ROBERT FERREOL (robert.ferreol@prepas.org)

CONCOURS CENTRALE SUPELEC MATHS 2 2004
CORRIGÉ POUR LE CONTRÔLE A POSTERIORI

I. A. $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ est un anneau car il contient $-I_2$ et est stable pour $+$ et $\times$.

I.B.1) Dans un anneau, l'ensemble des éléments inversibles est toujours un groupe multiplicatif.

I.B.2) Si A et $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\det(A).\det(A^{-1}) = 1$ donc $D = \det(A)$ divise 1 et $|D| = 1$; la réciproque se voit par la formule $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{D}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

I.C.1) $SL_2(\mathbb{Z})$ est un groupe car il contient I_2 et $\left(A, B \in SL_2(\mathbb{Z}) \Rightarrow AB^{-1} \in SL_2(\mathbb{Z})\right)$.

I.C.2) et 3) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3d - 5c = 1 \\ 3.2 - 5.1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3(d-2) = 5(c-1) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} c = 1 + 3k \\ d = 2 + 5k \end{cases}$
$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \backslash SL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} 3d - 5c = -1 \\ 3.3 - 5.2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow 3(d-3) = 5(c-2) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \begin{cases} c = 2 + 3k \\ d = 3 + 5k \end{cases}$

I.C.4) $\exists (c, d) \in \mathbb{Z}^2 \ / \ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z}) \Leftrightarrow PGCD(a, b) = 1$: c'est exactement le théorème de Bézout.

I.D.1) et 2) T est non diagonalisable quel que soit le corps car elle possède 1 pour valeur propre double et le sous-espace propre correspondant n'est pas de dimension 2 ; elle est trigonalisable puisque triangulaire...

S possède deux valeurs propres non réelles i et $-i$, elle est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, mais non trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; une forme réduite est $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ et la matrice de passage P, telle que $S = PDP^{-1}$, est $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$

$TS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 - X + 1$; ayant deux racines non réelles $-j$ et $-\overline{j}$, TS est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mais non trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; une forme réduite est $E = \begin{bmatrix} -j & 0 \\ 0 & -\overline{j} \end{bmatrix}$ et la matrice de passage Q, telle que $TS = QEQ^{-1}$, est $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\overline{j} & -j \end{bmatrix}$.

I.E.1) et 2) Si $A^2 = I_2$, A est une matrice de symétrie, donc semblable à $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; la dernière forme est impossible car le déterminant vaut -1, donc $A = \pm I_2$; la réciproque est facile.

I.F.1) si $A^2 = -I$, le polynôme scindé à racines simples $(X - i)(X + i)$ est annulateur de A donc A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et donc semblable à $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$; la seule forme où le déterminant est 1 est la troisième, et l'on constate qu'alors la trace de A est nulle.

I.F.2) D'après ce qui précède,

$$\begin{cases} A^2 = -I_2 \\ A \in SL_2(\mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \exists a, b, c \in \mathbb{Z} \ / \ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \text{avec } a^2 + bc = -1$$

I.G.1) Exercice classique : on écrit $PU = VP$ avec $P = R + iS \in GL_2(\mathbb{C})$, et on montre qu'il existe λ réel tel que $Q = R + \lambda S \in GL_2(\mathbb{R})$, d'où $QU = VQ$ et U et V sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

I.G.2) Si $A \in SL_2(\mathbb{Z})$ est solution de $A^2 = -I_2$, on vu qu'elle était semblable à $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, comme S, donc A et S sont semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$; elle le sont donc aussi dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par ce qui précède.

II. A. 1) Λ contient 0 et est stable par soustraction : c'est donc un groupe additif. Ce peut-être un anneau (par exemple pour $\alpha = 1$ et $\beta = i$, mais pas forcément, par exemple pour $\alpha = 1$ et $\beta = \pi$ (en effet π^2 ne peut s'écrire $u + v\pi$ avec u et v entier car π n'est pas algébrique).

II. A. 2) Remarquons déjà que $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) \neq 0$ car sinon (α, β) serait $\mathbb{R}$-liée. Si $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) < 0$, on change β en $-\beta$: le réseau engendré est identique : on peut donc toujours supposer $\dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$.

II. A. 3) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{az+b}{cz+d} - \dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{|cz+d|^2}\right) = \dfrac{ad-bc}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}(z)$.

II. B. I) Λ est engendré par $\mathcal{B} = (\omega_1, \omega_2)$ et par $\mathcal{B}' = (\omega_1', \omega_2')$ avec $\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ et $\dfrac{\omega_1'}{\omega_2'} \in \mathcal{H}$. il existe donc 8 entiers a, b, c, d, e, f, g, h tels que $\begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix}$; mais $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix}$ sont les matrices de passage respectives de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$, donc sont inverses l'une de l'autre ; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartient donc à $GL_2(\mathbb{Z})$; de plus $\operatorname{Im}\left(\dfrac{\omega_1'}{\omega_2'}\right) = \dfrac{ad-bc}{\left|c\dfrac{\omega_1}{\omega_2} + d\right|^2}\operatorname{Im}\left(\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\right)$, donc $ad - bc > 0$ et $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ appartient à $SL_2(\mathbb{Z})$.

II. B. 2) On montre facilement la réciproque en prouvant que les réseaux engendrés par $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont inclus l'un dans l'autre.

II. C. C'est le même problème que I. C. 3)

II. D. Si $\Lambda_\tau = \Lambda_{\tau'}$, il existe $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\begin{cases} \tau' = a\tau + b \\ 1 = c\tau + d \end{cases}$, or τ est non réel donc $c = 0$ et $d = 1$; de $ad - bc = 1$ on tire $a = 1$: donc $\tau' = \tau + b$; réciproquement, on montre facilement que pour tout b entier $\Lambda_\tau = \Lambda_{\tau+b}$.

III. A. 1) Par II. A. 2), on sait qu'un réseau Λ est engendré par (α, β) avec $\tau = \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$; il est clair que $\Lambda = \beta\Lambda_\tau$, donc Λ est semblable à Λ_τ.

III. A. 2) Si Λ_τ et $\Lambda_{\tau'}$ sont semblables, $\Lambda_{\tau'} = \lambda\Lambda_\tau$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et il existe $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ telle que $\begin{bmatrix} \tau' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda\tau \\ \lambda \end{bmatrix}$; on en déduit $\tau' = \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$; la réciproque se montre en en remontant les calculs, en utilisant II. B. 2).
REM : ceci fait le lien avec la partie IV.

III. B. 1) L'ensemble $S(\Lambda)$ est l'ensemble des coefficients a des similitudes directes de centre 0 : $z \mapsto az$ laissant stable le réseau Λ (plus le nombre 0, car l'application nulle n'est pas une similitude).

III. B. 2) Si λ est le rapport d'une homothétie de centre 0 laissant stable le réseau Λ de base (α, β), $\lambda\alpha = u\alpha + v\beta$ avec u et v entiers donc $\lambda = u$ et λ est entier ; réciproquement, il est clair que si λ est entier, $\lambda\Lambda \subset \Lambda$; nous avons montré que $S(\Lambda) \cap \mathbb{R} = \mathbb{Z}$.

III. B. 3) $S(\Lambda)$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$; en effet $-1 \in S(\Lambda)$,(car $-\Lambda = \Lambda$) et si $z, z' \in S(\Lambda)$,

$$(z + z')\Lambda \subset z\Lambda + z'\Lambda \subset \Lambda + \Lambda \subset \Lambda$$

et

$$(zz')\Lambda = z(z'\Lambda) \subset z\Lambda \subset \Lambda$$

donc $z + z'$ et $zz' \in \Lambda$.

III. B. 4) $S(\Lambda_{\mathcal{B}}) = S(\Lambda_\tau)$ car

$$z\Lambda_{\mathcal{B}} \subset \Lambda_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow z\omega_2\Lambda_\tau \subset \omega_2\Lambda_\tau \Leftrightarrow z\Lambda_\tau \subset \Lambda_\tau$$

III. B. 5) Si $z \in S(\Lambda_t)$, comme $1\in \Lambda_\tau$, $z = z\times 1 \in \Lambda_t$, donc $S(\Lambda_t) \subset \Lambda_t$.

III. C. 1) Soit z un élément non entier de $S(\Lambda_t)$; comme z et τz appartiennent à Λ_τ , il existe 4 entiers a, b, c, d tels que $z = a\tau + b$ et $\tau z = c\tau + d$, donc $\tau(a\tau + b) = c\tau + d$, et $a\tau^2 + (b-c)\tau - d = 0$; z n'étant pas entier, a est non nul et τ est racine d'un polynôme du second degré à coefficients entiers.

III. C. 2) a) On suppose que τ vérifie $u\tau^2 + v\tau + w = 0$ avec u, v, w entiers, $u \neq 0$; alors $(u\tau + v)\tau = -w$ appartient à Λ_τ donc $z = u\tau + v$ appartient à $S(\Lambda_\tau)$; u étant non nul, z n'est pas réel, donc $S(\Lambda_\tau)$ n'est pas contenu dans $\mathbb{R}$.

III. C. 2) b) Si $u = 1$, $\tau + v$ appartient à $S(\Lambda_t)$, donc τ également ainsi que tout $a\tau + b$ avec a et b entiers : Λ_t est donc inclus dans $S(\Lambda_t)$ et lui est donc égal par III. B. 5).
REM : Λ_τ est donc dans ce cas un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

IV. A. 1) $\operatorname{Im}(g(z)) = \dfrac{1}{|cz+d|^2}\operatorname{Im}(z)$, donc $\operatorname{Im}(z) > 0 \Rightarrow \operatorname{Im}(g(z)) > 0$ et $g(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$.

IV. A. 2) On montre par un calcul simple que $(\Phi(A) \circ \Phi(A'))(z) = \Phi(AA')(z)$. Γ est donc stable pour la loi $\circ$.

IV. A. 3) $\Phi(A) \circ \Phi(A^{-1}) = \Phi(I_2) = id_{\mathcal{H}}$ donc $\Phi(A)$ est bijective et $(\Phi(A))^{-1} = \Phi(A^{-1})$. Φ est donc un morphisme du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ dans le groupe de bijections de $\mathcal{H}$, et son image Γ est donc un groupe.

IV. A. 4)

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= id_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H} \quad z = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H} \quad cz^2 + dz = az + b \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = a \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = c = 0 \\ a = d = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \pm I_2\end{aligned}$$

IV. A. 5)
a) $\Phi(A) = \Phi(A') \Leftrightarrow \Phi(AA'^{-1}) = id_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow AA'^{-1} = \pm I_2 \Leftrightarrow \boxed{A' = \pm A}$.
b) $ST = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $TS = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ donc $ST \neq \pm TS$ d'où $\Phi(S) \circ \Phi(T) \neq \Phi(T) \circ \Phi(S)$ et Γ n'est pas commutatif.

IV. B. 1) L'équation demandée est une traduction de $|z-\omega|^2 = R^2$; $\mathcal{C}(\omega, R) \subset H \Leftrightarrow R < \operatorname{Im}\omega$.

IV. B. 2) On a $s(z) = s^{-1}(z) = -\dfrac{1}{z}$; donc

$$z \in s(\mathcal{C}(\omega, R)) \Leftrightarrow -\frac{1}{z} \in \mathcal{C}(\omega, R) \Leftrightarrow |z|^2 + \frac{\overline{\omega z} + \omega z}{|\omega|^2 - R^2} + \frac{|\omega|^2}{\left(|\omega|^2 - R^2\right)^2} = \frac{R^2}{\left(|\omega|^2 - R^2\right)^2}$$

donc $s(\mathcal{C}(\omega, R)) = \mathcal{C}\left(-\dfrac{\overline{\omega}}{|\omega|^2 - R^2}, \dfrac{R}{|\omega|^2 - R^2}\right)$

IV. C. 1) On a $z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = \beta$, d'où

$$z = x + iy \in s(\mathcal{D}) \Leftrightarrow s^{-1}(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{z}\right) = \beta \Leftrightarrow \frac{y}{x^2 + y^2} = \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2\beta}\right)^2 = \dfrac{1}{(2\beta)^2} \\ x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

donc $s(D) = \mathcal{C}\left(\dfrac{i}{2\beta}, \dfrac{1}{2\beta}\right) \setminus \{0\}$

IV. C. 2) On a $z \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re} z = \alpha \\ \operatorname{Im} z > 0 \end{array} \right.$, d'où

$$z = x + iy \in s(\mathcal{D}) \Leftrightarrow s^{-1}(z) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(-\dfrac{1}{z}\right) = \alpha \\ \operatorname{Im}\left(-\dfrac{1}{z}\right) > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{x}{x^2+y^2} = -\alpha \\ y > 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left(x + \dfrac{1}{2\alpha}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{(2\alpha)^2} \text{ si } \alpha \neq 0 \\ y > 0 \end{array} \right.$$

donc $s(\mathcal{D}) = \mathcal{C}\left(-\dfrac{1}{2\alpha}, \dfrac{1}{2\alpha}\right) \cap \mathcal{H}$ si $\alpha \neq 0$, la demi-droite Oy sinon.

IV. D) $\mathcal{F}$ est la portion de bande verticale fermée de largeur 1 centrée sur Oy limitée inférieurement par le cercle trigonométrique ; comme $t(z) = z + 1, t(\mathcal{F})$ et $t^{-1}(\mathcal{F})$ sont des translatés de $\mathcal{F}$ d'une unité vers la droite et vers la gauche.

IV. E. 1) Toute partie bornée, contient un nombre fini de noeuds du réseau Λ_τ (par exemple parce qu'on peut placer en chaque noeud du réseau un disque centré en ce noeud de rayon fixé ne contenant pas d'autre noeud que ce noeud) ; donc l'ensemble $\left\{ |c\tau + d|^2 \;\; / \;\; (c,d) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ a une intersection finie avec tout segment $[0, U], U > 0$, donc a fortiori également l'ensemble $\left\{ |c\tau + d|^2 \;\; / \;\; A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \text{ et } \Phi(A) \in G \right\}$; cet ensemble possède donc un minimum, atteint pour un couple (c_0, d_0) ; notons $A_0 = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix}$ la matrice correspondante et $g_0 = \Phi(A_0)$; soit alors $g \in G$; on a bien

$$\operatorname{Im}(g(\tau)) = \frac{1}{|c\tau + d|^2} \operatorname{Im}(z) \leqslant \frac{1}{|c_0\tau + d_0|^2} \operatorname{Im}(\tau) = \operatorname{Im}(g_0(\tau))$$

IV.E.2) $\tau' = g_0(\tau)$; remarquons que $\operatorname{Re}(t^m(\tau')) = \operatorname{Re}\tau' + m$; or étant donné un réel x il existe toujours un entier m (l'entier le plus proche de $-x$) tel que $|x + m| \leqslant \dfrac{1}{2}$; donc il existe un entier m et que $|\operatorname{Re}(t^m(\tau'))| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

IV. E. 3) Soit $\tau'' = t^m(\tau')$; $\operatorname{Im}\tau'' = \operatorname{Im}\tau' = \operatorname{Im} g_0(\tau) \geqslant \operatorname{Im} g(\tau)$ pour tout $g \in G$ d'après la définition de g_0 ; or $s(\tau'') = g(\tau)$ avec $g = s \circ t^m \circ g_0 \in G$; donc $\operatorname{Im}\tau'' \geqslant \operatorname{Im} g(\tau) = \operatorname{Im} s(\tau'') = \dfrac{\operatorname{Im}\tau''}{|\tau''|^2}$; on en déduit bien $|\tau''|^2 \geqslant 1$, soit $|\tau''| \geqslant 1$ et $\tau'' \in \mathcal{F}$.

IV. F. 4) Soit g un élément de Γ ; si l'on prouve que $g \in G$, on aura prouvé $G = \Gamma$.

Soit τ un point intérieur à $\mathcal{F}$ et considérons un élément $g_0 \in G$ défini dans IV. E. 2) associé à $g(\tau)$ au lieu de τ ; soit m défini dans IV. E. 2) tel que $t^m \circ g_0(g(\tau)) \in \mathcal{F}$; d'après le résultat admis dans l'énoncé (qui est "visuellement" évident...), il est impossible que $t^m \circ g_0 \circ g$ soit différent de id_H car sinon τ ne serait pas un point intérieur à $\mathcal{F}$. Donc $t^m \circ g_0 \circ g = id_H$ et $g = g_0^{-1} \circ \tau^{-m} \in G$ C.Q.F.D.