# Centrale 2006 mp maths 2

## 1 Une fonction polynomiale

**I A 1)** Il vient $L_1(x) = -2x^3 + 3x^2, L_2(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

**I A 2)** $$\int_0^x t^m(1-t)^m\,dt + \int_0^{1-x} t^m(1-t)^m\,dt = \int_0^x t^m(1-t)^m\,dt + \int_x^1 (1-u)^m u^m\,du = \int_0^1 t^m(1-t)^m\,dt$$

On en déduit la relation $\boxed{L_m(x) + L_m(1-x) = 1}$.

En particulier on a toujours $L_m(1/2) = 1$.

Le point admis par l'énoncé n'est pas difficile à vérifier, on trouverait que le coefficient de $x^{m+k+1}$ dans $L_m$ est au signe près $\binom{m+k}{m}\binom{2m+1}{m-k} \in \mathbb{N}$.

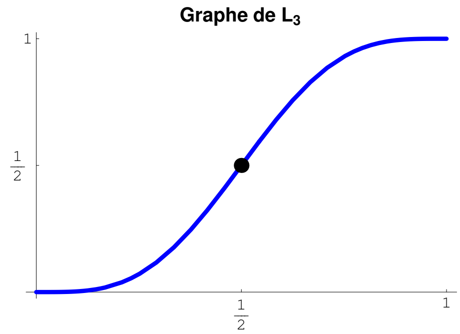
**I B 1)** On a $I_m \times L'_m(x) = x^m(1-x)^m > 0$ quand $x \in ]0,1[$. Donc $L_m$ est strictement croissante (sa dérivée ne s'annule qu'en 0 et 1). 0 est donc son unique racine, sa multiplicité est $m+1$ (puisque racine d'ordre $m$ de la dérivée).

Il vient $I_m \times L''_m(x) = x^{m-1}(1-x)^{m-1}m(1-2x) > 0$ entre 0 et 1/2.

On nous demande d'étudier $L_m(x)/x$ : posons $\varphi(x) = I_m \times L_m(x)$ alors

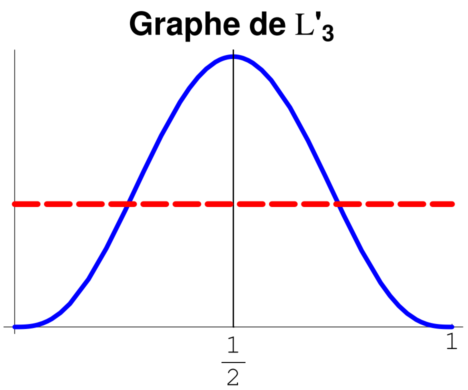
$$x^2\varphi'(x) = xL'_m(x) - L_m(x) = \psi(x) \qquad \psi'(x) = xL''_m(x) > 0$$

et on a donc $\psi(x) > 0$ pour $0 < x <= 1/2$ puisque $\psi(0) = 0$ ; on en tire la croissance de $\varphi$.




**I B 3)** La relation du **I A2)** donne une symétrie centrale autour de (1/2, 1/2) : la fonction $L_m$ est convexe entre 0 et 1/2, elle est concave entre 1/2 et 1. La tangente est horizontale en 0 et en 1. Voici le graphe de $L_3$ :

**I C 1)** On a vu que $L'_m$ est strictement croissante sur $[0, 1/2]$ et que $L'_m(x = l'_m(1-x))$ ; donc l' équation a pour solution $x = y$ ou $x + y = 1$ (par symétrie).




**I C 2)** Il devient utile d'esquisser le graphe de $L'_m$. Il ne peut clairement pas y avoir plus de deux points distincts donnant la même valeur $> 0$ pour $L'_m$. Donc la seule solution avec trois points distincts serait $(0, 1/2, 1)$. Mais elle ne vérifie pas la condition $\alpha + \beta + \gamma = 1$. On est donc conduit à examiner les solutions de la forme $(\alpha = \beta, \gamma = 1 - \alpha)$ (et permutations) ce qui imposerait $2\alpha + (1-\alpha) = 1$, impossible sauf si $\alpha = \beta = 0, \gamma = 1$. Il reste seulement la solution triviale $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$.

**I C 3)** Idem pour 4 points : la condition sur la somme donne la solution $\forall i\ \alpha_i = 1/4$ en plus des solutions extrêmes $\exists i\, \alpha_i = 1$ et $\forall j / = i\ \alpha_j = 0$.

## 2 Polynômes de Taylor

**II A)** L'application $T_{n,a}$ est linéaire et idempotente, comme on le voit particulièrement bien si on écrit un polynôme $P$ quelconque dans la base des $(X-a)^p$ :

$$T_{n,a}\big(\sum \alpha_k (X-a)^k\big) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X-a)^k$$

Son noyau est précisément engendré par une partie de cette base, les $((X-a)^p)_{p>n}$ (et son image $\mathbb{R}_n[X]$ est engendrée par le reste de la base, $((X-a)^p)_{0<=p<=n}$ : cette base est **adaptée** au projecteur, même si la notion n'est pas au programme en dimension infinie). Ce noyau est l'idéal engendré par $(X-a)^{n+1}$.

**II B)** Le point crucial, vu en I, est que 0 est racine d'ordre $m+1$ de $L_m$. Par ailleurs $L_m(1-X) = 1 - L_m(X)$ : donc $\boxed{T_{m,0}(U) = R}$.

Au voisinage de 1, on a 1 qui est racine dordre $m+1$ de $L_m(1-X)$ et donc $L_m(X) = 1 + o((1-X)^m)$ ce qui permet d'écrire $\boxed{T_{m,1}(U) = S}$.

**II B)** Ce qu'on vient de prouver est que $\Phi \circ \Phi = \Phi$, puisque les polynômes de Taylor de $\Phi(P)$ ne sont autres que $P_0$ et $P_1$ d'après la question précédente. Par ailleurs $\Phi$ s' écrit comme une combinaison d'applications linéaires (notamment les projecteurs $P \mapsto P_i, i = 0, 1$) et donc est linéaire. Finalement $\boxed{\Phi \text{ est un projecteur de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Comme$P_0, P_1$ décrivent $\mathbb{R}_m[X]$ entier, l'image de $\Phi$ est $\mathbb{R}_m[X]L_m(1-X) + \mathbb{R}_m[X]L_m(X)$. Notez qu'à ce stade on écrit « + », et pas encore $\oplus$.
Il est clair que si $P_0 = P_1 = 0$ alors $\Phi(P) = 0$. Montrons la réciproque : si $\Phi(P) = 0$ alors au voisinage de 0 le polynôme de Taylor de $\Phi(P)$ doit être un $o(X^m)$. Or ce polynôme de Taylor est $P_0$ comme démontré au II.B : donc $P_0 = 0$ (le polynôme nul). De même en 1. Finalement

$\boxed{\text{Ker}\,\Phi \text{ est l'ensemble des polynômes qui admettent 0 et 1 comme racines de mltiplicité} > m}$.

On peut caractériser $\text{Ker}\,\Phi$ comme l'idéal engendré par $L_{m+1}(X)$ ou $X^{m+1}(1-X)^{m+1}$, ce qui permet d'en donner une base, en multipliant ce polynôme par des $X^k, k <= n-2m-2$. Sa dimension est donc $n-2m-1$. L'autre espace propre du projecteur $\Phi$, qui est son image, est donc de dimension $2m+2$ (théorème du rang, car $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$). Ceci signifie que la famille génératrice (cf. supra) des $(X^k L_m(1iX) + X^p L_m(X))_{0<=k,p<=m}$, qui est de cardinal précisément $2m+2$, est une base de $\text{Im}\,\Phi$.

## 3 Raccorder

**I A 1)** Cela rappelle fort les propriétés de polynômes $L_m$. Il suffit de poser

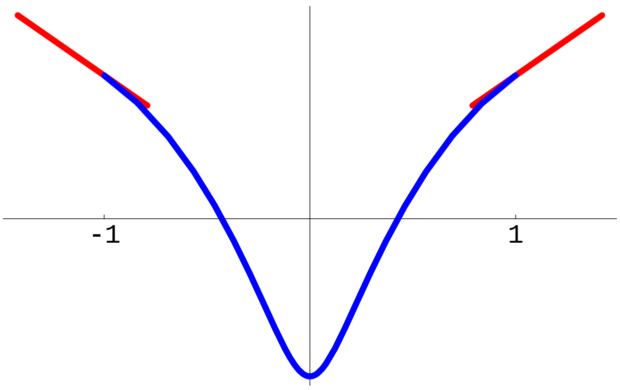
$$Q_1(X) = L_1\left(\frac{X+1}{2}\right) = \frac{2+3X-X^3}{4}$$

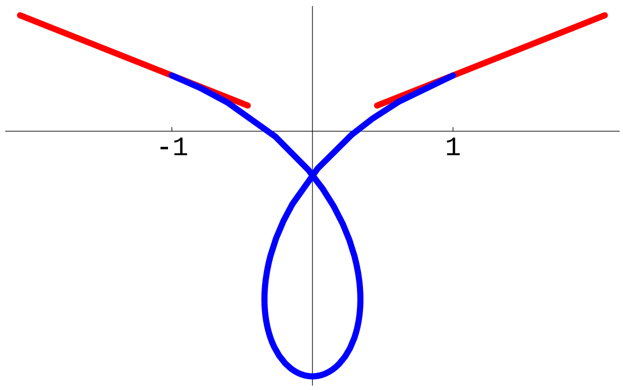
pour changer en $\pm 1$ les extrémités de l'intervalle utilisé.
Une **autre** solution, $V$, serait telle que $Q-1-V$ (de degré $<= 3$) admette -1 et 1 comme racines de multiplicité au moins 2. Cela ferait déjà 4 racines, trop vu le degré : donc forcément $V = Q_1$ et on a démontré existence et unicité.

**II A 2)** On peut proposer $Q_2(X) = L_2(\frac{X+1}{2}) = \frac{8+15X-10X^3+3X^5}{4}$ (non demandé).
Au changement de bornes près, on retrouve la problématique du **II B)** : on construit des fonctions dont les polynômes de Taylor (à un certain ordre) sont **donnés** aux extrémités de l'intervalle. Ainsi $x_3$ admet le même DL que $x_1$ (resp. que $x_2$) en -1 (resp. 1) : ce qui prouve bien que la fonction $g$ obtenue par recollement est de classe $\mathcal{C}^1$.

**III C)** On regroupe ici les trois sous-questions en une seule. Les deux graphes sont des demi-droites. La fonction de raccord est

$$g(t) = \left\{\frac{1}{2}\left(at^3 - t^3 - at + 3t\right), \frac{1}{2}\left(-at^4 + 3at^2 - 2a + 2\right)\right\}$$




L'intersection avec l'axe des ordonnées correspond aux racines de l'abscisse de $g_3$ [comprises entre -1 et 1]. On étudie les variations de $\varphi(t) = at^3 - t^3 - at + 3t = (a-1)t^3 + t(3-a)$. Alors (en prenant $t/ = 1$) $\varphi'(t) = 3(a-1)t^2 + (3-a)$ change de signe quand $t = \pm\sqrt{\frac{a-3}{3(a-1)}}$ ce qui n'a de sens que pour $a > 3$. Les valeurs de $\varphi$ en ces deux points sont opposées, donc la courbe (cubique) de $\varphi$ a trois racines [on peut aussi les calculer sans ambages].
Il se trouve que $y$ ne prend que deux valeurs différentes pour ces trois valeurs de $t$ (0 et $\pm\sqrt{\frac{a-3}{a-1}}$) qui annulent $x$, à savoir $1-a$ et $\frac{1-3a}{(a-1)^2}$, comme on le voit sur la figure non demandée ci-dessus ($a = 2,4$ puis $a = 4$).

# 4 Animation

On utilise une propriété capitale des espaces et applications affines : **une application affine est déterminée par l'image d'un repère affine.**

**IV A1)** Notons qu'une base de $\mathbb{R}^3$ est donnée par les vecteurs $\overrightarrow{M_4M_i}, i = 1,2,3$. Utilisons cette remarque par un calcul : on cherche $u_i, \ldots h_i$ comme les solutions d'un système de quatre équations, $u_i x_j + v_i y_j + w_i z_j + h_i = \delta_i^j, j = 1 \ldots 4$. Le déterminant de ce système est, par manipulations élémentaires

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & & & \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}$$

et ce déterminant est celui de trois vecteurs indépendants $\overrightarrow{M_4M_i}, i = 1,2,3$ donc est non nul par hypothèse.
*NB : on a démontré ici quelque chose d' évident : il existe des équations des plans définis par les trois faces, normalisées de telle sorte que la face* $(A_1A_2A_3)$ *ait pour équation* $g_4 = 0$ *et qu'on ait* $g_4(A_4) = 1$.

**IV A2)** Une question plus facile avec des dépassements de programme... Le rang de cette famille est 3 (maximal). En effet,

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & & & \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & \dots & & \\ w_1 & \dots & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} = I_4 \Rightarrow \text{ rang} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & \dots & & \\ w_1 & \dots & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{pmatrix} = 4$$

Par manipulations élémentaires (car la notion de bordant est rigoureusement interdite) on en déduit que la sous-matrice $\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ est inversible aussi.

Mais ceci signifie que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, dont ce sont les coordonnées, forme une famille libre. Donc le rang de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ est >= 3 et comme ce sont des formes dans $\mathbb{R}^3$ ce n'est y pas plus.

Cela signifie qu'il existe **une** équation (non triviale) entre les $\varphi_i$. C'est la clef de la délicate question d'extrema ci-dessous, et cela aurait mérité quelques questions intermédiaires.

**IV B1)** On a $g_j(A_i) = \delta_j^i$ et donc $g(A_i) = 1$. $g$ est une application affine, constante sur un repère : c'est l'application constante 1.

Observons de même que $G_j(A_i) = L_m(\delta_j^i) = \delta_j^i$ et $G = 1$ itou en chaque sommet du tétraèdre. Mais $G$ n'est pas affine, donc cela ne se généralise pas à $\mathcal{E}$ entier.

**IV B2)**

$$\forall M \in \mathcal{E} \qquad \Psi(M) = \frac{\sum_{i=1}^4 g_i(M) A_i}{\sum_{i=1}^4 g_i(M)} = \sum_{i=1}^4 g_i(M) A_i = M,$$

car cette fonction est affine et donne bien $\Psi(A_j) = A_j$ , donc $\Psi = \mathrm{Id}$.

Cela signifie que les $g_i$ sont des **coordonnées barycentriques** de $M$ par rapport aux $A_j$ (notion hors-programme).

En particulier on observe pour $M$ à l'origine que

$$g_i(O) = h_i \qquad 1 = \sum_{i=1}^4 h_i \qquad O = \sum_{i=1}^4 h_i A_i \qquad \text{et en général } g_i(M) - g_i(O) = \varphi_i(M)$$

$\boxed{\text{On en déduit un résultat capital quoique non demandé : } \sum_{i=1}^4 \varphi_i = 0}$, puisque cela est vrai pour tous les $A_j$.

**IV B3)** On nous demande en fait de vérifier que la fonction $G$ est constante sur les 6 arêtes du tétraèdre. Forcément on aura alors $\alpha = G(A_i) = 1$ (cf. supra).

Considérons l'arête $[A_1, A_2]$ par exemple : un point de ce segment s' écrira $M = \lambda A_1 + (1-\lambda) A_2$ où $\lambda \in [0, 1]$. Il vient alors (les applications affines conservent le barycentre)

$$g_i(M) = \lambda g_I(A_1) + (1-\lambda) g_i(A_2) = \lambda \delta_1^i + (1-\lambda)\delta_2^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin \{1, 2\} \\ \lambda & \text{si } i = 1 \\ 1-\lambda & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

Dans tous les cas on a $G(M) = L_m(0) + L_m(0) + L_m(\lambda) + L_m(1-\lambda) = 1$ d'après **I A2)**.

**IV C1)** On peut montrer par le critère fermé+borné que $\Delta$ est compact (c'est le parallèlépipède circonscrit au tétraèdre). Il est plus rapide, quoique non intuitif, de constater que $\Delta$ est l'image par l'application continue $(\gamma_1 ... \gamma_4) \mapsto \sum \gamma_i A_i$ du compact (produit de compacts) $[0, 1]^4$.

**IV C2)** Suivons l'indication : une face est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de ses trois sommets (disons $A_i, i = 1...3$), c'est donc l'image du compact $K = \{(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}_+^3 \mid \alpha+\beta+\gamma = 1\}$ par l'application $(\alpha,\beta,\gamma) \mapsto \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3$ et c'est aussi un compact, sur lequel l'application continue $G$ est bornée et atteint ses bornes. Reste à savoir où.

Pour cela on fait appel au calcul différentiel. On sait ce qui se passe sur le bord d'une face (car on est alors sur une arête), reste à étudier l'intérieur. Si on considère $\alpha$ et $\beta$ comme les variables (puisque $\gamma = 1-\alpha-\beta$), personne n' étant nul, on étudie

$$G_i(M) = L_m(\alpha g_i(A_1) + \beta g_i(A_2) + (1-\alpha-\beta) g_i(A_3))$$

Deux, voire trois, des termes de cette somme sont nuls selon la valeur de $i$. En additionnant, il reste dans tous les cas de figure

$$G(M) = L_m(\alpha) + L_m(\beta) + L_m(\gamma) = L_m(\alpha) + L_m(\beta) + L_m(1-\alpha-\beta)$$

Par calcul du gradient (par rapport aux variables $(\alpha,\beta)$), on trouve que les points critiques doivent vérifier la condition du **I C2)**. Comme on a exclu que $\alpha\beta\gamma = 0$, cela nous donne $\alpha = \beta = \gamma = 1/3$. La valeur afférente est plus petite que 1 (voir le graphe de $L_m$ : par convexité on a $L_m(1/3) < 1/3$) et donc ce point critique donne le minimum, le maximum étant 1 et atteint sur les arêtes.

$\boxed{\text{Le minimum de } G \text{ sur une face est atteint en son isobarycentre, il vaut } 3L_m(1/3)}$

$\boxed{\text{le maximum de } G \text{ vaut } 1}$.

**IV C3)** Les $g_i$ sont égaux en $\Omega$ à $g_i(\Omega) = \dfrac{1}{4}\sum_j g_i(A_j) = \mathrm{dfrac}14$. D'où $G(\Omega) = 4L_m(1/4)$.

Le calcul général ci-dessous donne en $\Omega$

$$\nabla G(\Omega) = L'_m(1/4)\Big(\sum_{i=1}^4 u_i, \sum_{i=1}^4 v_i, \sum_{i=1}^4 w_i\Big) = 0$$

en tenant compte du résultat (non demandé) de la question **IV B2)**, où l'on a découvert la relation $\sum \varphi_i = 0$.

Donc $\boxed{\Omega \text{ est un point critique.}}$

**IV C4)** On a $\dfrac{\partial g_i(M(x,y,z))}{\partial x} = u_i$ et de même pour les autres dérivées partielles ; on en déduit que l'expression générale du gradient de $G$ au point $M$ est

$$\nabla G(M) = \Big(\sum_{i=1}^4 u_i L'_m(g_i(M)), \sum_{i=1}^4 v_i L'_m(g_i(M)), \sum_{i=1}^4 w_i L'_m(g_i(M))\Big)$$

Supposons cela égal à 0 : on a donc les équations $\sum_{i=1}^4 u_i L'_m(g_i(M)) = 0$ *et simile*. On peut l'exprimer matriciellement :

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} L'_m(g_1(M)) \\ L'_m(g_2(M)) \\ L'_m(g_3(M)) \\ L'_m(g_4(M)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

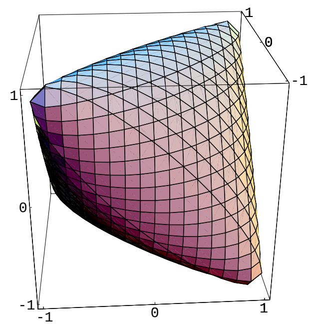
autrement dit, $\sum_{i=1}^4 L'_m(g_i(M))\varphi_i = 0$ : c'est une relation entre les $\varphi_i$, on a établi au **IV A4)** qu'il n'y en a qu'une (à constante près), à savoir $\sum \varphi_i = 0$.

Donc tous les $L'_m(g_i(M))$ sont égaux. Par ailleurs on a exclu qu'un des $g_i(M)$ puisse être nul, puisque les faces ont été traitées à part. Par application directe du **I C5)** on a donc que l'unique point critique, hors les faces, est $\Omega$.

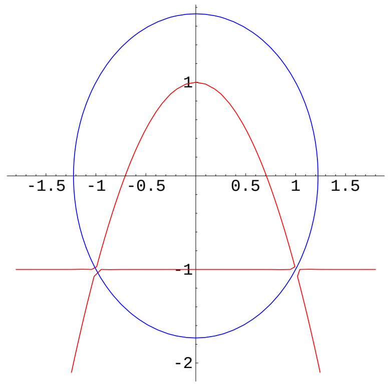
**V C5)** Résumons : le maximum absolu est atteint sur les arêtes et vaut $G_{max} = 1$. Le minimum absolu est atteint en l'isobarycentre $\Omega$, et $G_{min} = 4L_m(1/4)$.

**V D1)** On calcule $\nabla G = \dfrac{3}{8}\big(2x - 2yz, 2y - 2xz, -2xy + 2z\big)$. La nullité de ceci donne les sommets du tétraèdre (comme $(-1,-1,1)$) et son centre, O, qui sont les 5 points critiques. Seuls les quatre sommets appartiennent à $\Sigma$ ; ce sont les points non réguliers de $\Sigma$.

**V D2)** Étudions sur le segment en posant $f(t) = 8G(ta, tb, tc) = 9t^2 - 6t^3abc + 5$ compte tenu de ce que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. $f'(t)$ s'annule bien sûr en 0, et aussi en $t_0 = 1/(abc)$, où l'on a donc un maximum (local). Mais cela n'advient que pour $M_0 = \left(\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}\right)$ qui est en dehors de la boule ouverte, d'après le résultat admis par l'énoncé : en effet $OM^2 = \dfrac{3}{(abc)^2} >= 3$. En résumé G croît quand on s'éloigne du centre jusqu'à rencontrer la sphère (et sans doute même au delà), de la valeur $G(0) = 5/9$ à $\dfrac{1}{8}(9-6abc+5) >= \dfrac{9}{8} > 1$ : donc dans toute direction il existe un t (et un seul) pour lequel la valeur $G(1)$ est atteinte.
On peut visulaiser que notre surface se projette, à partir du centre, sur la sphère (elle y est homéomorphe, mais passons).



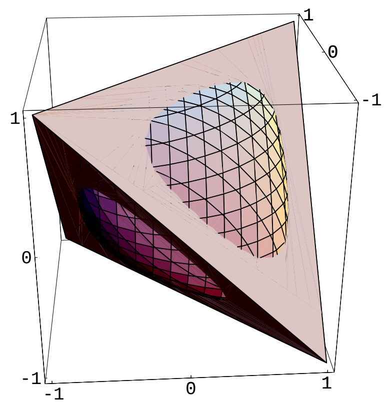
**V D3)** Cela signifie que $\Sigma'$ est « dans » la sphère, avec un point pour chaque segment issu de O. En revanche le tétraèdre est inclus dans $\Sigma'$ – ses arêtes en font carrément partie comme on l'a établi au **C** et ses autres points donnent une valeur de G inférieure à 1. Cela se voit bien sur une figure tracée par ordinateur :




**V D4)** On pose alors $y = -x$ et on est ramené à l' équation

$$\frac{1}{8}(6zx^2 + 6x^2 + 3z^2 + 5) = 1 \iff \frac{3}{8}(z+1)(2x^2) + z - 1 = 0$$

ce qui donne la réunion d'une droite, $z = -1$, et d'une parabole. Par ailleurs, l'intersection de ce plan et de la sphère est un cercle (cela ne saute pas aux yeux sur l'équation en coordonnées non orthonormales) : $2x^2 + z^2 = 3$. En réunissant on trouve la figure ci-jointe.



**V D5)** Pour la valeur minimale (non demandée mais c'est 0,625) la surface est réduite au seul point $\Omega = O$ ; ensuite la surface $\Sigma'$ grossit[1] et elle vient contenir le tétraèdre exactement quand $G = G_{max} = 1$. Il y a une plage intermédiaire où $\Sigma'$ coupe les **faces** du tétraèdre, sans en toucher les bords : cf. figure ci-joint pour $G = 0,85$.