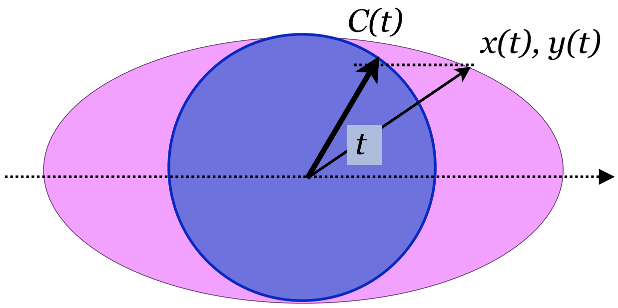
Centrale MP 2006 - I

Emmanuel Amiot

3 mai 2006

1 Préliminaires

1.1 Dessin



t est l'angle qui paramètre le cercle d'où l'on déduit l'ellipse par affinité.

1.2

$\mathcal{S}_r$ est un sev de l'espace des suites numériques car il est défini par une relation de récurrence **linéaire** ; son ordre étant 2, la dimension du sous-espace est aussi 2 (toute suite de $\mathcal{S}_r$ a deux degrés de liberté, ses deux premières valeurs par exemple).
$\mathcal{B}_r$ est l'intersection de l'ev $\mathcal{S}_r$ et de l'ev des suites (a_n) telles que $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence au moins égal à 1 : ce dernier espace est stable par combinaison linéaire en vertu des théorèmes du cours sur la somme de deux séries entières. L'intersection de deux sev est un sev (ici il peut être réduit à 0).

1.3 Parseval

Il paraîtrait que, pour f continue notamment, on a

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = |c_0|^2 + \sum_{n\geqslant 1} (|c_n|^2 + |c_{-n}|^2)$$

On utilise une **identité de polarisation** pour en déduire la formule suivante :

$$2\,\mathrm{Re}\langle f \,|\, g \rangle = \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f+g)|^2 - |c_n(f-g)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2\,\mathrm{Re}(\overline{c_n(f)}c_n(g))$$

en développant les carrés scalaires ; on a de même l'égalité des parties imaginaires en étudiant $\|f+ig\|^2 - \|f-ig\|^2$ d'où finalement

$$\langle f \,|\, g \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\overline{c_n(f)}c_n(g))$$

que l'on peut préférer écrire comme l'énoncé en séparant les cas $n > 0$ et $n < 0$.
La convergence absolue (qui permet de ne pas se soucier de la façon d'écrire cette somme indexée par $\mathbb{Z}$, incidemment) résulte du lemme bien connu

$$\left|\overline{c_n(f)}c_n(g)\right| = |uv| \leqslant \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2) = \frac{1}{2}\left(|c_n(f)|^2 + |c_n(g)|^2\right)$$

1.4

Immédiatement il vient $a_n = c_n + c_{-n}$ (pour toute fonction et notamment pour f_r).

1.5

On a bien $0 < r < 1$; il nous faut établir au passage la valeur de la longueur de l'ellipse. Par définition c'est

$$L(a,b) = \oint \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, dt$$

Par ailleurs on a

$$a_0 = a_0(f_r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_r(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 - r\cos t)^2 + r^2 \sin^2 t}\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + r^2 - 2r\cos t}\, dt$$

Pour comparer ces nombres il est judicieux (sinon naturel) de penser à l'arc moitié. Par parité et périodicité,

$$L(a,b) = 2\int_0^{\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\frac{1 + \cos(2u)}{2}}\, du = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\frac{1 + \cos t}{2}}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{a^2 - b^2}{2}\cos t$$

Compte tenu de ce que

$$\frac{2r}{1 + r^2} = \frac{2\frac{a-b}{a+b}}{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

on trouve

$$L(a,b) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}\frac{\pi}{\sqrt{1 + r^2}}a_0 = \frac{\pi}{2}(a + b)a_0(f_r)$$

Après un calcul aussi dense, il est bon de vérifier, dans le cas du cercle ($a = b$) où l'on trouve bien

$$\frac{\pi}{2}(a + a)\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_0 = 2\pi a$$

2 Comportement asymptotique

2.1 Un rayon

Par le critère de d'Alembert on trouve que la série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$: donc $R = 1$.

2.2 Somme de la série

On a

$$f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \alpha_n x^n \qquad f'(x) = \sum_{n \geqslant 0} (n+1)\alpha_{n+1} x^n \qquad x f'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n\alpha_n x^n$$

d'où

$$(1-x)f'(x) = \alpha_1 + \sum_{n \geqslant 1}\left((n+1)\alpha_{n+1} - n\alpha_n\right)x^n = \alpha_1 + \sum_{n \geqslant 1}\left(-(n+1)\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2\, 4^{n+1}(2n+1)} + n\frac{(2n)!}{((n)!)^2\, 4^n(2n-1)}\right)x^n$$

et après simplifications il reste le terme général $x^n \dfrac{(2n)!}{(n!)^2\, 4^n}\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{n}{2n-1}\right) = -\dfrac{1}{2}\alpha_n x^n$. On a trouvé l'équation différentielle

$$(1 - x)f'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(f(x) - 1) = -\frac{f(x)}{2}$$

Une résolution élémentaire (compte tenu de $f(0) = \alpha_0 = +1$) donne alors $\boxed{f(x) = \sqrt{1 - x}}$.

2.3 Expression complexe

Ici le raisonnement est un peu délicat. Pour $z = x$ réel on a clairement $f(x)^2 = 1 - x$.
Cela signifie que le produit de Cauchy de la série $\sum \alpha_n x^n$ par elle-même donne $1 - x$.
Or ce produit ne dépend pas de la réalité de x, mais seulement des α_n. Donc la relation $f(x) \times f(x) = 1 - x^2$ reste vraie dans le domaine d'absolue convergence, et en tout cas pour $|z| < r$, on a $\boxed{f(z)^2 = 1 - z}$.

Ce qui ne nous autorise pas à écrire $f(z) = \sqrt{1-z}$ pour z non réel, comme le préambule le rappelle !

2.4

Résulte de la question précédente : en effet $f(re^{it})^2 = 1 - re^{it}$.

2.5

NB : cette question (et quelques autres), peu pourvue d'indications pour trouver les nombreuses astuces nécessaires, nous paraît introuvable par les candidats dans le temps limité.
En injectant le résultat précédent, il vient

$$c_n(f_r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nit} f_r(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-nit}\overline{f(re^{it})}f(re^{it})\,dt = \langle\, \varepsilon_n \widehat{f} \,|\, \widehat{f}\,\rangle$$

en notant $\varepsilon_n(t) = e^{nit}$ et $\widehat{f}(t) = f(re^{it})$.
En utilisant la **forme polarisée de Parseval (I.C)** il vient

$$c_n(f_r) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \overline{c_k(\varepsilon_n \widehat{f})}\, c_k(\widehat{f})$$

Or

$$c_k(\widehat{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-kit}\sum_{n\geqslant 0}\alpha_n r^n e^{nit}\,dt \overset{\text{(CV normale sur } |z| \leqslant r)}{=} \sum_{n\geqslant 0}\alpha_n r^n \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(n-k)it}\,dt = \alpha_k r^k$$

et encore, seulement si k est un entier naturel (0 sinon).
De plus,

$$c_k(\varepsilon_n \widehat{f}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-kit}e^{nit}\sum_{m\geqslant 0}\alpha_m r^m e^{mit}\,dt = \sum_{m\geqslant 0}\alpha_m r^m \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(n+m-k)it}\,dt = \alpha_{k-n} r^{k-n} \text{ si } k \geqslant n$$

Tout compris, il reste

$$c_n(f_r) = \sum_{k\geqslant n} r^{2k-n}\alpha_k\alpha_{k-n} = \alpha_n r^n \sum_{[x]=0}^{\infty} \frac{\alpha_{n+[x]}\alpha_{[x]}}{\alpha_n} r^{2[x]}$$

en posant $[x] = k - n$: l'intégrale demandée est en fait la somme de cette série (la fonction intégrée est constante entre deux entiers consécutifs !)
Reste à évaluer la limite de cette... chose...
Pour $[x]$ **fixé**, on a $\dfrac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} \to 1$ (cf. le quotient de d'Alembert utilisé au début du II). Par ailleurs et plus précisément, on a toujours $0 < \dfrac{\alpha_{n+[x]}}{\alpha_n} < 1$ car $|\alpha_n|$ décroît.
Enfin on a $|\alpha_{[x]} r^{2[x]}| \leqslant r^{2x-2}$ qui est une fonction (exponentielle) intégrable : **on peut appliquer le théorème de convergence dominée !!!** et on en tire

$$\boxed{\operatorname*{Lim}_{n\to+\infty} \frac{c_n(f_r)}{\alpha_n r^n} = \int_0^{\infty} \alpha_{[x]} r^{2[x]}\,dx = \sum_{k\geqslant 0}\alpha_k r^{2k} = f(r^2) = \sqrt{1-r^2}}$$

2.6 Equivalent

On trouve l'équivalent demandé avec la (difficile !) formule précédente, et un équivalent de α_n qui découle de la formule de Stirling :

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \Rightarrow \alpha_n \sim -\frac{1}{2n^{3/2}\sqrt{\pi}}$$

On en tire un équivalent de $a_n = 2c_n$.
Tout ceci prouve bien que le coefficient de Fourier tend vers 0 (lemme de Lebesgue).

3 Suites récurrentes

On a $f_r(t) = \sqrt{|1 - re^{it}|} = \sqrt{1 + r^2 - 2r\cos t}$; il en résulte que

$$f_r'(t) = \frac{r\sin t}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos t}} = \frac{r\sin t}{1 + r^2 - 2r\cos t} f_r(t)$$

D'où la relation $\boxed{(1 + r^2 - 2r\cos t)f_r'(t) = r\sin t\ f_r(t)}$

En utilisant les relations qui donnent (en général) les coefficients de Fourier de la dérivée d'une fonction, ou d'une fonction fois la fonction cosinus, à savoir

$$b_n(g') = -na_n(g) \qquad b_n(\cos\times g) = \frac{1}{2}(b_{n+1}(g) + b_{n-1}(g)) \qquad b_n(\sin\times f) = \frac{1}{2}(a_{n-1}(f) - a_{n+1}(f))$$

et par le principe d'identification des séries de Fourier, valable pour des DSF de fonctions continues, on trouve bien la relation qui définit $\mathcal{B}_r$ (on cherche les b_n) :

$$b_n((1+r^2-2r\cos t)f_r'(t)) = -(1+r^2)na_n(f_r)+r\big((n+1)a_{n+1}(f_r)-(n-1)a_{n-1}(f_r)\big) = b_n(r\sin t\ f_r) = \frac{r}{2}(a_{n-1}(f_r)-a_{n+1}$$

soit en ordonnant et en multipliant par 2, la relation donnée au préambule :

$$r(2n+3)a_{n+1} - (1+r^2)2na_n + r(2n-3)a_{n-1} = 0$$

Pour bien faire il convient de vérifier que la relation marche pour les petits indices (ici $n = 1$).

3.1 Matrice de la récurrence

La deuxième ligne de la matrice T_n est claire : c'est $(1, 0)$! La première est issue de la relation de récurrence, qui permet d'écrire a_{n-1} en fonction des deux termes suivants de la suite. D'où

$$T_n = \begin{pmatrix} \dfrac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour rester dans le style de ce que l'on est supposé enseigner dans nos classes, on peut donner (ici en Mathematica)

```
a[n_] := a[n] = (1 + r^2)*2*(n - 1)*a[n - 1]/(2n + 1) - (2n - 5)*a[n - 2]/(2n + 1
a[1]=a_1; a[0]=a_0;
A[n_] := 2n(1+r^2)*A[n-1]/r/(2n-3) - (2n+1)*A[n-2]/(2n-5)
A[0]= 1; A[1] = -2(1+r^2)/r
B[n_] := 2n(1+r^2)*B[n-1]/r/(2n-3) - (2n+1)*B[n-2]/(2n-5)
B[0]= 0; B[1] = 1;
```

mais il y aurait d'autres paradigmes de programmation possibles. Il est utile d'implémenter le calcul avec **mémorisation** des valeurs de la suite pour éviter des temps de calcul prohibitifs dus à la récursion.

Enfin, il vient

$$M_{n-1}T_n = \begin{pmatrix} A_{n-1} & -\dfrac{2n+1}{2n-5}A_{n-2} \\ B_{n-1} & -\dfrac{2n+1}{2n-5}B_{n-2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{1+r^2}{r(2n-3)} & -\dfrac{2n+3}{2n-3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . = \begin{pmatrix} \dfrac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}A_{n-1} - \dfrac{2n+1}{2n-5}A_{n-2} & -\dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1} \\ \dfrac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)}B_{n-1} - \dfrac{2n+1}{2n-5}B_{n-2} & -\dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1} \end{pmatrix}$$

et on retrouve bien que $M_{n-1}T_n = M_n$.
En particulier,

$$M_n.\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = M_{n-1}.T_n.\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = M_{n-1}.\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \ldots = M_1.\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2(1+r^2)}{r} & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

3.2 Une définition faible de la convergence géométrique

Comme pour la démonstration du critère de D'ALEMBERT par exemple, on introduit un k' strictement entre k et 1 (par exemple $k' = \dfrac{1+k}{2}$). On fixe un $\varepsilon > 0$ et on considère que la suite (ε_n) est positive sans perte de généralité.
Je dis qu'à partir d'un certain rang, on a

LEMME 1. $|u_n - \ell| \leqslant k'|u_{n-1} - \ell|$ ***ou*** $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

En effet, si

$$k'|u_{n-1} - \ell| < |u_n - \ell| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| + \varepsilon_n$$

on en déduit que $|u_{n-1} - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon_n}{k' - k}$ qui est une quantité arbitrairement petite. Choisissons un rang à partir duquel on ait $\big(1 + \dfrac{1}{k'-k}\big)\varepsilon_n \leqslant \varepsilon$, on a alors

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0 \quad |u_n - \ell| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| + \varepsilon_n \leqslant |u_{n-1} - \ell| + \varepsilon_n \leqslant \varepsilon$$

Avec ce lemme on achève cette (délicate) question : si il existe un rang $n_1 \geqslant n_0$ tel que $|u_{n_1} - \ell| > \varepsilon$ alors tant que pour $n \geqslant n_1, |u_n - \ell| > \varepsilon$ on aura au moins une décroissance géométrique de raison k', puisque l'on est dans le premier cas. On arrive alors à un rang n_2 tel que $|u_{n_2} - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Il est envisageable que la suite $(|u_n - \ell|)_n$ « remonte », au dessus de la valeur ε : mais si on a $|u_{n-1} - \ell| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - \ell| > \varepsilon$ on a néanmoins

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_{n-1} - \ell| + \varepsilon_n \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

et la suite doit alors redescendre jusqu'à repasser sous la barre des ε comme on vient de le voir.
Nous avons démontré que dans tous les cas de figure, on aura $\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell| \leqslant 2\varepsilon$. ♦

3.3 Application

On veut bien sûr appliquer le lemme précédent, qui n'a pas été demandé **que** par pure cruauté. Or on calculé $M_n.\left(\begin{smallmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a_0 \\ a_1 \end{smallmatrix}\right)$.
Si on considère la première coordonnée seule, cela s'écrit

$$A_n a_n - \frac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}a_{n+1} = a_0$$

Or par construction, $(2n+3)a_{n+1} = \dfrac{1+r^2}{r}2n\,a_n - (2n-3)a_{n-1}$, et donc

$$a_0 = A_n a_n - A_{n-1}a_n\frac{2n(1+r^2)}{r(2n-3)} + A_{n-1}a_{n-1}$$

Il est judicieux ici de se souvenir que $a_n \sim r a_{n-1}$ (cf. **II F**), i.e. $\dfrac{a_n}{r} = a_{n-1} + o(a_{n-1})$, et donc

$$a_0 = A_n a_n + A_{n-1}a_{n-1}\Big(1 - \frac{2n(1+r^2)}{2n-3}\Big) + o\big(A_{n-1}a_{n-1}\big)$$

Si l'on pose, pour utiliser le lemme précédent, $u_n = (1-r^2)A_n a_n$ et $\ell = a_0$, on arrive à

$$(1-r^2)\ell - \ell(1+1-\frac{2n(1+r^2)}{2n-3}) = u_n - \ell + (u_{n-1}-\ell)\Big(1-\frac{2n(1+r^2)}{2n-3}\Big) + o\big(u_{n-1}\big)$$

Soit

$$-3\ell\frac{1+r^2}{2n-3} = u_n - \ell - \frac{3+2nr^2}{2n-3}(u_{n-1}-\ell) + o\big(u_{n-1}\big)$$

et enfin

$$|u_n-\ell| \leqslant r'^2|u_{n-1}-\ell| + \varepsilon_n$$

avec un r' légèrement supérieur à r, et $\varepsilon_n \to 0$: par la question précédente on en déduit $u_n \to \ell$. ♦
Les calculs concernant $B_n a_n$ semblent identiques (même relation de récurrence) sauf que le second membre sera égal à a_1 ; on peut donc avancer que $\boxed{B_n a_n \to \dfrac{a_1}{1-r^2}}$.

Ceci sert à la dernière question du problème.

3.4 Calcul approché de la longueur de l'ellipse

Rappelons-nous de l'expression trouvée au **IE** : $L(a,b) = \dfrac{\pi(a+b)}{2}a_0$. La question précédente nous suggère que

$$A_n a_n \to \frac{a_0}{1-r^2} = \frac{2L(a,b)}{\pi(a+b)(1-r^2)} \qquad L(a,b) = \lim_{n\to+\infty} A_n a_n \times \frac{\pi(a+b)(1-r^2)}{2}$$

Maintenant, l'énoncé suggère de regarder la question **II E**. On est donc conduit à remaplcer a_n en fonction de α_n, car on a prouvé alors que $a_n \sim 2 : alpha_n r^n\sqrt{1-r^2}$.
Avec ces faibles indications, il faut donc intuiter de poser

$$\ell_n = (1-r^2)^{3/2}\pi(a+b)\alpha_n r^n A_n \sim \pi\frac{a+b}{2}(1-r^2)A_n a_n \to \pi\frac{a+b}{2}a_0(f_r) = \mathcal{L}(a,b)$$

Reste à vérifier cette suite (parmi une multitude de suites équivalents !) est celle demandée :

1. Déjà $\ell_0 = (a+b)\pi(1-r^2)^{3/2} \times \dfrac{-1}{-1} \times 1$;
2. ensuite $\ell_1 = \ell_0 \times \alpha_1 r A_1 = \ell_0 \times \dfrac{-2}{4} \times (-2(r^2+1)) = (r^2+1)\ell_0$.
3. Vérifions enfin la relation de récurrence : on a

$$(1+r^2)\alpha_{n-1}r^{n-1}A_{n-1} = -\frac{1+r^2}{r}\frac{r^n(2n-2)!}{4^{n-1}((n-1)!)^2(2n-3)}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\frac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}r^{n-2}\alpha_{n-2}A_{n-2} &= \frac{-r^n(2n+1)(2n-3)(2n-4)!}{4^{n-1}4n(n-1)(n-2)!(n-2)!(2n-5)}A_{n-2}\\ &= \frac{-r^n(2n+1)(2n-3)!}{4^{n-1}4^{n-1}n!(n-2)!(2n-5)}A_{n-2}\end{aligned}$$

Il en sort

$$\begin{aligned}&(1+r^2)\alpha_{n-1}r^{n-1}A_{n-1} - \frac{r^2(2n+1)(2n-3)}{4n(n-1)}r^{n-2}\alpha_{n-2}A_{n-2}\\ &\quad= \frac{-r^n(2n)!}{4^n(n!)^2}\Big(\frac{1+r^2}{r}\frac{4n^2}{2n(2n-1)(2n-3)}A_{n-1} - \frac{4(2n+1)n(n-1)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-5)}A_{n-2}\\ &\quad= r^n\alpha_n\Big(\frac{1+r^2}{r}\frac{2n}{2n-3}A_{n-1} - \frac{2n+1}{2n-5}A_{n-2}\Big) = r^n\alpha_n A_n\end{aligned}$$

ce qui démontre la relation de récurrence demandée, en multipliant par $(a+b)\pi(1-r^2)^{3/2}$.

4 The end

4.1 Un Déterminant...

$M_n.\binom{a_n}{a_{n+1}} = \binom{a_0}{a_1}$, d'où en notant $\wedge$ pour le déterminant de deux vecteurs colonnes,

$$a_1A_n - a_0B_n = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \wedge M_n.\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_n a_n - \dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1}a_{n+1} \\ B_n a_n - \dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1}a_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{2n+3}{2n-3}a_{n+1}\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} = a_{n+1}\det M_n$$

en utilisant la multilinéarité et le caractère alterné. Un calcul par récurrence n'est pas judicieux ici.

4.2 ...et son calcul

On ne va pas suivre l'énoncé ici. Revenons à la définition :

$$\det M_n = \begin{vmatrix} A_n & -\dfrac{2n+3}{2n-3}A_{n-1} \\ B_n & -\dfrac{2n+3}{2n-3}B_{n-1} \end{vmatrix} = -\frac{2n+3}{2n-3}(A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n)$$

Or la suite $(W_n) = (A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n)$, entre deux suites (A_n) et (B_n) vérifiant une même relation de récurrence de la forme $C_n = \lambda_n C_{n-1} + \mu_n C_{n-2}$, vérifie elle-même une relation simple (un peu comme le Wronskien) :

$$W_n = -\mu_n W_{n-1} \Rightarrow W_n = \prod(-\mu_k)W_0 = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-5} \times (-1) = -\frac{(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{3}$$

Finalement il vient $\boxed{\det M_n = \dfrac{(2n+1)(2n-1)(2n+3)}{3} \sim \dfrac{8}{3}n^3.}$

4.3 Dimensions

On a bien trouvé une suite (a_n) élément de $\mathcal{B}_r$, celle des coefficients de Fourier étudiés pendant le problème : $a_n = a_n(f_r)$. Toute suite proportionnelle est bien sûr aussi dans $\mathcal{B}_r$.
Comme A_n et B_n croissent vers ∞ comme des suites géométriques de raison $1/r$ (pas tout à fait; mais $A_{n-1}/A_n \sim r$ d'après les études précédentes), si l'on n' a pas exactement

$$a_1/a_0 = \lim_{n\to+\infty} B_n/A_n = a_1(f_r)/a_0(f_r)$$

on aura par la relation **IV.A** que a_{n+1} croît en $1/r^n$ (encore une fois, à une puissance de n près). Plus précisément, on aurait, à moins que $a_1a_0(f_r) = a_0a_1(f_r)$,

$$a_{n+1} = \frac{a_1A_n - a_0B_n}{\det M_n} \sim 8\frac{a_1a_0(f_r) - a_0a_1(f_r)}{a_n(f_r)(1-r^2)\,n^3} \sim \frac{C^{te}}{n^{3/2}\,r^n}$$

et le rayon de convergence de la série entière serait alors égal (critère de d'Alembert) à $r < 1$.
Ce qui montre que $\dim \mathcal{B}_r = 1$, ni plus, ni moins.