**Corrigé de la première épreuve de mathématiques**
**Centrale 2009 - Filière MP**
**Par H. Maarouf CPGE Mohammedia**

# Partie I - Questions préliminaires

**I.1)** La fonction $\Gamma$ étant de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $]0,+\infty[$, donc continue sur $[1,2]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,2[$. En plus, $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$. Par le théorème de Rolle, il existe $c\in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c)=0$.

**I.2)** La fonction $t\mapsto(\ln t)^2t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est continue, intégrable et non identiquement nulle sur $]0,+\infty[$ donc pour tout $x$ strictement positif,

$$\Gamma''(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^2t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}>0$$

En particulier la fonction $\Gamma'$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et on a $\Gamma'(c)=0$, donc $\Gamma'(x)>0$ sur $[2,+\infty[$ car $c<2$. En d'autres termes, $\Gamma$ est strictement croissante sur cet intervalle.

**I.3)** Soit $\gamma$ un réel strictement positif. On sait que $\gamma^n \underset{+\infty}{=} \circ(n!)$. Puisque $\gamma^{x+1} \underset{+\infty}{=} O(\gamma^{[x]+1})$, $\gamma^{x+1} \underset{+\infty}{=} \circ(\Gamma([x]))$. D'une autre part, par croissance de $\Gamma$ au voisinage de $+\infty$, on a $\Gamma([x]) \underset{+\infty}{=} O(\Gamma(x))$. Donc $\gamma^{x+1} \underset{+\infty}{=} \circ(\Gamma(x))$ ou encore $\gamma^x \underset{+\infty}{=} \circ(\Gamma(x))$

# Partie II - Comportement asymptotique de la somme d'une série entière au voisinage de la borne supérieure de son intervalle de convergence.

**II.A)** Soit $\phi$ une fonction continue sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles et intégrable. On suppose de plus que $\phi$ est décroissante sur $[t_0,+\infty[$ pour un certain $t_0\geqslant 0$.

**II.A.1)** La fonction $\phi$ est décroissante sur $[t_0,+\infty[$ donc admet une limite $l$ en $+\infty$. Si $l<0$, alors il existe $A\geqslant t_0$ tel que $\phi(t)<\frac{l}{2}$ et donc $-\phi(t)>\frac{-l}{2}>0$ pour $t\geqslant A$, ce qui est impossible car $\phi$ est intégrable sur $[A,+\infty[$ et $t\mapsto\frac{-l}{2}$ est non intégrable sur $[A,+\infty[$. Donc $l\geqslant 0$ et

$$\forall\ t\in[t_0,+\infty[;\ \phi(t)\geqslant\lim_{x\to+\infty}\phi(x)=\inf_{x\geqslant t_0}\phi(x)=l\geqslant 0$$

(En fait, on a $l=0$ car $f$ est intégrable et décroissante sur $[t_0,+\infty[$.)

**II.A.2)** Soit $h$ un réel strictement positif.

**a)** Soit $N>\frac{t_0}{h}$ de sorte que pour tout $n\geqslant N$, on ait $nh\geqslant Nh\geqslant t_0$. Fixons $n\geqslant N+1$. Pour tout $t\in[(n-1)h,nh]$, on a, par décroissance de $\phi$, $0\leqslant\phi(nh)\leqslant\phi(t)$. Donc

$$0\leqslant h\phi(nh)=\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(nh)\ \mathrm{d}t\leqslant\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ \mathrm{d}t$$

**b)** La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant N+1}\int_{(n-1)h}^{nh}\phi(t)\ \mathrm{d}t$ est convergente car $\phi$ est intégrable, l'inégalité établie dans la question précédente permet de conclure à la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}h\phi(nh)$, puisqu'elle est de terme général positif à partir d'un certain rang et majoré par le terme général d'une série convergente.

**II.A.3)** Soit $\varepsilon>0$. La fonction $\phi$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, donc il existe $A>\max(t_0,1)$ tel que $\displaystyle\int_A^{+\infty}\phi(t)\ \mathrm{d}t<\varepsilon$ et $\phi(A-1)<\varepsilon$. En plus, elle est continue sur le segment $[0,A]$, donc il existe $\delta>0$ tel que pour toute subdivision $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ de ce segment de pas strictement inférieur à $\delta$, on a :

$$\left|\int_0^A\phi(t)\ \mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha_{k+1}-\alpha_k)\phi(\alpha_k)\right|<\varepsilon$$

Soit maintenant $h$ un réel tel que $0 < h < \min(\delta, 1)$ et la subdivison $(0, h, \ldots, ph, A)$ de $[0, A]$ avec $p = \left[\frac{A}{h}\right]$ qui est une subdivision de pas strictement inférieur à $\delta$. Alors,

$$\left| \int_0^A \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{p-1} h\phi(nh) - (A - ph)\phi(ph) \right| < \varepsilon$$

ou encore, puisque $0 \leqslant \phi(ph) < \varepsilon$, $0 \leqslant A - ph < h$ et $h < 1$, $\left| \int_0^A \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{p} h\phi(nh) \right| < \varepsilon + h\varepsilon + \varepsilon < 3\varepsilon$.
D'un autre coté, pour $n \geqslant p+1$, on a $nh \geqslant A \geqslant t_0$. D'après la question précédente,

$$0 \leqslant \sum_{n=p+2}^{+\infty} h\phi(nh) \leqslant \int_{(p+1)h}^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_A^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t < \varepsilon$$

Tenant compte du fait que $h\phi(h(p+1)) \leqslant h\phi(A) < \varepsilon$ et les autres inégalités établies auparavant, nous aurons :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) \right| &\leqslant \left| \int_0^A \phi(t)\ \mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{p} h\phi(nh) \right| + \int_A^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t + \sum_{n=p+2}^{+\infty} h\phi(nh) + h\phi(h(p+1)) \\ &< 6\varepsilon \end{aligned}$$

C'est à dire que $\displaystyle\lim_{h \to 0, h > 0} \sum_{n=0}^{+\infty} h\phi(nh) = \int_0^{+\infty} \phi(t)\ \mathrm{d}t$.

**II.B)** Pour $\alpha > 0$, soit $g_\alpha$ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g_\alpha(t) = t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}$.
*Contrairement à ce qui est énoncé, cette fonction, pour $\alpha < 1$, n'est pas définie en* $0$.

**II.B.1)** On suppose que $\alpha \geqslant 1$. La fonction $g_\alpha$ est continue sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout $t > 0$, $g'_\alpha(t) = t^{\alpha-2}\mathrm{e}^{-t}((\alpha - 1) - t)$. Ceci montre que la fonction $g_\alpha$ est décroissante sur $[t_0, +\infty[$ pour tout $t_0 > \alpha - 1$. Elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ (raison : la définition de $\Gamma$). Ce sont les conditions de **II.A)**. D'après la question **II.A.3)**,

$$\lim_{h \to 0, h > 0} h \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(nh) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)$$

ce qui est, en posant $h = -\ln x$ ou encore $x = \mathrm{e}^{-h}$ :

$$\lim_{x \to 1, x < 1} (-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) = \Gamma(\alpha)$$

**II.B.2)** On considère la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} n^{\alpha-1}x^n$.

**a)** On applique la règle de D'Alembert pour les séries numériques. Pour $x \neq 0$, on a

$$\frac{(n+1)^{\alpha-1} |x|^{n+1}}{n^{\alpha-1} |x|^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\alpha-1} |x| \underset{n}{\mapsto} |x|$$

Le rayon de convergence de cette série entière est donc 1. Notons $S_\alpha$ sa somme.

**b)** D'après **II.A)** et puisque $\Gamma(\alpha) \neq 0$, on a, lorsque $x$ tend vers 1 avec $x < 1$ :

$$(-\ln x) \sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n \ln x) \sim \Gamma(\alpha)$$

mais $(-\ln x) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_\alpha(-n\ln x) = (-\ln x)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{n \ln x} = (-\ln x)^\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}n^x$ et $\ln x \sim x - 1$. Par suite, lorsque $x$ tend vers 1 avec $x < 1$, on aura :

$$S_\alpha(x) \sim \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-x)^\alpha}$$

# Partie III - La première fonction eulérienne.

**III.A)**

**III.A.1)** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels $> 0$. La fonction $f : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est continue positive sur $]0,1[$.
Pour $t$ qui tend vers 0 avec $t > 0$, $f(t) \sim t^{\alpha-1}$ et $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur $]0,1/2]$ car $\alpha - 1 > -1$.
De même, pour $t$ qui tend vers 1 avec $t < 1$, $f(t) \sim (1-t)^{\beta-1}$ et $t \mapsto (1-t)^{\beta-1}$ est intégrable sur $[1/2,1[$ car $\beta - 1 > -1$.
La fonction $f : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est donc intégrable sur $]0,1[$.

**III.A.2)** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels $> 0$.
$(i)$ Soient $u, v$ tels que $0 < u < v < 1$. Avec le changement de variables $s = 1-t$, on a

$$\int_u^v t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,t \quad = \quad \int_{1-v}^{1-u} (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,s$$

en tendant $u$ vers 0 et $v$ vers 1, nous aurons : $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.
$(ii)$ Soient $u, v$ tels que $0 < u < v < 1$. Avec le changement de variables $s = \frac{t}{1-t}$ (donc $t = \frac{s}{1+s}$ et $\mathrm{d}\,t = \frac{\mathrm{d}s}{(1+s)^2}$), on a

$$\begin{aligned}\int_u^v t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}\,t &= \int_{\frac{u}{1-u}}^{\frac{v}{1-v}} \left(\frac{s}{1+s}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{1+s}\right)^{\beta-1}\frac{\mathrm{d}\,s}{(1+s)^2}\\ &= \int_{\frac{u}{1-u}}^{\frac{v}{1-v}} \frac{s^{\alpha-1}}{(1+s)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}\,s\end{aligned}$$

en tendant $u$ vers 0 et $v$ vers 1, nous aurons : $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}\,t$.
$(iii)$ Soient $u, v$ tels que $0 < u < v$. A l'aide d'une integration par partie, on a :

$$\alpha\int_u^v \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}\,t = \left[\frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\right]_u^v + (\alpha+\beta)\int_u^v \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}}\,\mathrm{d}\,t$$

en tendant $u$ vers 0 et $v$ vers $+\infty$ et rappelons que $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, nous aurons :

$$\alpha\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{d}\,t = (\alpha+\beta)\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}}\,\mathrm{d}\,t$$

C'est à dire que : $B(\alpha+1,\beta) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}B(\alpha,\beta)$.
(Sans oublier biensûr que les fonctions : $t \mapsto \frac{t^\alpha}{(1+t)^{\alpha+\beta+1}}$ et $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}$ sont intégrables.)

**III.B)** On se propose dans cette question de montrer, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la relation suivante :

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

**III.B.1)** On suppose que cette relation est vraie pour $\alpha > 2$ et $\beta > 2$ et fixons 2 réels strictement positifs $\alpha$ et $\beta$.
Si $\alpha > 1$ et $\beta > 2$ (même chôse d'après $(i)$ si $\alpha > 2$ et $\beta > 1$), alors $\alpha + 1 > 2$ et on aura :

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}B(\alpha+1,\beta) \quad \text{( d'après } (iii))\\ &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \quad (\alpha+1>2 \text{ et } \beta>2)\\ &= \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \quad (\text{la relation } \Gamma(x+1)=x\Gamma(x))\\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

Pour les autres cas, $[\alpha > 1$ et $\beta > 1]$, $[\alpha > 0$ et $\beta > 1]$ (qui est le même cas que $[\alpha > 1$ et $\beta > 0]$) puis $[\alpha > 0$ et $\beta > 0]$, on fait la même démarche.

**III.B.2)** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement supérieurs à 2. Pour $n > 0$, on pose :

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}$$

**a)** Puisque $\alpha-1>1$ et $\beta-1>1$, la fonction $\psi_{\alpha,\beta} : t \mapsto t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Notons $A_{\alpha,\beta} = \sup\limits_{t\in[0,1]}\left|\psi'_{\alpha,\beta}(t)\right|$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall\ x,y \in [0,1],\ |\psi_{\alpha,\beta}(x)-\psi_{\alpha,\beta}(y)| \leqslant A_{\alpha,\beta}\,|x-y|$$

La fonction $\psi_{\alpha,\beta}$ est alors lipschitzienne sur $[0,1]$.

**b)** Soit $n$ un entier naturel non nul. On a :

$$u_n(\alpha,\beta) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}\,t$$

et

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 \psi_{\alpha,\beta}(t)\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\psi_{\alpha,\beta}(t)\,\mathrm{d}\,t$$

Par suite, puisque pour $k\in[\![0,n-1]\!]$ et $t\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$, on a $\left|t-\frac{k}{n}\right| = t-\frac{k}{n} \leqslant \frac{1}{n}$ et du fait que $\psi_{\alpha,\beta}$ est $A_{\alpha,\beta}$-lipschitzienne sur $[0,1]$, on aura

$$\begin{aligned}
|u_n(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)-\psi_{\alpha,\beta}(t)\right)\,\mathrm{d}\,t\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|\psi_{\alpha,\beta}\left(\frac{k}{n}\right)-\psi_{\alpha,\beta}(t)\right|\,\mathrm{d}\,t\\
&\leqslant A_{\alpha,\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(t-\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}\,t\\
&\leqslant A_{\alpha,\beta}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{A_{\alpha,\beta}}{2n}
\end{aligned}$$

**c)** Rappelons que le rayon de convergence des deux séries entières $\sum\limits_{n\,\geqslant\,0} n^{\alpha-1}x^n$ et $\sum\limits_{n\,\geqslant\,0} n^{\beta-1}x^n$ est 1. Le produit de Cauchy de ces deux séries a pour rayon de convergence au moins 1. Donc pour $x\in[0,1[$, on a :

$$\begin{aligned}
S_\alpha(x)S_\beta(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^{\alpha-1}x^n\sum_{n=0}^{+\infty} n^{\beta-1}x^n\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}\right)x^n
\end{aligned}$$

Remarquons que $\sum_{k=0}^n k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1} = 0$ pour $n=0$ ou $k=n$. Alors,

$$\begin{aligned}
S_\alpha S_\beta(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} k^{\alpha-1}(n-k)^{\beta-1}\right)x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\beta-1}\right)n^{\alpha+\beta-1}x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n
\end{aligned}$$

*Dans l'énoncé, la somme commence de 0, alors que $u_0(\alpha,\beta)$ n'est pas définie !*
Toujours pour $0 \leqslant x < 1$, ce qui assure l'absolue convergence des séries ci-dessous, on a :

$$\begin{aligned}
|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(\alpha,\beta)n^{\alpha+\beta-1}x^n - B(\alpha,\beta)\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-1}x^n\right| \\
&= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta))n^{\alpha+\beta-1}x^n\right| \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}|u_n(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)|\, n^{\alpha+\beta-1}x^n \\
&\leqslant \frac{A_{\alpha,\beta}}{2}\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\alpha+\beta-2}x^n}_{S_{\alpha+\beta-1}(x)} \ \text{(d'après II.B.2))}
\end{aligned}$$

Maintenant, d'après la question **II.B.2) b)**, lorsque $x$ tend vers 1 et $x < 1$, on a :

$$(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta-1}(x) \sim (1-x)^{\alpha+\beta}\frac{\Gamma(\alpha+\beta-1)}{(1-x)^{\alpha+\beta-1}} = (1-x)\Gamma(\alpha+\beta-1) \longrightarrow 0$$

D'une autre part, par la même question, l'expression :

$$(1-x)^{\alpha+\beta}\,|S_\alpha(x)S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)S_{\alpha+\beta}(x)| = \left|(1-x)^\alpha S_\alpha(x)(1-x)^\beta S_\beta(x) - B(\alpha,\beta)(1-x)^{\alpha+\beta}S_{\alpha+\beta}(x)\right|$$

tend, lorsque $x$ tend vers 1 et $x < 1$, vers $|\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) - B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)|$ et en même temps vers 0. Alors,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)$$

**III.C)** Formule des compléments.

**III.C.1)** Posons $B(\alpha, 1-\alpha) = \displaystyle\int_0^1 g(\alpha,t)\,\mathrm{d}\,t$ où $g$ est la fonction définie sur $]0,1[^2$ par $g(\alpha,t) = t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha}$.
La fonction $g$ est :
- clairement continue (et positive) sur $]0,1[^2$,
- pour tout $\alpha \in ]0,1[$, la fonction $t \mapsto g(\alpha,t)$ est intégrable sur $]0,1[$.
- pour tout segment $[u,v]$ de $]0,1[$ et pour tout $\alpha$ de ce segment, on a, puisque $0 < t < 1$ et $0 < 1-t < 1$,

$$|g(\alpha,t)| = t^{\alpha-1}(1-t)^{-\alpha} \ \leqslant\ t^{u-1}(1-t)^{-v}$$

  En plus la fonction $t \mapsto t^{u-1}(1-t)^{-v}$ est continue et intégrable sur $]0,1[$ d'après la question **III-A.1)** (en prenant $\alpha = u, \beta = 1-v$ dans la question **III-A.1)**)

La fonction $t \mapsto B(\alpha, 1-\alpha)$ est donc continue sur $]0,1[$ par le théorème de la convergence dominée.

**III.C.2)** Soient $p$ et $q$ deux entiers vérifiant : $0 < p < q$.

**a)** L'inégalité $p < q$ ce traduit par $p+1 \leqslant q$, donc $2p+2 \leqslant 2q$ ou encore $2p+1 < 2q$. Ceci montre que $0 < \dfrac{2p+1}{2q} < 1$. La relation $(ii)$ donne :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = \int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{2p+1}{2q}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}\,t$$

Pour $0 < u < v$ et avec le changement de variables $s = t^{\frac{1}{2q}}$ ou encore $t = s^{2q}$ et $d\,t = 2qs^{2q-1}d\,s$ :

$$\begin{aligned}
\int_u^v \frac{t^{-\frac{2p+1}{2q}}}{1+t}\,\mathrm{d}\,t &= \int_{u^{\frac{1}{2q}}}^{v^{\frac{1}{2q}}}\frac{s^{2p+1-2q}}{1+s^{2q}}2qs^{2q-1}d\,s \\
&= 2q\int_{u^{\frac{1}{2q}}}^{v^{\frac{1}{2q}}}\frac{s^{2p}}{1+s^{2q}}d\,s
\end{aligned}$$

Puis on fait tendre $u$ vers 0 et $v$ vers $+\infty$ pour obtenir :

$$B\left(\frac{2p+1}{2q}, 1 - \frac{2p+1}{2q}\right) = 2q\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p}}{1+t^{2q}}d\,t$$

**b)** Pour $k \in [\![0, q-1]\!]$, on note $z_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k+1}{2q}\pi}$. On remarque que $z_0, \dots, z_{q-1}$ sont des racines deux à deux distinctes du polynôme $1+X^{2q}$ et de même pour $-z_0, \dots, -z_{q-1}$. En plus, s'il existe $k, l$ tels que $0 \leqslant k \leqslant l \leqslant q-1$ tels que $z_k = -z_l$, alors $-1 = \mathrm{e}^{i\frac{(l-k)}{q}\pi}$. Cette égalité n'est possible que si $\frac{l-k}{q}$ est un entier impair et ce n'est pas le cas car $0 \leqslant l-k < q-1$. Donc les racines du polynôme $1+X^{2q}$ sonts $z_0, \dots, z_{q-1}, -z_0, \dots, -z_{q-1}$ qui sont aussi les pôles simples de la fraction rationnelle $\dfrac{X^{2p}}{1+X^{2q}}$, qui est sous-forme irréductible et de degré strictement négatif. Sa décomposition est :

$$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = \sum_{k=0}^{q-1} \left( \frac{a_k}{X-z_k} + \frac{b_k}{X+z_k} \right)$$

avec $a_k = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}$, $b_k = \frac{P(-z_k)}{Q'(-z_k)}$, $P = X^{2p}$ et $Q = 1+X^{2q}$. Donc, avec $z_k^{2q} = -1$,

$$a_k = \frac{z_k^{2p}}{2qz_k^{2q-1}} = \frac{z_k^{2p+1}}{-2q} \text{ et } b_k = \frac{(-z_k)^{2p}}{2q(-z_k)^{2q-1}} = \frac{-z_k^{2p+1}}{-2q}$$

Enfin,

$$\frac{X^{2p}}{1+X^{2q}} = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left( \frac{1}{X-z_k} - \frac{1}{X+z_k} \right)$$

**c)** Soit $c$ un nombre complexe de partie imaginaire $b$ non nulle et de partie réelle $a$. Pour $t$ un nombre réel,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-c} &= \frac{1}{t-a-ib} \\ &= \frac{t-a+ib}{(t-a)^2+b^2} \\ &= \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} + \frac{i}{b} \frac{1}{(\frac{t-a}{b})^2+1} \end{aligned}$$

Sous-cette forme, on voit bien qu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-c}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier est donnée par $t \mapsto \dfrac{1}{2} \ln\left((t-a)^2+b^2\right) + i\arctan\left(\dfrac{t-a}{b}\right)$. Soit $\varphi$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left( \frac{1}{t-z_k} - \frac{1}{t+z_k} \right)$$

Puisque $z_k$ n'est pas un réel, d'après ce qui précède, une primitive de $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ est $\phi$ telle que :

$$\begin{aligned} \forall\, t \in \mathbb{R},\ \phi(t) &= -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left( \frac{1}{2} \ln\left((t-Re(z_k))^2 + Im(z_k)^2\right) + i\arctan\left(\frac{t-Re(z_k)}{Im(z_k)}\right) \right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{2} \ln\left((t+Re(z_k))^2 + Im(z_k)^2\right) - i\arctan\left(\frac{t+Re(z_k)}{-Im(z_k)}\right) \right) \\ &= -i\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left( \arctan\left(\frac{t-Re(z_k)}{Im(z_k)}\right) + \arctan\left(\frac{t+Re(z_k)}{Im(z_k)}\right) \right) \\ &\quad -\frac{1}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} \left( \frac{1}{2} \ln\left( \frac{(t-Re(z_k))^2 + Im(z_k)^2}{(t+Re(z_k))^2 + Im(z_k)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

D'une autre part, pour tout entier $k \in [\![0, q-1]\!]$, on a $0 < \frac{2k+1}{2q}\pi < \pi$ et donc $Im(z_k) > 0$. En particulier, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = -i\frac{\pi}{2q} \sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1}$ et $\displaystyle\lim_{t\to 0} \phi(t) = 0$. Soient maintenant $u$ et $v$ deux réels tels que $0 < u < v$.

$$\int_u^v \frac{t^{2p}}{2q+1} \mathrm{d}\,t = \int_u^v \varphi(t) \mathrm{d}\,t = \phi(v) - \phi(u)$$

Lorsque $u$ tend vers 0 et $v$ vers $+\infty$, on aura :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2q+1} \mathrm{d}\, t = \lim_{v\to+\infty} \phi(v) - \lim_{t\to 0} \phi(u) = -i\frac{\pi}{2q}\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{2p+1} = -i\frac{\pi}{2q} S$$

avec $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} z^{2k+1}$ et $z = \mathrm{e}^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}$. On a $z^{2q} = -1$ donc $z^2 \neq 1$ et

$$z^2 S = \sum_{k=0}^{q-1} z^{2k+3} = \sum_{k=1}^{q} z^{2k+1} = S - 2z$$

Par suite, $S = \dfrac{2z}{1-z^2} = 2\dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}}{1-\mathrm{e}^{i\frac{2p+1}{q}\pi}} = 2\dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}}{-2i\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)\mathrm{e}^{i\frac{2p+1}{2q}\pi}} = \dfrac{1}{-i\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$. D'où :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2q+1} \mathrm{d}\, t = \frac{\pi}{2q}\frac{1}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)}$$

**III.C.3)** Soit $\alpha \in ]0,1[$. On sait, d'après III-B), que

$$\Gamma(\alpha, 1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha)\Gamma(\alpha+1-\alpha) = B(\alpha, 1-\alpha)\Gamma(1) = B(\alpha, 1-\alpha)$$

Maintenant, pour $\varepsilon > 0$, on choisit $q$ entier tel que $q > 1$ et $\frac{1}{q} < \varepsilon$ et on pose et $p = [q\alpha]$ la partie entière de $q\alpha$ de sorte que : $\frac{2p}{2q} \leqslant \alpha < \frac{2p+2}{2q}$ et $\frac{2p}{2q} \leqslant \frac{2p+1}{2q} < \frac{2p+2}{2q}$. Donc $\frac{p}{q} < 1$ et

$$\left|\frac{2p+1}{2q} - \alpha\right| < \frac{2p+2}{2q} - \frac{2p}{2q} = \frac{1}{q} < \varepsilon$$

En d'autres termes, l'ensemble $A = \left\{\dfrac{2p+1}{2q}\ ;\ 0 < p < q \text{ et } p, q \text{ entiers}\right\}$ est dense dans $]0,1[$. Pour $\beta = \frac{2p+1}{2q} \in A$, on a :

$$\begin{aligned} B(\beta, 1-\beta) &= 2q\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}}{2q+1} \mathrm{d}\, t \quad \text{d'après III-C.2.a)} \\ &= \frac{\pi}{\sin\left(\frac{2p+1}{2q}\pi\right)} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\beta\pi)} \end{aligned}$$

La fonction $\alpha \mapsto B(\alpha, 1-\alpha) - \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$ étant continue, par la question **III-C.1)**, sur $]0,1[$ et identiquement nulle sur $A$ qui est dense dans $]0,1[$. Elle est donc identiquement nulle sur $]0,1[$. C'est à dire que :

$$\forall\ \alpha \in ]0,1[,\ B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

# Partie IV - L'opérateur d'Abel

Dans cette partie, $\alpha$ est un réel de $]0,1[$.

**IV.A) -**

**IV.A.1)** Soit $f$ un élément de $E$. La fonction $f$ est continue sur le segment $[0,1]$, donc bornée et pour tout $x$ de $]0,1]$ et tout $t$ de $]0,x[$, on a :

$$\left|\frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\right| \leqslant \frac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$$

En plus, la fonction $t \mapsto \frac{\|f\|}{(x-t)^\alpha}$ est continue et intégrable sur $]0,x[$ car $\alpha < 11$. Donc la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}$ est intégrable sur $]0,x[$.

**IV.A.2)** Pour $f \in E$, on note $A_\alpha f$ la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$A_\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

**a)** Soit $f$ un élément de $E$ et $x$ un élément de $[0,1]$. L'égalité :

$$A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t$$

est vraie pour $x = 0$. Supposons que $x > 0$ et soit $y \in ]0, x[$. Avec le changement de variables $t = sx$, on aura :

$$\int_0^y \frac{f(t)}{(x-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t = \int_0^{\frac{y}{x}} \frac{f(sx)}{(x-sx)^\alpha} x\, \mathrm{d}\, s = x^{1-\alpha} \int_0^{\frac{y}{x}} \frac{f(sx)}{(1-s)^\alpha}\, \mathrm{d}\, s$$

puis on fait tendre $y$ vers $x$ pour obtenir $A_\alpha f(x) = x^{1-\alpha} \displaystyle\int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t$.

**b)** La fonction $(t,x) \mapsto \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}$ est continue sur $[0,1[ \times [0,1]$. Pour tout $x$ de $[0,1]$, on a $\left|\frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\right| \leqslant \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ et la fonction $t \mapsto \frac{\|f\|}{(1-t)^\alpha}$ est continue et intégrable sur $[0,1[$. Donc la fonction $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t$ est continue sur $[0,1]$ ce qui montre, par le théorème de la convergence dominée, la continuité de la fonction : $A_\alpha f : x \mapsto x^{1-\alpha} g(x)$ sur $[0,1]$.

**c)** l'application $A_\alpha$ est linéaire par linéarité de l'intégrale et pour tout $f$ de $E$, $A_\alpha f$ est continue. Donc $A_\alpha$ est un endomorphisme de $E$. Soit maintenant $f$ un élément de $E$. Pour tout $x$ de $[0,1]$, on a :

$$|A_\alpha f(x)| = x^{1-\alpha} \left| \int_0^1 \frac{f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t \right| \leqslant x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{|f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t \leqslant x^{1-\alpha} \|f\| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, t}{(1-t)^\alpha}$$

D'un autre coté,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\, t}{(1-t)^\alpha} = \lim_{\substack{y \to 1 \\ y<1}} \int_0^y \frac{\mathrm{d}\, t}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\substack{y \to 1 \\ y<1}} \left(1 - \frac{1}{(1-y)^{1-\alpha}}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$$

Par suite, $|A_\alpha f(x)| \leqslant x^{1-\alpha} \frac{\|f\|}{1-\alpha} \leqslant \frac{\|f\|}{1-\alpha}$ et donc $A_\alpha$ est continue et $|||A_\alpha||| \leqslant \frac{1}{1-\alpha}$. Mais pour $f = 1$ la focntion constante, on a $\|f\| = 1$ et $\|A_\alpha f\| = \frac{1}{1-\alpha}$. Ceci montre que $|||A_\alpha||| = \frac{1}{1-\alpha}$.

**IV.B)** On définit la suite $(A_\alpha^n)_{n \geqslant 0}$ par :

$$A_\alpha^n = \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } n = 0, \\ A_\alpha \circ A_\alpha^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

**IV.B.1)** On pose $\beta = 1 - \alpha$.

**a)** Soit $n \geqslant 1$ un entier. Si $n = 1$, on a montré que : $\forall\, f \in E, \forall\, x \in [0,1],\ |A_\alpha f(x)| \leqslant x^{1-\alpha} \frac{\|f\|}{1-\alpha} = \frac{x^\beta \|f\|}{\beta}$ et, puisque $\Gamma(1+\beta) = \beta\Gamma(\beta)$, on a :

$$\forall\, f \in E, \forall\, x \in [0,1],\ |A_\alpha f(x)| \leqslant \frac{x^\beta \|f\|}{\beta} = \frac{x^\beta \Gamma(\beta)}{\Gamma(1+\beta)} \|f\|$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 1$. L'entier $n \geqslant 1$ étant fixé, supposons que :

$$\forall\, f \in E, \forall\, x \in [0,1],\ |A_\alpha^n f(x)| \leqslant \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$$

Alors, pour tout $f$ de $E$ et tout $x$ de $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} |A_\alpha^{n+1} f(x)| &= x^\beta \left| \int_0^1 \frac{A_\alpha^n f(xt)}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t \right| \\ &\leqslant x^\beta \int_0^1 \frac{|A_\alpha^n f(xt)|}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t \\ &\leqslant x^\beta \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\| \int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha}\, \mathrm{d}\, t \quad \text{(Hypothèse de récurrence)} \end{aligned}$$

Il suffit de remarquer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n\beta}}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}\,t = B(1+n\beta,\beta) = \frac{\Gamma(1+n\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+(n+1)\beta)}$. On remplace l'intégrale dans l'inégalié précédente, on trouve :

$$|A_\alpha^{n+1} f(x)| \;\leqslant\; \frac{x^{(n+1)\beta}(\Gamma(\beta))^{n+1}}{\Gamma(1+(n+1)\beta)} \|f\|$$

**b)** $A_\alpha^n$ est composé d'endomorphismes continus de $E$, c'est bien un endomorphisme continu. La majoration de sa norme est conséquence immédiate de la question précédente.

**IV.B.2)** Soient $\varepsilon$ deux réels strictement positifs. D'après la question **I.3)**, il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, on a $\left((\gamma\Gamma(\beta))^{1/\beta}\right)^x \;\leqslant\; \varepsilon\Gamma(x)$. Donc pour $n$ entier avec $n \;\geqslant\; \frac{A}{\beta}$, on a par croissance de $\Gamma$ et par le fait que $x = n\beta \;\geqslant\; A$ :

$$\gamma^n(\Gamma(\beta))^n = \left((\gamma\Gamma(\beta))^{1/\beta}\right)^x \;\leqslant\; \varepsilon\Gamma(x) \;\leqslant\; \varepsilon\Gamma(1+n\beta)$$

C'est à dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma^n \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} = 0$$

**IV.B.3)** Soit $\lambda$ un nombre complexe non nul et $f$ un élément de $E$.

**a)** On a pour tout $n$ entier naturel non nul, d'après la question **IV-B.1)**

$$\|(1+|\lambda|)^n \lambda^n A_\alpha^n f\| \;\leqslant\; (1+|\lambda|)^n\, |\lambda|^n \,\frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \|f\|$$

Donc, avec cette majoration et la question **IV-B.2)**, on a $\|\lambda^n A_\alpha^n f\| = \circ\left(\dfrac{1}{1+|\lambda|}\right)^n$. Puisque $\lambda$ est non nul, donc $1+|\lambda| > 1$ et la série $\displaystyle\sum_{n\,\geqslant\,0} \lambda^n A_\alpha^n f$ est normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[0,1]$.

Notons $g$ sa somme.

**b)**

$$\begin{aligned}
\lambda A_\alpha g &= \lambda A_\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{n+1} A_\alpha^{n+1} f \quad (A_\alpha \text{ est continu}) \\
&= g - f
\end{aligned}$$

Donc $(\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha) g = f$.

**c)** D'après la question précédente, l'opérateur $\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha$ est surjectif. Soit $f$ un élément du noyau de $\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha$. Alors, $\lambda A_\alpha f = f$. Par simple récurrence sur $n$, on aura pour tout $n$, $\lambda^n A_\alpha^n f = f$. Pour $x$ élément de $[0,1]$, la série $\displaystyle\sum_{n\,\geqslant\,0} \lambda^n A_\alpha^n f(x) = \sum_{n\,\geqslant\,0} f(x)$ est convergente. Donc $f(x) = 0$. L'opérateur $\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha$ est injectif. Il est donc inversible. Son inverse $(\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1}$ appliqué à un élément $f$ quelconque de $E$ est $g = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n f = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n\right)(f)$, par définition de $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$. En d'autres termes,

$$(\mathrm{id}_E - \lambda A_\alpha)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n A_\alpha^n$$

**IV.C)** Pour tout $n$ entier naturel, on note $e_n$ la fonction $t \mapsto t^n$.

**IV.C.1)** **a)** Soit $n$ un entier naturel et $x$ un élément de $[0,1]$.

$$A_\alpha e_n(x) = x^{1-\alpha} \int_0^1 \frac{x^n t^n}{(1-t)^\alpha}\,\mathrm{d}\,t = x^{n+\beta} B(1+n,\beta)$$

**b)** De même,

$$\begin{aligned}
A_{1-\alpha}\circ A_\alpha e_n(x) &= B(1+n,\beta)x^\alpha \int_0^1 \frac{x^{n+\beta}t^{n+\beta}}{(1-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}\,t\\
&= B(1+n,\beta)B(1+\beta+n,\alpha)x^{n+1}\\
&= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(n+1+\beta)}\frac{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(n+1+\beta+\alpha)}x^{n+1} \quad \text{(d'après III-B))}
\end{aligned}$$

Rappelons que $\alpha+\beta=1$, $\Gamma(n+1)=n!$ et, par **III-C.3)**, $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. Donc :

$$A_{1-\alpha}\circ A_\alpha e_n = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\frac{e_{n+1}}{n+1}$$

**IV.C.2)** Notons $\mathcal{P}$ le sous-espace de $E$ formé des fonctions polynomiales sur $[0,1]$. La famille $(e_n)_{n\,\geqslant\,0}$ est une base de $\mathcal{P}$. Les opérateurs linéaires $P$ et $A_{1-\alpha}\circ A_\alpha$ coïncident sur les éléments de cette base. Ils coïncident donc sur $\mathcal{P}$.

**IV.C.3)** Formule d'inversion d'Abel.

**a)** $P$ est linéaire et pour tout $f$ de $E$, $Pf$ est une primitive de $f$ sur $[0,1]$ et donc $Pf$ est continue. C'est à dire que $P$ est un endomorphisme de $E$. En plus,

$$|Pf(x)| = \left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \int_0^x |f(t)|\,\mathrm{d}\,t \leqslant \int_0^1 \|f\|\,\mathrm{d}\,t = \|f\|$$

Ceci montre que $P$ est continu et que $|||P||| \leqslant 1$. Pour $f=1$, on a $\|f\|=1$ et $Pf(x)=x$, donc $\|Pf\|=1=\|f\|$ et ceci prouve que $|||P|||=1$.

**b)** On pose $B_\alpha = A_{1-\alpha}\circ A_\alpha$. L'opérateur $B_\alpha$ est continu comme composé d'opérateurs continus. D'après la question précédente, l'opérateur $B_\alpha - \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}P$ est continu et, d'après IV-C.2), nul sur $\mathcal{P}$. d'une autre part, le théorème de Weirstrass montre que $\mathcal{P}$ est dense dans $E$ pour la norme $\|\cdot\|$. Donc $B_\alpha - \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}P$ nul sur $E$ et $B_\alpha = \dfrac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}P$.

**c)** Pour $f$ un élément de $E$, on sait que $f$ est continue sur $[0,1]$ et que $Pf$ est une primitive de $f$ sur $[0,1]$. Alors, $Pf$ est continûment dérivable sur $[0,1]$ et $DPf=f$. En d'autres termes, $D\circ P$ est bien défini et $D\circ P = \mathrm{id}_E$. Mais par la question précédente, $B_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}P$, donc $D\circ B_\alpha$ est bien défini et il égal à $\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\mathrm{id}_E$.

**d)** Soit $f$ un élément de $E$ tel que $A_\alpha f = 0_E$. Alors, $B_\alpha f = A_{1-\alpha}A_\alpha f = A_{1-\alpha}0_E = 0_E$ puis on compose de nouveau par $D$ et on trouve :

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}f = 0_E \text{ et donc } f = 0_E$$

ce qui montre que $A_\alpha$ est injectif.
(*On ne peut pas composer directement par $D\circ A_{1-\alpha}$ tant qu'on n'a pas encore montré son existence.*)