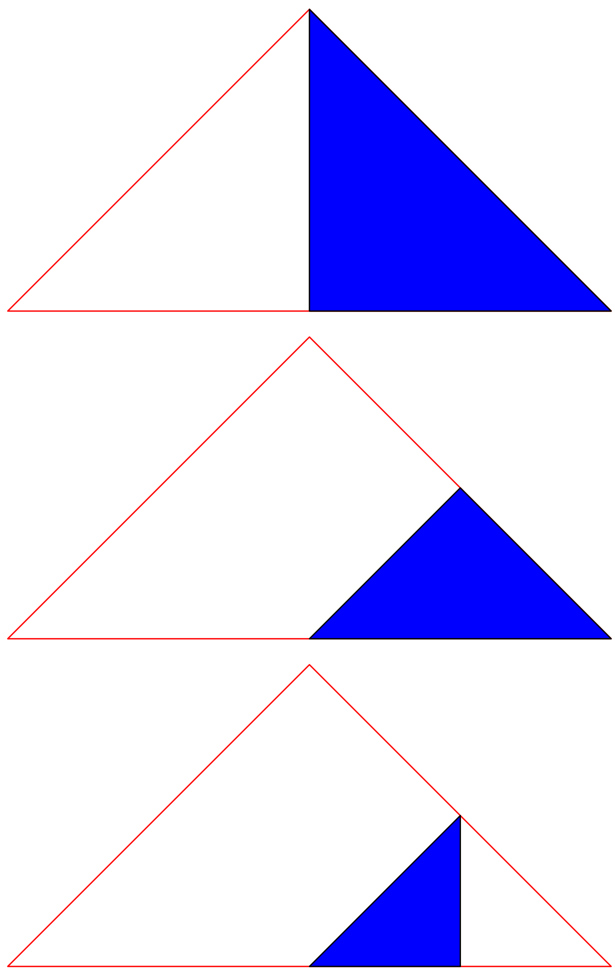
$$\begin{array}{rcl} \tilde{\tau}_{n+1} & = & \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n} \circ \phi_{r_{n+1}}(\tau) \\ & = & \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n} \left(\phi_{r_{n+1}}(\tau)\right) \\ & \subset & \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n} (\tau) = \tilde{\tau}_n \end{array}$$

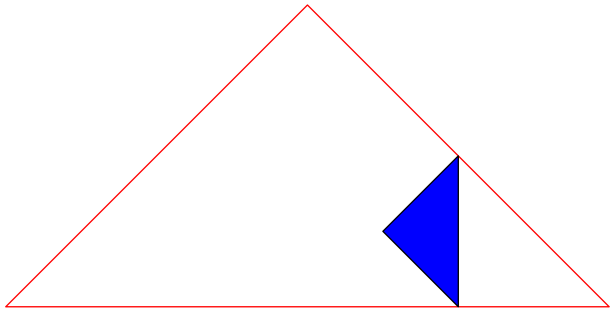
La suite $(\tilde{\tau}_n)_{n \geqslant 1}$ est décroissante au sens de l'inclusion.
- Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n = \phi_{r_1} \circ \phi_{r_2} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(1)$. Alors, z_n est un élément de $\tilde{\tau}_n$ et pour tout $p \geqslant 0$, $z_{n+p} \subset \tilde{\tau}_n$ et donc

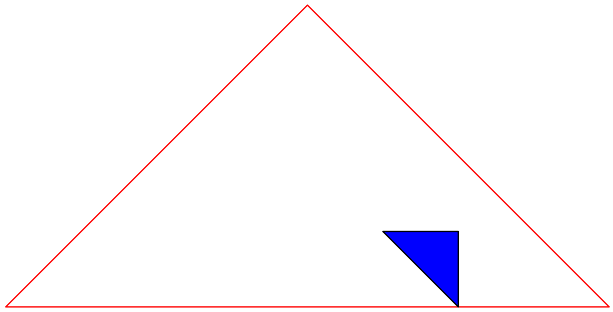
$$|z_{n+p} - z_n| \leqslant \delta(\tilde{\tau}_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

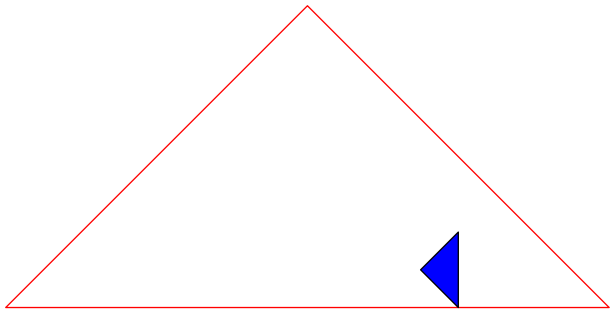
La suite (z_n) d'éléments du compact τ est de Cauchy, elle est donc convergente vers un élément w de τ. D'un autre coté, pour tout $n \geqslant 1$, $\tilde{\tau}_n$ est compact et contient la sous-suite convergente $(z_{n+p})_{p \geqslant 0}$, donc sa limite w est dans $\tilde{\tau}_n$. Ceci montre que l'intersection de tous les $\tilde{\tau}_n$ contient le seul point w de τ.

Dans les schémas ci-dessous, on donne, dans l'ordre, les triangles pleins $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_5$ tracés en bleu ainsi que le triangle τ pour lequel, on représente juste les cotés en rouge. On a choisi dans pour ces dessins, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, $r_3 = 0$, $r_4 = 1$, $r_5 = 0$ et $r_6 = 0$.









Partie II - Construction de l'application f

II- Dans la suite on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des applications g continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ telles que $g(0)=-1$ et $g(1)=1$. Si $g \in \mathcal{E}$, on note T_g l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$T_g(x)=\phi_0(g(2x)) \text{ si } x \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \text{ et } T_g(x)=\phi_1(g(2x-1)) \text{ si } x \in \left]\frac{1}{2},1\right]$$

II.1) L'unique (puisque affine et $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto 1$) fonction de $\mathcal{E}$ est f_0 définie par $f_0(x)=2x-1$.

II.2) Soit g un élément de $\mathcal{E}$. La fonction Tg est continue sur les deux intervalles $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\left]\frac{1}{2},1\right]$ puisque g, ϕ_0 et ϕ_1 sont continues. En plus, par continuité de g et ϕ_1,

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} Tg(x)=\phi_1(g(0))=\phi_1(-1)=i=\phi_0(1)=Tg\left(\frac{1}{2}\right)$$

II.3) Soient g_1 et g_2 deux éléments de $\mathcal{E}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|Tg_1-Tg_2\|_\infty &= \max\left(\max_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}|Tg_1(x)-Tg_2(x)|\,,\,\max_{x\in\left[\frac{1}{2},1\right]}|Tg_1(x)-Tg_2(x)|\right)\\
&= \max\left(\max_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}|\phi_0(g_1(2x))-\phi_0(g_2(2x))|\,,\,\max_{x\in\left[\frac{1}{2},1\right]}|\phi_1(g_1(2x-1))-\phi_1(g_2(2x-1))|\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left(\max_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}|g_1(2x)-g_2(2x)|\,,\,\max_{x\in\left[\frac{1}{2},1\right]}|g_1(2x-1)-g_2(2x-1)|\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left(\max_{x\in[0,1]}|g_1(x)-g_2(x)|\,,\,\max_{x\in[0,1]}|g_1(x)-g_2(x)|\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\max\left(\|g_1-g_2\|_\infty\,,\|g_1-g_2\|_\infty\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\|g_1-g_2\|_\infty
\end{aligned}$$

II.4) On définit maintenant une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E}$ en choisissant f_0 affine comme ci-dessus et $f_{n+1} = Tf_n$ pour tout entier naturel n.

a) Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty = \|Tf_n - Tf_{n-1}\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_n - f_{n-1}\|_\infty = \cdots = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \|f_1 - f_0\|_\infty$$

Donc pour tout $p \geqslant 1$,

$$\|f_{n+p} - f_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{p} \|f_{n+k} - f_{n+k-1}\|_\infty \leqslant \|f_1 - f_0\|_\infty \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+k-1} \leqslant M\|f_1 - f_0\|_\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

où $M = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_{n+p} - f_n\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Cette dernière inégalité montre que la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ complet, donc convergente vers un certain $f(x)$ et que, lorsque p tend vers ∞

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant M\|f_1 - f_0\|_\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

ce qui assure la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vers la fonction f et montre ainsi que f est continue sur $[0,1]$ puisque toutes les fonctions f_n le sont. D'un autre coté, pour tout n, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, donc $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

b) La sous-suite extraite $(f_{n+1} = Tf_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f et

$$\|Tf_n - Tf\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $Tf = f$ par unicité de la limite..

c) Soit g une fonction de $\mathcal{E}$ vérifiant la propriété : $(*) : \forall\, x \in [0,1]\,,\ g(x) = -\overline{g(1-x)}$. Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$\begin{aligned} Tg(1-x) &= \phi_1(g(2(1-x)-1)) \quad \text{car } 1-x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ &= \phi_1\left(g(1-2x)\right) \\ &= \phi_1\left(-\overline{g(2x)}\right) \\ &= \frac{1-i}{2}(-g(2x)) + \frac{1+i}{2} \end{aligned}$$

Donc $-\overline{Tg(1-x)} = \dfrac{1+i}{2}(\overline{g(2x)}) + \dfrac{-1+i}{2} = \phi_0(g(2x)) = T_g(x)$. Si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, alors $1-x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et

$$Tg(1-x) = -\overline{Tg(1-(1-x))} = -\overline{Tg(x)}$$

La nouvelle fonction Tg vérifie elle aussi la propriété $(*)$. Puisque (simple à vérifier) la fonction $f_0 : x \mapsto 2x-1$ vérifie $(*)$, toutes les fonctions de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ vérifient $(*)$. Par passage à la limite et par continuité de $z \mapsto \bar{z}$, f vérifie la propriété $(*)$. Donc pour construire la courbe paramétrée de la fonction f, il suffit de la construire sur le segment $[0, \frac{1}{2}]$ et appliquer la réflexion $z \mapsto -\bar{z}$ d'axe la droite passant par 0 et dirigée par i. La courbe est symétrique par rapport à cet axe.

Partie III - Propriétés de l'application f

III.A - Image de f.

III.A.1) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \frac{r_n}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$$

La série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est convergente, donc celle de terme général $\frac{r_n}{2^n}$ est convergente et

$$0 \leqslant x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

b) Soit p un entier naturel non nul et posons $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+p}}{2^n}$. Pour $p = 1$,

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+1}}{2^n} = 2x - r_1$$

On remarque que si $r_1 = 0$, alors $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et si $r_1 = 1$, alors $x \in \left[\frac{1}{2}, 0\right]$. Dans tous les cas, on a :

$$\phi_{r_1}(f(x_1)) = \phi_{r_1}(f(2x - r_1)) = Tf(x) = f(x)$$

Pour p quelconque, on procède par récurrence sur p en remarquant que :

$$x_p = 2x_{p-1} - r_p$$

D'après le cas précédent, $\phi_{r_p}(f(x_p)) = f(x_{p-1})$. Alors, avec une récurrence sur p,

$$\phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_p}(f(x_p)) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_{p-1}}(f(x_{p-1})) = f(x)$$

III.A.2) Inversement, soit $x \in [0, 1[$.
a) Soit n un entier naturel non nul et rappelons que $r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1}x]$ et psoons $p = [2^{n-1}x]$. Alors, $p \leqslant 2^{n-1}x < p + 1$ et $[2^n x] = 2p$ ou $[2^n x] = 2p + 1$. Donc $r_n(x) \in \{0, 1\}$.
b) Soit N un entier naturel non nul, alors $[x] = 0$ puisque $x \in [0, 1[$ et on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{r_n(x)}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{[2^n x] - 2[2^{n-1}x]}{2^n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{[2^n x]}{2^n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{[2^{n-1}x]}{2^{n-1}} = \frac{[2^N x]}{2^N} - [x] = \frac{[2^N x]}{2^N}$$

D'un autre coté, on a

$$\frac{[2^N x]}{2^N} \leqslant x = \frac{2^N x}{2^N} \leqslant \frac{[2^N x] + 1}{2^N}$$

ce qui montre que la suite $\left(\frac{[2^N x]}{2^N}\right)_{N \geqslant 1}$ est convergente vers x ou encore $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n} = x$.
c) On suppose que $x \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$. Le résultat est évident pour $x = 0$ et $N = 0$ convient. Si $x \neq 0$, alors il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, 2^N - 1]\!]$ tel que $x = \frac{k}{2^N}$. Pour $n > N$, on aura;

$$r_n(x) = [2^n x] - 2[2^{n-1}x] = [2^{n-N}k] - 2[2^{n-1-N}k] = 2^{n-N}k - 2^{n-N}k = 0$$

d) Pour $x = \frac{1}{2}$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$ avec $r_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ et $r_1 = 1$. En particulier,

$$x_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+1}(x)}{2^n} = 0$$

donc $f(x) = \phi_1(f(0)) = \phi_1(-1) = i$. Pour $x = \frac{1}{4}$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$ avec $r_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 3$, $r_1 = 0$ et $r_2 = 1$. En particulier,

$$x_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+2}(x)}{2^n} = 0$$

donc $f(x) = \phi_0 \circ \phi_1(f(0)) = \phi_0(\phi_1(-1)) = \phi_0(i) = 0$. La transformation ϕ_0 étant la composée d'une réflexion et d'une homothétie de rapport $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre -1 appartenant à l'axe de la réflexion. Alors, $\phi_0 \circ \phi_0$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $k^2 = \frac{1}{2}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les valeurs de $f\left(\frac{1}{2^k}\right)$ sont connues pour $k \in [\![0, 2]\!]$. Supposons que $k \geqslant 3$. Pour $x = \frac{1}{2^k}$, on a $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n(x)}{2^n}$ avec $r_n(x) = 0$ pour tout $n \neq k$ et $r_k = 1$. En particulier,

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+k}(x)}{2^n} = 0$$

donc $f(x) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_{k-1}} \circ \phi_{r_k}(f(0)) = \phi_0 \circ \cdots \circ \phi_0 \circ \phi_1(-1) = \underbrace{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_0}_{k-1 \text{ fois}}(i)$. La trasformation $\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_0$ est l'homothétie de centre -1 et de rapport $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-1}{2}}$ si k est impair et c'est la composée de ϕ_0 et de l'homothétie de centre -1 et de rapport $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-2}{2}}$ si k est pair. Donc, si k est impair,

$$f(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-1}{2}} (i+1) - 1$$

si k est pair, alors

$$f(x) = \underbrace{\phi_0 \circ \cdots \circ \phi_0}_{k-2 \text{ fois}}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{k-2}{2}} - 1$$

III.A.3)

a) Soit $x \in [0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Si $x = 1$, alors $f(x) = 1 \in \tau$. Si $x \neq 1$, on sait qu'il xiste $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}, \quad \text{avec } r_n = r_n(x)$$

Donc $x_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_{n+N}}{2^n} = 0$ et $f(x) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_N}(f(0)) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_N}(-1) \in \tilde{\tau}_N \subset \tau$ puisque $-1 \in \tau$.

b) Soit $x \in [0,1]$, il existe (r_n) un élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ tel que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} = \lim_{N \to \infty} y_N$, où $y_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}$. Puisque $y_N \in [0,1] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ pour tout N, on a $f(y_N) \in \tau$ pour tout N. Par compacité de τ et continuité de f, on aura $f(x) \in \tau$.

III.A.4) Inversement, soit $z \in \tau$.

a) Le point $z_0 = z$ appartient à τ, les transformations ϕ_0 et ϕ_1 sont bijectives, $\tau = \tau_0 \cup \tau_1$, $\tau = \phi_0^{-1}(\tau_0)$ et $\tau = \phi_1^{-1}(\tau_1)$ sont des conditions suffisantes pour la définition de la suite $(z_n)_{n \geqslant 0}$. Ce qui donne en conséquence (ou par récurrence) que $z_n \in \tau$ pour tout n.

b) Par définition de la suite $(z_n)_{n \geqslant 0}$ et de la suite $(r_n)_{n \geqslant 1}$, on a $z_n = \phi_{r_n}^{-1}(z_{n-1})$ ou encore $z_{n-1} = \phi_{r_n}(z_n)$ pour tout $n \geqslant 1$. Ceci donne $z = z_0 = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(z_n)$. Posons $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n}$ et, pour tout $N \geqslant 1$, $y_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{r_n}{2^n}$. D'après la question III.A.3) a), on a

$$f(y_N) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_N}(-1)$$

Par suite,

$$|z - f(y_N)| = |\phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_N}(-1) - \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_N}(z_n)| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^N |z_n + 1| \leqslant \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^N \delta(\tau) \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

ceci montre que $f(y_N)$ tend vers z mais tend aussi vers $f(x)$ par continuité de f. Alors, $f(x) = z$.

c) La fonction aura pour entrée un complexe z de τ et un réel $\varepsilon > 0$. Si on rprend les notations de la question précédente, alors y_N est une valeur approchée de x, antécédent de z. En plus,

$$0 \leqslant x - y_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^N}$$

On choisit N de sorte que $\frac{1}{2^N} \leqslant \varepsilon$. L'algorithme écrit en français est le suivant :

* une variable y reçoit la valeur nulle ; $y := 0$
* une variable w reçoit la valeur de z ; $w := z$
* pour $n = 1$ à N faire
  * ** si $\mathfrak{Re}(w) \leqslant 0$ (c-à-d $w \in \tau_0$) alors, $w := \phi_0^{-1}(w)$; (y ne change pas)
  * ** sinon (c-à-d $w \notin \tau_0$) alors, $w := \phi_1^{-1}(w)$; $y := y + \frac{1}{2^n}$

La valeur y ($= y_N$) est une valeur approchée de x à ε près.

III.A.5)

a) On a $f(\frac{1}{4}) = 0$, d'après ce qui précède. Donc $f(\frac{3}{4}) = -\overline{f(\frac{1}{4})} = 0 = f(\frac{1}{4})$. Donc f est non injective.

b) Supposons que h est une bijection continue de $[0,1]$ sur τ. Soit $a = h(0)$ et b un point intérieur de τ avec $a \neq b$ et J le segment intersection de τ avec la droite passant par les points a et b. Posons $J = [c,d]$ et remarquons que $\tau \setminus [c,d]$ n'est pas connexe par arcs.

* Soit g l'application de $[0,1]$ dans lui-même définie par $g(s) = h^{-1}(sc + (1-c)d)$. Montrons que g est continue. Soit (s_n) une suite d'éléments de $[0,1]$ qui converge vers un certain s de $[0,1]$. Posons, pour tout n, $t_n = g(s_n)$ et $t = g(s)$. On suppose que (t_n) ne converge pas vers t. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u_n = t_{\varphi(n)})$ extraite de (t_n) telle que $|u_n - t| \geqslant \varepsilon$ pour tout n. Par le théorème de Bolzano-Weirstrass, (u_n) admet une sous-suite extraite $(v_n = t_{\psi(n)})$ qui converge vers un certain v. Alors, par continuité de h, $h(v_n) = cs_{\psi(n)} + d(1 - s_{\psi(n)})$ converge vers $h(v) = cs + d(1-s) = h(t)$. Comme h est injective, on aura $v = t$. D'un autre coté, lorsque n tend vers ∞, l'inégalité $|v_n - t| \geqslant \varepsilon$ donne $|v - t| \geqslant \varepsilon$, absurde. Donc (t_n) converge vers t et, par suite, g est continue.
* Posons $I = g([0,1]) = h^{-1}([c,d])$. Par continuité de g, I est un segment de $[0,1]$. Posons $I = [u,v]$ et $H = [0,1] \setminus I$. Si H est un intervalle, alors son image $\tau \setminus [c,d]$ par h serait connexe par arcs puisque h est continue. Donc H n'est pas intervalle et par suite, $0 < u < v < 1$. Mais, $a = h(0) \in [c,d]$, donc $0 \in h^{-1}([c,d]) = [u,v]$, absurde.

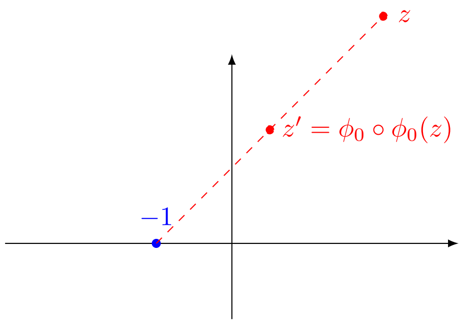
III.A.6)

a) Soit z un nombre complexe.

* Pour $(i,j) = (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}\phi_0 \circ \phi_0(z) &= \frac{1+\mathrm{i}}{2}\overline{\frac{1+\mathrm{i}}{2}\bar{z} + \frac{-1+\mathrm{i}}{2}} + \frac{-1+\mathrm{i}}{2}\\ &= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

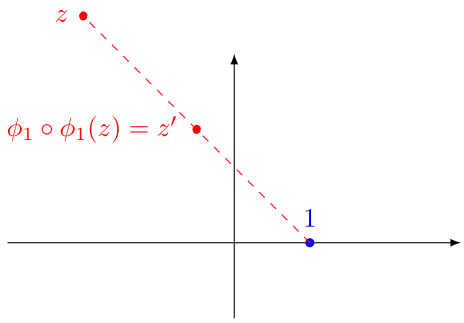
Alors, $\phi_0 \circ \phi_0$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre -1.



* Pour $(i,j) = (1,1)$, on a

$$\begin{aligned}\phi_1 \circ \phi_1(z) &= \frac{1-\mathrm{i}}{2}\overline{\frac{1-\mathrm{i}}{2}\bar{z} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}\\ &= \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

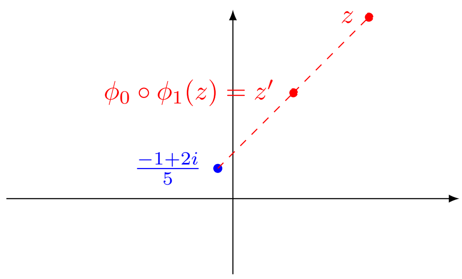
Alors, $\phi_1 \circ \phi_1$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre 1.



$*$ Pour $(i,j) = (0,1)$, on a

$$\begin{aligned} \phi_0 \circ \phi_1(z) &= \frac{1+\mathrm{i}}{2}\overline{\frac{1-\mathrm{i}}{2}\overline{z} + \frac{1+\mathrm{i}}{2}} + \frac{-1+\mathrm{i}}{2} \\ &= \frac{i}{2}z + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

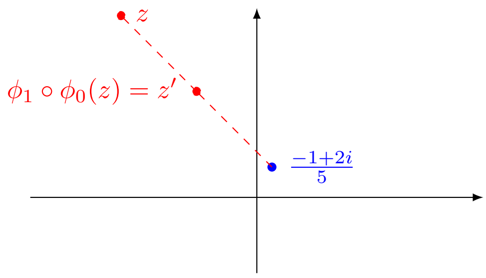
Alors, $\phi_0 \circ \phi_1$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre $\dfrac{-1+2i}{5}$.



$*$ Pour $(i,j) = (1,0)$, on a

$$\begin{aligned} \phi_1 \circ \phi_0(z) &= \frac{1-\mathrm{i}}{2}\overline{\frac{1+\mathrm{i}}{2}\overline{z} + \frac{-1+\mathrm{i}}{2}} + \frac{1+\mathrm{i}}{2} \\ &= -\frac{i}{2}z + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

Alors, $\phi_1 \circ \phi_0$ est l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre $\dfrac{1+2i}{5}$.



b) Soient $r_1, \ldots, r_p$ des élélements de $\{0,1\}$ et $\phi = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_p}$. Notons $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ défini par, en notant k est le reste de la division euclidienne de n par p,

$$s_n = \begin{cases} r_k & \text{si } k \neq 0 \\ r_p & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

et $\tilde{\tau}_n = \phi_{s_1} \circ \cdots \circ \phi_{s_n}(\tau)$ et, enfin, w l'unique élément de $\displaystyle\bigcap_{n \geqslant 1} \tilde{\tau}_n$. Si z est un point fixe de ϕ, alors $\phi^n(z) = z$ pour tout $n \geqslant 1$. Par suite, z appartient à $\tilde{\tau}_{np}$ pour tout $n \geqslant 1$ et donc $z = w$. Ceci montre l'unicité d'un point fixe éventuel de ϕ. D'un autre coté, $\phi(w)$ appartient à $\tilde{\tau}_{n+p}$ pour tout $n \geqslant 1$, donc $\phi(w) = w$.

c) Notons $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dfinie dans la qusetion précédente et posons $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$ et $x_p = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n+p}}{2^n}$. On sait que :

$$f(x) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_p}(f(x_p))$$

mais $x_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_{n+p}}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n} = x$. Alors, $f(x)$ est un point fixe de ϕ.

d) Soit X l'ensemble des complexes z qui sont point fixe de la composée d'un nombre fini d'applications ϕ_0 et ϕ_1. D'après la question précédente, à tout élément z de X correspond une suite $(r_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de $\{0,1\}$ périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $r_n = r_{n+p}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $z = f(x)$ et

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_{pn+k}}{2^{np+k}} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r_k}{2^{np+k}} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \frac{r_k}{2^k} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{np}} \\ &= \frac{2^p}{2^p-1} \sum_{k=1}^{p} \frac{r_k}{2^k} \end{aligned}$$

Notons A la partie de $[0,1]$ des éléments de la forme $\frac{2^p}{2^p-1} \sum_{k=1}^{p} \frac{r_k}{2^k}$, où $p \in \mathbb{N}^*$ et $r_1, \ldots, r_p$ des éléments de $\{0,1\}$. Tout x de $[0,1]$ s'écrit $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{2^n} = \lim_{p\to\infty} y_p$, où $y_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{r_n}{2^n}$. Alors, $x = \lim_{p\to\infty} \frac{2^p}{2^p-1} y_p$. Ceci montre que la partie A est dense dans $[0,1]$ et, puisque f est continue, $X = f(A)$ est dense dans $\tau = f([0,1])$.

III.B - Dérivabilité de f

III.B.1) Supposons que f soit dérivable sur $[0,1]$.

Soient $x \in [0,1]$, $(\alpha_n)_n$ et $(\beta_n)_n$ deux suites d'éléments de $[0,1]$, convergentes vers x et telles que $\alpha_n \leqslant x \leqslant \beta_n$ pour tout n. Posons $f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \varepsilon(y)$, où $\varepsilon(y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0$. Alors,

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x) + \frac{(\beta_n - x)\varepsilon(\beta_n) - (\alpha_n - x)\varepsilon(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

Notons $\gamma_n = \max\left(|\varepsilon(\beta_n)|, |\varepsilon(\alpha_n)|\right)$, on a $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$\left| \frac{(\beta_n - x)\varepsilon(\beta_n) - (\alpha_n - x)\varepsilon(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \right| \leqslant \gamma_n$$

Donc $\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(x)$.

III.B.2) Soit $x \in [0,1]$.

a) Si $x \in [0,1[$, on pose $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k(x)}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{2^k}$, où $r_k = r_k(x)$ et $r_k = 0$ pour $k > n$ et $\beta_n = \alpha_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$. Alors,

$$f(\alpha_n) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(f(0)) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(-1), \quad f(\beta_n) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(f(y)) \text{ et } \beta_n - \alpha_n = \frac{1}{2^n}$$

où $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$. Donc, si n est impair

$$
\begin{aligned}
|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| &= \left|\phi\left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) - \phi(-1)\right| \\
&= \left|f\left(\frac{1}{2^n}\right) - (-1)\right| \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}} (i+1) - 1 + 1\right| \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right| = 2^{-\frac{3}{4}(n-1)}
\end{aligned}
$$

où $\phi = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}$. De même, si n est pair, alors,

$$
\begin{aligned}
|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| &= \left|\phi\left(f\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) - \phi(-1)\right| \\
&= \left|f\left(\frac{1}{2^n}\right) - (-1)\right| \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n-2}{2}} - 1 + 1\right| \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{n-2}{2}}\right| = 2^{-\frac{3n-2}{4}}
\end{aligned}
$$

Par suite,

$$
\left|\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}\right| = 2^n\,|f(\beta_n) - f(\alpha_n)| = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{4}} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n+2}{4}} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}
$$

Donc $\left|\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}\right|$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'après la question précédente, f est non dérivable en x.

b) Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'élément de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ tel que $r_n = 1$ pour tout n. Alors, $1 = \lim_{p\to\infty} \alpha_p$ avec $\alpha_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{r_n}{2^n}$ et posons $\beta_p = 1$. Alors, les suites $(\alpha_p)_p$ et $(\beta_p)_p$ convergent vers 1 et $\alpha_p < \beta_p$ pour tout p. D'un autre coté, $f(\beta_p) = 1$ et

$$
f(\alpha_p) = \phi_{r_1} \circ \cdots \circ \phi_{r_n}(f(0)) = \phi_1^p(-1)
$$

Comme 1 est un point fixe de ϕ_1 et $\beta_p - \alpha_p = 2^{-p}$, on aura

$$
\left|\frac{f(\beta_p) - f(\alpha_p)}{\beta_p - \alpha_p}\right| = 2^p\,|\phi_1^p(1) - \phi_1^p(-1)| = 2^{1+\frac{p}{2}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} +\infty
$$

Ceci montre que f est non dérivable en 1.