MATHÉMATIQUES II

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et, de manière usuelle, tout polynôme est identifié à sa fonction polynôme associée.

Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Pour un P de $\mathbb{R}[X]$, on considère, de manière usuelle, les dérivées successives de P : $P^{(0)} = P$, et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = [P^{(n)}]'$.

Pour un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, un entier naturel n et un réel a, on définit le polynôme de Taylor d'ordre n de P en a par :

$$T_{n,a}(P)(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P^{(i)}(a)}{i!}(X-a)^i .$$

Soit une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et de classe C^n. On rappelle qu'elle admet, en tout point a de cet intervalle, un unique développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + o[(x-a)^n] .$$

La fonction polynôme

$$\left[x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i\right]$$

est appelée partie régulière de ce développement limité.

Dans la troisième partie, on note $\mathscr{E}_2$ le plan affine euclidien usuel muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et dans la dernière partie, on note $\mathscr{E}_3$ l'espace affine euclidien usuel de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, encore noté $\mathscr{R}_0$, $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les éléments de $\mathscr{E}_2$ et $\mathscr{E}_3$ seront indifféremment appelés vecteurs ou points selon l'interprétation que l'on en a.

Filière MP

Si M est barycentre du système pondéré $(A_i,\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ non nul, on a :

$$M = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i\right).$$

Chaque point M de $\mathscr{E}_2$ (ou de $\mathscr{E}_3$) est identifié à la famille de ses coordonnées (x,y) (ou (x, y, z)) dans le repère $\mathscr{R}_0$, ce qui est contenu dans la notation $M(x, y)$ (ou $M(x, y, z)$). De même chaque vecteur $\vec{u}$ est identifié à la famille de ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}_0$ du repère $\mathscr{R}_0$.

Dans la première partie, on étudie une famille de polynômes.

Ces polynômes interviennent ensuite dans les trois parties qui suivent dans trois situations différentes.

Si la troisième partie utilise un résultat de la deuxième, pour le reste les trois dernières parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie I - Une fonction polynomiale

Un calcul simple qui n'est pas demandé ici (intégrations par parties successives par exemple) donne pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$I_m = \int_0^1 t^m (1-t)^m dt = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Pour tout m entier naturel *non nul*, on considère la fonction polynomiale L_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$L_m(x) = \frac{1}{I_m}\int_0^x t^m (1-t)^m dt.$$

I.A -

I.A.1) Donner une expression développée de $L_m(x)$ pour $m = 1$ et pour $m = 2$.

I.A.2) Calculer $L_m(x) + L_m(1-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Préciser $L_m(\frac{1}{2})$.

On vérifie que L_m est à coefficients entiers. Nous l'admettrons.

I.B -

I.B.1) Étudier suivant m l'existence ainsi que l'ordre de multiplicité des éventuelles racines de L_m et de L'_m dans l'intervalle $[0,1]$.

I.B.2) En considérant le signe de $L''_m(x)$, étudier la monotonie de l'application

$$\left[x \mapsto \frac{L_m(x)}{x}\right] \text{ sur l'intervalle } \left]0, \frac{1}{2}\right[.$$

I.B.3) Donner une allure de la courbe représentative de L_m sur $[0,1]$. On précisera les points à tangente horizontale, on montrera l'existence d'un centre de symétrie et on précisera la convexité.

I.C - Les résultats de cette question seront utilisés dans la dernière partie.

I.C.1) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (x,y) \in [0,1]^2 \\ L'_m(x) = L'_m(y) \end{cases}$$

I.C.2) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (\alpha, \beta, \gamma) \in [0,1]^3 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ L'_m(\alpha) = L'_m(\beta) = L'_m(\gamma) \end{cases}$$

I.C.3) Résoudre le système :

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in [0,1]^4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1 \\ L'_m(\alpha_1) = L'_m(\alpha_2) = L'_m(\alpha_3) = L'_m(\alpha_4) \end{cases}$$

Partie II - Les polynômes de Taylor

Dans cette partie, m est un entier naturel non nul et n est un entier tel que $n > 3m$.

II.A -

On rappelle et on admet que, pour tout a de $\mathbb{R}$, la famille $((X-a)^p)_{p \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Vérifier que l'application $[P \mapsto T_{n,a}(P)]$ définit un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.

Préciser son image, vérifier que son noyau est un idéal de $\mathbb{R}[X]$ et en donner un générateur.

II.B - Pour (R,S) de $(\mathbb{R}_m[X])^2$, déterminer les polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et en 1 du polynôme :

$$U(X) = R(X)L_m(1-X) + S(X)L_m(X).$$

II.C - Pour P de $\mathbb{R}_n[X]$, on note respectivement P_0 et P_1 ses polynômes de Taylor d'ordre m en 0 et en 1 et on pose :

$$[\Phi(P)](X) = P_0(X)L_m(1-X) + P_1(X)L_m(X).$$

II.C.1) Montrer que l'application $[P \mapsto \Phi(P)]$ est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.C.2) Préciser les dimensions des sous-espaces propres de cette application et donner pour chacun une base.

Partie III - Un raccord

III.A -

III.A.1)

À l'aide de la première partie, déterminer un polynôme Q_1 tel que :

$$\deg(Q_1) \le 3,\ Q_1(-1) = 0,\ Q_1(1) = 1,\ \text{et } Q'_1(-1) = Q'_1(1) = 0.$$

Existe-t-il d'autres polynômes remplissant ces cinq conditions ?

III.A.2) Déterminer de même, sans en donner la forme développée, un polynôme Q_2 tel que :

$$\begin{cases} \deg(Q_2) \le 5 \\ Q_2(-1) = 0,\ Q_2(1) = 1 \\ Q'_2(-1) = Q'_2(1) = Q''_2(-1) = Q''_2(1) = 0 \end{cases}$$

III.B - Soient $g_1 : t \mapsto (x_1(t), y_1(t))$ de classe C^1 sur $]-\infty, -1]$, paramétrage d'un arc γ_1 et $g_2 : t \mapsto (x_2(t), y_2(t))$ de classe C^1 sur $[1, +\infty[$, paramétrage d'un arc γ_2.

Si h_1 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_1 en -1 et h_2 la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de x_2 en 1, on pose :

$$x_3(t) = Q_1(-t)h_1(t) + Q_1(t)h_2(t).$$

De même, si k_1 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de y_1 en -1 et si k_2 est la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 de y_2 en 1, on pose :

$$y_3(t) = Q_1(-t)k_1(t) + Q_1(t)k_2(t).$$

On obtient ainsi une fonction vectorielle $g_3 = (x_3, y_3)$ et on considère γ, raccord de γ_1 et γ_2, l'arc paramétré par g avec :

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) & \text{si } t \in]-\infty, -1[\\ g_3(t) & \text{si } t \in [-1, 1] \\ g_2(t) & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{cases}$$

Montrer brièvement en s'appuyant sur une étude faite dans la deuxième partie que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

III.C - Étude d'un exemple

Ici a est un réel strictement positif et on prend :

$$\begin{cases} g_1(t) = (-1 + a(t+1), 1 - a(t+1)) \\ g_2(t) = (1 + a(t-1), 1 + a(t-1)) \end{cases}$$

III.C.1) Représenter sur un même dessin les arcs γ_1 et γ_2.

III.C.2) Donner l'expression développée de la fonction g_3 (on ne demande pas sa représentation graphique).

III.C.3) Montrer que pour $a > 3$, le raccord coupe l'axe des ordonnées en deux points distincts que l'on précisera.

Partie IV - Une animation

On note $I = \{1, 2, 3, 4\}$.

On considère un ensemble de quatre points $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de $\mathscr{E}_3$ non coplanaires, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de plan affine qui les contienne tous les quatre. On a ainsi un tétraèdre non aplati $A_1A_2A_3A_4$.

On note (x_i, y_i, z_i) le triplet des coordonnées du point A_i pour $i \in I$.

IV.A -

IV.A.1) Soit i dans I. Justifier l'existence d'un (u_i, v_i, w_i, h_i) de $\mathbb{R}^4$ avec $(u_i, v_i, w_i) \neq (0, 0, 0)$ tel que si l'on pose pour $M(x, y, z)$ de $\mathscr{E}_3$,

$$g_i(M) = u_i x + v_i y + w_i z + h_i \text{, on ait : } \forall j \in I,\ g_i(A_j) = \delta_{i,j}.$$

(où de manière usuelle, $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et vaut 0 sinon).

On admet l'unicité du quadruplet (u_i, v_i, w_i, h_i) pour tout i dans I.

IV.A.2) Pour i dans I on considère φ_i la forme linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \varphi_i(x, y, z) = u_i x + v_i y + w_i z.$$

Quel est le rang de la famille $(\varphi_i)_{1 \le i \le 4}$?

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout i dans I et tout $M(x, y, z)$ de $\mathscr{E}_3$, on pose : $G_i(M) = L_m(g_i(M))$.

On considère alors :

$$g = \sum_{i=1}^{4} g_i \text{ et } G = \sum_{i=1}^{4} G_i .$$

On appelle Ω l'isobarycentre de $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

On note $\Delta = \{M(x, y, z) \in \mathscr{E}_3 \mid \forall i \in I, 0 \le g_i(M) \le 1\}$

IV.B -

IV.B.1) Préciser $g(A_i)$ pour i dans I et en déduire g.

IV.B.2) Vérifier que tout point M de $\mathscr{E}_3$ est le barycentre du système pondéré $(A_i, g_i(M))_{1 \le i \le 4}$.

IV.B.3) Déterminer α de $\mathbb{R}$ tel que pour tout point M de toute arête $[A_i, A_j]$ avec $(i,j) \in I^2$, $i \ne j$ on ait $G(M) = \alpha$.

IV.C -

IV.C.1) Montrer que Δ est un compact de $\mathscr{E}_3$.

IV.C.2) Montrer que sur chaque face du tétraèdre, G admet un maximum et un minimum. On précisera la valeur de ces extremums, ainsi que les points où ils sont atteints.

On pourra partir du fait que le compact triangulaire limité par trois points non alignés d'un plan est l'ensemble des barycentres à poids positifs des sommets du triangle et que l'on peut toujours supposer que la somme des poids est égal à 1.

IV.C.3) Calculer $G(\Omega)$ et déterminer la différentielle de G en Ω.

IV.C.4) Déterminer les points M de Δ en lesquels la différentielle de G est nulle.

On pourra montrer que la nullité de la différentielle de G en un point M *implique une relation linéaire portant sur les* φ_i *et on utilisera dans ce cas le résultat de IV.A.2.*

IV.C.5) Montrer que la fonction G admet sur Δ un maximum et un minimum et déterminer ces extremums $G_{\min}$ et $G_{\max}$ de G sur Δ ainsi que les points où ils sont atteints.

IV.D - On prend $A_1(1, -1, -1)$, $A_2(-1, 1, -1)$, $A_3(-1, -1, 1)$ et $A_4(1, 1, 1)$.

Pour $m = 1$, on obtient, après un calcul qui n'est pas demandé :

$$G(x, y, z) = \frac{1}{8}[3(x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz) + 5].$$

On appelle Σ la surface d'équation $G(x, y, z) = 1$.

On considère $\overline{B}(O, \sqrt{3})$ la boule fermée de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ pour la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$ et l'on note $S(O, \sqrt{3})$ sa frontière, la sphère de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

On admet que pour tout point $M(x, y, z)$ de $S(O, \sqrt{3})$, on a $|xyz| \leq 1$. (Ceci peut se démontrer en utilisant les coordonnées sphériques de M).

IV.D.1) Déterminer les points non réguliers de Σ.

IV.D.2) Montrer que pour tout $P(a, b, c)$ de $S(O, \sqrt{3})$, il existe un et un seul point du segment $[OP]$ qui appartienne à Σ.

On pourra étudier la fonction $h(t) = G(ta, tb, tc)$ *sur* $[0,1]$.

IV.D.3) Qu'en déduit-on pour l'intersection Σ' de Σ avec $\overline{B}(O, \sqrt{3})$? On précisera les points de contact de cette intersection avec le tétraèdre ainsi qu'avec la sphère $S(O, \sqrt{3})$.

IV.D.4) Préciser les sections de Σ et de $\overline{B}(O, \sqrt{3})$ par le plan médiateur de $[A_3, A_4]$, d'équation $x + y = 0$. Les représenter sur une même figure.

IV.D.5) Décrire l'animation que donne la vue des surfaces de niveau :

$S_\alpha = \{(M \in \Delta) / G(M) = \alpha\}$ lorsque α varie de $G_{\min}$ à $G_{\max}$.

On précisera la position de ces surfaces par rapport au tétraèdre.

••• FIN •••
