Partie I

I.A.1) Comme il sera établi dans les questions suivantes, N_∞ est la *norme subordonnée* à $\| \ \|_\infty$; cependant, il n'est pas bien difficile de montrer directement que c'est une norme ...

I.A.2.a) Pour tout j , $|A(z)_j| \leqslant \sum_{k=1}^n |A_{j,k}||z_k| \leqslant \|z\|_\infty \sum_{k=1}^n |A_{j,k}| \leqslant \|z\|_\infty N_\infty(A)$ ...

I.A.2.b) De l'inégalité précédente, il résulte que $\frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty} \leqslant N_\infty(A)$ pour tout $z \in \mathbb{C}^n \smallsetminus \{0\}$; il reste à exhiber un cas d'égalité. Les candidats ayant déjà étudié cette *norme subordonnée* se souviendront peut-être que si $N_\infty(A) = \sum_{j=1}^n |A_{k,j}|$ et si θ_j est un argument[1] de $A_{k,j}$ pour $j \in \{1, \dots n\}$, il suffit de prendre $z_j = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta_j}$; car alors $\|z\|_\infty = 1$ tandis que, pour tout $i \in \{1, \dots n\}$,
$|A(z)_i| \leqslant \sum_{j=1}^n |A_{i,j}||z_j| = \sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \leqslant N_\infty(A) = |A(z)_k|$; donc $\|A(z)\|_\infty = N_\infty(A)$.

I.A.2.c) Si z est propre pour une valeur propre λ de A, alors z est non nul et $|\lambda| = \frac{\|A(z)\|_\infty}{\|z\|_\infty}$ ...

I.A.3) Pour tout z , $\|AB(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\,\|B(z)\|_\infty \leqslant N_\infty(A)\,N_\infty(B)\,\|z\|_\infty$; d'où le résultat, compte tenu de I.A.2.b) ...

I.A.4.a) Il faut d'abord vérifier que N_Q une norme, ce qui n'est pas bien difficile ; puis montrer que $N_Q(AB) \leqslant N_Q(A)\,N_Q(B)$, ce qui provient de I.A.3) et de $Q^{-1}ABQ = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}BQ)$.

I.A.4.b) Toujours via I.A.3) on peut prendre $C_Q = N_\infty(Q^{-1})\,N_\infty(Q)$. (car $A = Q(Q^{-1}AQ)Q^{-1}$)

I.B) Si l'on note $W = D_S^{-1}\,T\,D_S$, on a : $W_{i,j} = s^{i+j-2}\,T_{i,j}$ ...
Par conséquent, les coefficients non diagonaux de W tendent vers 0 lorsque s tend vers 0.
Mais $\rho(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |T_{i,i}|$; par conséquent, $N_{D_S}(T) = \rho(T)$ pour s assez petit si $\rho(T) \neq 0$ tandis que[2] si $\rho(T) = 0$ alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, pour s assez petit on aura : $N_{D_S}(T) < \varepsilon$.

Maintenant, si A est une matrice quelconque, prenons $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}\,A\,P$ soit une matrice triangulaire T, puis D_S telle que $N_{D_S}(T) < \rho(T) + \varepsilon$: comme $N_{D_S}(T) = N_{P\,D_S}(A)$ et $\rho(T) = \rho(A)$, on a le résultat voulu.

I.C) Tout d'abord, $\rho(A)^k = \rho(A^k)$; par conséquent, si A^k tend vers la matrice nulle, $\rho(A)^k$ tend vers 0 d'après I.A.2.c) ... il s'ensuit que $\rho(A) < 1$.
Réciproquement, si $\rho(A) < 1$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$, et N_ε comme en I.B) : comme $N_\varepsilon(A^k) \leqslant N_\varepsilon(A)^k$ et $N_\varepsilon(A) < 1$, il s'ensuit que A^k tend vers la matrice nulle.

Partie II

II.A.1)
– $D_1\,(A)$ est le disque de rayon 4 ayant pour centre le point d'affixe $4 + 3\mathrm{i}$;
– $D_2\,(A)$ est le disque de rayon 1 ayant pour centre le point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$;
– $D_3\,(A)$ est le disque de rayon $3 + \sqrt{2}$ ayant pour centre le point d'affixe $5 + 6\mathrm{i}$;
– $D_4\,(A)$ est le disque de rayon 5 ayant pour centre le point d'affixe $-5 - 5\mathrm{i}$;
– $D_1'\,(A)$ est le disque de rayon $2 + \sqrt{2}$ ayant pour centre le point d'affixe $4 + 3\mathrm{i}$;
– $D_2'\,(A)$ est le disque de rayon 4 ayant pour centre le point d'affixe $-1 + \mathrm{i}$;
– $D_3'\,(A)$ est le disque de rayon 4 ayant pour centre le point d'affixe $5 + 6\mathrm{i}$;
– $D_4'\,(A)$ est le disque de rayon 3 ayant pour centre le point d'affixe $-5 - 5\mathrm{i}$.

[1] On peut prendre n'importe quoi pour argument de 0 afin d'éviter une fastidieuse discussion sur la nullité éventuelle des coefficients de A.

[2] Il me semble que cette discussion aurait pu être signalée dans l'énoncé ...

II.A.2.a) Suivant l'indication donnée en II.A.3.a) on considère une solution non nulle de l'équation $M(z) = 0$, soit p tel que $|z_p| = \|z\|_\infty$, on a : $M_{p,p}\, z_p = -\sum_{j\neq p} M_{p,j}\, z_j$; d'où l'on obtient le résultat voulu par inégalité triangulaire et division par $|z_p|$, qui est non nul.

II.A.2.b) Ici, l'énoncé dit presque tout : il suffit de remplacer M par $A - \lambda I_n$ ...

II.A.2.c) Le spectre d'une matrice est celui de sa transposée ...

II.A.3.a) Reprenant le raisonnement tenu en II.A.2.a &b) on obtient : $|A_{k,k} - \mu| \leqslant L_k$; comme l'inégalité inverse est supposée, l'égalité est prouvée.

II.A.3.b) Avec ce même raisonnement, on constate que s'il existait j tel que $|z_j| < \|z\|_\infty$, alors $|A_{k,k} - \mu| < L_k$, ce qui contredirait le fait que μ soit sur le bord de $G_L(A)$; la question précédente s'applique donc pour tout j.

II.A.4) Suivant l'énoncé[3], on notera D pour D_p ... Si l'on pose $B = D^{-1}\, A\, D$, on a : $B_{i,j} = p_i^{-1}\, p_j\, A_{i,j}$; par conséquent, $z \in D_i(B) \iff |z - A_{i,i}| \leqslant p_i^{-1} \sum_{j\neq i} p_j |A_{i,j}|$

II.A.5.a) Avec les notations précédentes, si λ est valeur propre pour A elle est valeur propre pour B donc, d'après II.A.2) et II.A.4), il existe i tel que $|\lambda - A_{i,i}| \leqslant \frac{1}{p_i} \sum_{j\neq i} p_j |A_{i,j}|$; par conséquent, $|\lambda| \leqslant \max_{i=1,2,\dots n} \frac{1}{p_i} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} p_j |A_{i,j}|$ et ce, quelque soit $p > 0$ ... d'où le résultat.

II.A.5.b.i) Le maximum de trois quantités est minoré par le tiers de leur somme ; or la matrice est symétrique et $\frac{p_i}{p_j} + \frac{p_j}{p_i} \geqslant 2$ pour $i \neq j$ (sachant que p_j et p_i sont stricment positifs) ; par conséquent, ce maximum vaut au moins $\frac{7+7+5+2(16+8+8)}{3} = \frac{83}{3}$.

II.A.5.b.ii) Les valeurs propres sont (-9) (double) et 27 ...
Nul besoin de calculatrice[4] pour cela puisque le déterminant $\begin{vmatrix} 7-x & -16 & 8 \\ -16 & 7-x & -8 \\ 8 & -8 & -5-x \end{vmatrix}$ se factorise facilement après addition des deux premières colonnes ...

II.B.1.a) D'après II.A.2.b) 0 n'est alors pas valeur propre de A, donc A est inversible.

II.B.1.b) D'après II.A.2.b) l'affixe de λ appartient à un disque centré en un point d'abscisse strictement négative dont le rayon est strictement plus petit que la valeur absolue de cette abscisse puisque A est SDD *(abrévation autorisée par l'énoncé)*; le résultat s'ensuit ...

II.B.1.c) D'après Alice au pays des merveilles, on peut remplacer dans la question précédente *négatif* par *positif*... Il s'ensuit que si tous les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs (et A réelle symétrique et SDD) alors A est définie positive, puisque ses valeurs propres sont toutes strictement positives. (ce n'est pas la définition de l'énoncé, mais c'est du cours)
Réciproquement, si A est définie positive, alors ses coefficients diagonaux sont strictement positifs puisque ce sont des carrés scalaires de vecteurs non nuls. (c'est aussi dans le cours, quelque part)

II.B.2) B étant diagonalisable, on peut écrire[5] : $B = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P inversible. Pour $E \in M_n(\mathbb{C})$, posons $H = P^{-1} E\, P$: pour $\hat{\lambda} \in \sigma_{B+E} = \sigma_{D+H}$, d'après II.A.2.b) il existe $i \in [1, n]$ tel que $|\hat{\lambda} - (\lambda_i + H_{i,i})| \leqslant L_i(D + H) = L_i(H)$. D'où : $|\hat{\lambda} - \lambda_i| \leqslant |H_{i,i}| + L_i(H) = \sum_{j=1}^{n} |Hi, j| \leqslant N_\infty(H)$. Or $N_\infty(H) = N_\infty(P^{-1} E\, P) = N_P(E) \leqslant C_P N_\infty(E)$ d'après I.A.4.b).

[3] Mais n'était-ce pas une coquille ?
[4] Et puis, qu'entend-on par *valeur approchée* ?
[5] Je dois la rédaction de cette question à Bernard Lemaire, professeur au Lycée Jean Bart de Dunkerque.

Comme $\lambda_i \in \sigma_B$, on a le résultat voulu avec $K_\infty(B) = C_P$.

Partie III

III.A.1) Toute application continue sur un segment étant bornée, les coefficients de P_t sont bornés indépendamment de $t \in [0,1]$, d'où K tel que : $|\sum_{i=1}^n c_j(t)\,x^{n-j}| \leqslant K\sum_{i=1}^n |x|^{n-j}$ $(\forall\, t \in [0,1]\,)$. Cette dernière quantité étant négligeable devant $|x|^n$ quand x tend vers $+\infty$, il s'ensuit l'existence de $R > 0$ tel que $|x|^n \geqslant 2005\,|\sum_{i=1}^n c_j(t)\,x^{n-j}|$ pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in D(0,R)$; par conséquent $Z_t \subset D(0,R)$ pour tout $t \in [0,1]$.

III.A.2) Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : pour tout $\eta > 0$, il existe t tel que $|t - t_0| < \eta$ et $|X_t - X_0| \geqslant \alpha$ pour tout $X_t \in Z_t$. Pour tout $k \geqslant 1$ il existe alors t_k tel que : $|t_k - t_0| < 1/k$ et $|X_t - X_0| \geqslant \alpha$ pour tout $X_t \in Z_{t_k}$. Posons[6] $Z_{t_k} = \{X_{i,t_k}\ ,\ i \in [1,n]\}$ (en répétant les racines avec leur multiplicité) de sorte que $|X_{1,t_k} - X_0| \geqslant |X_{2,t_k} - X_0| \geqslant \cdots \geqslant |X_{n,t_k} - X_0| \geqslant \alpha$. La suite $(X_{1,t_k}, X_{2,t_k}, \ldots, X_{n,t_k})$ est une suite de $\mathbb{C}^n$ qui est bornée d'après III.A.1). Par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(X_{1,t_{\varphi(k)}}, X_{2,t_{\varphi(k)}}, \ldots, X_{n,t_{\varphi(k)}})$ tende vers $(y_1, \ldots, y_n)$ lorsque k tend vers l'infini. D'autre part, on a : $P_{t_{\varphi(k)}}(X) = \prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$; de la continuité des c_j on déduit que, pour tout X fixé dans $\mathbb{C}$: $P_{t_{\varphi(k)}}(X)$ tend vers $P_{t_0}(X)$ et $\prod_{i=1}^n (X - X_{i,t_{\varphi(k)}})$ tend vers $\prod_{i=1}^n (X - y_i)$ lorsque k tend vers l'infini. Mézalors $P_{t_0}(X) = \prod_{i=1}^n (X - y_i)$: il existerait donc un i tel que $y_i = X_0$ … Or ceci est absurde puisqu'en faisant tendre k vers $+\infty$ dans $|X_{i,t_k} - X_0| \geqslant \alpha$, on obtient $|y_i - X_0| \geqslant \alpha$.

III.B.1) $\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ semble convenir ; mais cette question — ainsi que les suivantes — est en contradiction avec le préambule de cette partie …

III.B.2.a) Puisque $|z - A_{i,i}| = |z - A(t)_{i,i}|$, il s'ensuit que :
$|z - A(t)_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} |A(t)_{i,j}| \Longrightarrow |z - A_{i,i}| \leqslant \sum_{j\neq i} t\,|A_{i,j}| \leqslant \sum_{j\neq i} |A_{i,j}|$ pour $t \in [0,1]$.

III.B.2.b.i) $A(0) = D$ et $A_{1,1} \in \sigma_D \cap D_1(A)$ donc $0 \in E$.

III.B.2.b.ii) Si $t \in E$ soit $\lambda_t \in \sigma_{A(t)} \cap D_1(A)$: par hypothèse, $\lambda_t \notin D_i$ pour $i > 2$; soit α la distance minimale de λ_t à ces disques. En prenant pour $P_t(X)$ le polynôme caractéristique de $A(t)$, et en appliquant la proposition (P) de II.A.2) avec $\varepsilon = \alpha/2$, on obtient η tel que pour tout $u \in]t - \eta, t + \eta[\cap [0,1]$ il existe $\lambda_u \in \sigma_{A(u)}$ tel que $\lambda_u \notin D_i(A)$ pour $i > 2$; mézalors $\lambda_u \in D_1(A)$ d'après II.A.1.b) et III.B.2.a) …

III.B.2.b.iii) Pour tout $k \geqslant 1$, il existe $\lambda_{t_k} \in \sigma_{A(t_k)} \cap D_1(A)$. Comme $D_1(A)$ est compact[7], il existe une suite extraite $\lambda_{t_{\varphi(k)}}$ qui converge vers un élément μ de $D_1(A)$. Mais $P_{t_{\varphi(k)}}(\lambda_{t_{\varphi(k)}}) = 0$; d'où $P_a(\mu) = 0$ en faisant tendre k tend vers l'infini ; ainsi $\mu \in \sigma_{A(a)} \cap D_1(A)$ donc $a \in E$.

III.B.2.b.iv) E est i) non vide , ii) ouvert , iii) fermé , donc $E = [0,1]$ d'après la propriété admise, qui est la définition hors programme de la connexité[8] ; par conséquent, $\sigma_A \cap D_1(A) \neq \emptyset$.

III.B.3) D'après le dessin exécuté par ma fille — actuellement élève en 5ème — D_2 et D_4 ont la propriété de ne rencontrer aucun des trois autres disques, il existe donc au moins une valeur propre dans chacun de ces deux disques.

[6]Je dois la rédaction de cette question à Bernard Lemaire, professeur au Lycée Jean Bart de Dunkerque.
[7]Argument de compacité communiqué par Bernard Lemaire, professeur au Lycée Jean Bart de Dunkerque.
[8]Que l'on aurait pu éviter, tout comme la notion d'ouverts et de fermés **relatifs** : voir l'appendice …

Partie IV

IV.A.1) Comme il est rappelé dans l'énoncé, N_2 est une norme associée à un produit hermitien[9] ...
Reste à vérifier $N_2(AB) \leqslant N_2(A)N_2(B)$, i.e $\sum_{i,j} |\sum_{1\leqslant k\leqslant n} A_{i,k}B_{k,j}|^2 \leqslant \big(\sum_{i,j}|A_{i,j}|^2\big)\big(\sum_{i,j}|B_{i,j}|^2\big)$.
Or Cauchy-Shwarz dans $\mathbb{C}^n$ donne $|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} A_{i,k}B_{k,j}|^2 \leqslant \big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|A_{i,k}|^2\big)\big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|B_{k,j}|^2\big)$ et, pour finir : $\sum_{i,j}\big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|A_{i,k}|^2\big)\big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n}|B_{k,j}|^2\big) = \big(\sum_{i,j}|A_{i,j}|^2\big)\big(\sum_{i,j}|B_{i,j}|^2\big)$.

Pour simplifier les notations, on notera dans la suite $A \otimes B$ au lieu de $A \times_H B$ ...

IV.A.2.a) $\big(D(A\otimes B)\Delta\big)_{i,j} = D_i A_{i,j} B_{i,j} \Delta_j = \big((DA\Delta)\otimes B\big)_{i,j} = \big((DA)\otimes(B\Delta)\big)_{i,j}$
L'autre question semble avoir été mal copiée/collée ...

IV.A.2.b) $(AD_x\,{}^tB)_{i,i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}(AD_x)_{i,k}\,({}^tB)_{k,i} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} A_{i,k}\,x_k\,B_{i,k} = \big((A\otimes B)\,x\big)_i$

IV.A.2.c) $y^*(A\otimes B)\,x = e^* D_y^*(A\otimes B)\,D_x\,e =_{IV.A.2.a}\, e^*\big((D_y^* A\,D_x)\otimes B\big)\,e$
donc $y^*(A\otimes B)\,x = \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\big((D_y^* A\,D_x)\otimes B\big)\,e\Big)_i =_{IV.A.2.b)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n}(D_y^* A\,D_x\,{}^tB)_{i,i}$.

IV.A.2.d) Remplacer y par x dans ce qui précède, et revenir à la définition du produit scalaire.

IV.B.1) Puisque S est symétrique réelle positive, il existe une matrice orthogonale P telle que $S = {}^tP\,D\,P$ avec D diagonale à coefficients positifs ; il suffit alors de considérer la matrice R dont les coefficients sont les racines carrées de ceux de D : $M = RP$ convient ...
Si S est définie positive, M est inversible.

IV.B.2) Il est clair que si A et B sont symétriques alors $A\otimes B$ est symétrique. Il reste à montrer que si A et B sont positives, alors ${}^tx\,(A\otimes B)\,x \geqslant 0$ pour tout vecteur x. Grâce à la question précédente, on peut poser $A = {}^tT\,T$ et $B = {}^tU\,U$ ... Par IV.A.2.c) on a :
${}^tx\,(A\otimes B)\,x = \mathrm{tr}(D_x\,A\,D_x\,{}^tB) = \mathrm{tr}(D_x\,{}^tT\,T\,D_x\,{}^tU\,U) = \mathrm{tr}(U\,D_x\,{}^tT\,T\,D_x\,{}^tU) = \langle U\,D_x\,{}^tT,\,U\,D_x\,{}^tT\,\rangle$;
cette dernière quantité est postive, et strictement si A et B sont définies positives et x non nul. Dans ce dernier cas, $A\otimes B$ est donc définie positive.

IV.B.3.a) Soit P orthogonale telle que ${}^tP\,B\,P$ soit diagonale : ${}^tP\,(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n)\,P$ est alors diagonale à cofficients positifs, ce qui montre que $B-\lambda_{\min}(B)\,I_n$ est positive.
Le deuxième point est immédiat par IV.B.2) .

IV.B.3.b) Pour alléger les notations, on notera simplement λ la valeur propre considérée ...
On part de $A\otimes(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n) = A\otimes B - \lambda_{\min}(B)\,A\otimes I_n$ qui donne :
$0 = {}^tx\,(A\otimes B-\lambda I_n)\,x = {}^tx\,\big(A\otimes(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n)\big)\,x + \lambda_{\min}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x - \lambda$;
comme $A\otimes(B-\lambda_{\min}(B)\,I_n)$ est positive, on en déduit : $\lambda \geqslant \lambda_{\min}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x$.
Pour finir, ${}^tx\,(A\otimes I_n)\,x = \sum_i A_{i,i}\,x_i^2 \geqslant \min_i A_{i,i}\,\sum_i x_i^2 = \min_i A_{i,i}$.

IV.B.3.c) $A_{i,i} - \lambda_{\min}(A) = {}^te_i\,\big(A-\lambda_{\min}(A)\,I_n\big)\,e_i$ où e_i est le i-ème vecteur de la base canonique, et cette dernière quantité est positive puisque $A-\lambda_{\min}(A)\,I_n$ est positive d'après IV.B.3.a) .

IV.B.3.c) On repart avec $0 = {}^tx\,\big(A\otimes(B-\lambda_{\max}(B)\,I_n)\big)\,x + \lambda_{\max}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x - \lambda$:
$A\otimes(B-\lambda_{\max}(B)\,I_n)$ est négative donc $\lambda \leqslant \lambda_{\max}(B)\,{}^tx\,(A\otimes I_n)\,x$; et pour finir,
${}^tx\,(A\otimes I_n)\,x = \sum_i A_{i,i}\,x_i^2 \leqslant \max_i A_{i,i}\,\sum_i x_i^2 = \max_i A_{i,i} \leqslant \lambda_{\max}(A)$.

---

[9] **Quoique ce ne soit pas celui du programme !** Il était d'ailleurs inutile — et probablement déstabilisant pour bon nombre de candidats — de se placer ici dans le champ complexe, puisqu'on reste dans le champ réel par la suite. C'est dommage, car cette partie était bien plus abordable que la précédente.

APPENDICE

Revenons à la question III.B.2) :
E est non vide d'après i) et majoré (par 1) donc admet une borne supérieure b.
Par iii) on voit que $b \in E \ldots$ Puis $b = 1$ par ii) ...

Cette question et quelques autres montrent que ce sujet — au demeurant intéressant — n'a pas été suffisamment cobayé pour être rendu accessible à une partie significative du public concerné.

Sur les mêmes thèmes voir :
– ENSAIT 2002, deuième épreuve PC ;
– ESIEE Amiens 1995 ;
– TPE 1984, épreuve pratique ;
– ENS Fontenay-Saint-Cloud 1980, première épreuve option Maths.