CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE MATHS 1 CENTRALE 2004

On aura souvent besoin dans ce problème du critère continu de convergence dominée de Lebesgue :
si $\lim\limits_{x\to a} f(x,t) = g(t)$, s'il existe φ intégrable sur I telle que $\forall t \in I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ alors $\lim\limits_{x\to a} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ qui se démontre comme le théorème de continuité sous le signe intégral avec le critère séquentiel de limite.

Partie I - Calcul de la somme d'une série

I.A.1 Par un calcul immédiat on a $a_n(f) = 0$, $b_{2p}(f) = 0$ et $b_{2p+1}(f) = \dfrac{4}{\pi(2p+1)}$. On a donc

$$S_n(f)(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{[(n-1)/2]} \frac{1}{2p+1}\sin[(2p+1)x].$$

I.A.2 Grâce au théorème de Dirichlet, comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique alors, si $x \not\equiv 0[\pi]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = f(x)$ (car x n'est pas un point de discontinuité) puis si $x \equiv 0[\pi]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = 0 = f(x)$.
Conclusion : dans tous les cas on a $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(f)(x) = f(x)$.
Enfin, si $x = \dfrac{\pi}{2}$, $\sin(2p+1)x = \sin(p\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^p$ donc $S = \dfrac{\pi}{4} f(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$.

I.A.3 On applique l'égalité de Parseval à f :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(2p+1)x\,\mathrm{d}x$$

$$1 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\times\frac{1}{2}$$

d'où $S_1 = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(2p+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

I.B.1 $L(x)$ est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1 donc L est déjà définie pour $x \in]-1,1[$. Comme $\sum \dfrac{1}{n+1}$ est une série divergente, L n'est pas définie en ± 1.
Conclusion : L est définie sur $]-1,1[$ intervalle maximal.
Comme $-\ln(1-x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ on obtient $L(x) = \dfrac{-\ln(1-x^2)}{x^2}$.

I.B.2 I est bien définie car si on pose $g(x) = \dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2}$ alors $g(x) \underset{0}{\sim} -1$ et $g(x) \underset{1}{\sim} \ln(1-x)$ qui est intégrable.
Soit $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-\ln(1-x^2)}{x} - \ln\frac{1+x}{1-x}$ après une intégration par parties.
Pour avoir la valeur de I, il suffit de prendre la limite de h quand x tend vers 1. Or $h(x) = \underbrace{-\dfrac{1-x}{x}\ln(1-x)}_{\to 0} - \underbrace{\dfrac{x+1}{x}\ln(1+x)}_{\to 2\ln 2}$ donc $I = -2\ln 2$.

I.B.3 On écrit que $\dfrac{\ln(1-x^2)}{x^2} = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^{2n}}{n+1} = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Les fonctions f_n sont positives, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ donc $\sum \int_0^1 f_n$ converge. On peut appliquer le théorème de Lebesgue d'intégration terme à terme d'une série de fonctions :

$$I = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(n+1)}$$

et en conclusion $S_2 = 2\ln 2.$

I.B.4 S_3 est définie car $\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)^2} \sim \dfrac{1}{4n^3}$. On réécrit S_3 : $S_3 = 4\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)^2}$.
Or $2S_1 - S_2 = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{2(n+1)-2n-1}{(n+1)(2n+1)^2} = \dfrac{1}{4}S_3$ donc $S_3 = 4\left(\dfrac{\pi^2}{4} - 2\ln 2\right) = \pi^2 - 8\ln 2.$

Partie II - Étude locale de F

II.A On a $|t^{-z}| = t^{-x}$.

- En 0 : $|t^{-z}p(t)| \underset{0}{\sim} \dfrac{|\ln t|}{t^x}$ intégrable ssi $x < 1$ $(t^{\frac{1+x}{2}}|t^{-z}p(t)| \underset{0}{\sim} t^{\frac{1-x}{2}}|\ln t| \to 0)$.
- En 1 : $|t^{-z}p(t)| \underset{1}{\sim} |\ln(1-t)|\times(1-t)$ qui se prolonge par continuité.

Conclusion : $D_F = \Omega.$

II.B $tp(t)$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$ donc il existe $A > 0$ tel que $|tp(t)| \le A$ d'où

$$|F(z)| \le \int_0^1 t^{-x-1}.|tp(t)|\,\mathrm{d}t \le \frac{A}{|x|} \to 0 \text{ i.e. } \lim_{\mathrm{Re}(z)\to-\infty} F(z) = 0.$$

II.C.1 On sait que $\ln(1-t) \le -t$ donc $-\ln(1-t) \ge t$ soit $\left|\dfrac{\ln(1-t)}{t}\right| \ge 1$ pour $t \in]0,1[$. On déduit de cette inégalité le résultat suivant :

$$F(x) = \int_0^1 t^{-x}|\ln t|\frac{|\ln(1-t)|}{t}\,\mathrm{d}t \ge -\int_0^1 t^{-x}\ln t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(1-x)^2}$$

après une intégration par parties.
Conclusion : $\lim\limits_{x\to1} F(x) = +\infty.$

II.C.2 On vient de voir que $G(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

II.C.3 $F(x) - G(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}|\ln t|\left(\frac{|\ln(1-t)|}{t} - 1\right)\mathrm{d}t$. Soit $\varphi(t) = \dfrac{-\ln(1-t)}{t} - 1$, $\varphi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{t}{2}$.
$t^{-x}|\ln t|\varphi(t) \le |\ln t|\dfrac{\varphi(t)}{t} = \psi(t)$ et $\psi(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{|\ln t|}{2}$ intégrable et ψ se prolonge par continuité en 1.
On peut appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\lim_{x\to1} F(x) - G(x) = \int_0^1 \underbrace{\frac{|\ln t|}{t}\left(\frac{-\ln(1-t)}{t} - 1\right)}_{=\psi(t)}\mathrm{d}t.$$

II.C.4 $\dfrac{F(x)}{G(x)} = 1 - \dfrac{F(x)-G(x)}{G(x)} \to 1$ quand $x \to 1$.

II.D Soit $f(x,t) = t^{-x}p(t) \in \mathcal{C}(]-\infty,1[\times]0,1[)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -t^{-x}\ln t.p(t) \in \mathcal{C}(]-\infty,1[\times]0,1[)$.
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable au voisinage de 1 (se prolonge par continuité) et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \underset{0}{\sim} \dfrac{\ln^2 t}{t^x}$ est intégrable pour $x < 1$.
$\forall a \in]-\infty,1[$, $\forall x \in]-\infty,a[$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \underbrace{|\ln t|t^{-a}p(t)}_{\text{intégrable}}$. Le théorème de dérivation de Lebesgue s'applique sur $]-\infty,a[$ pour tout a donc F est dérivable sur I et

$$\boxed{F'(x) = \int_0^1 -t^{-x}\ln t.p(t)\,\mathrm{d}t.}$$

De même $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (-\ln t)^k t^{-x}p(t)$ est majoré par $|\ln t|^k t^{-a}p(t)$ donc, par récurrence sur k F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et $\boxed{F^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}(-\ln t)^k p(t)\,\mathrm{d}t.}$

II.E.1 On reprend à peu de chose près la démonstration que l'on vient de faire : on pose $f(x,y,t) = t^{-x}t^{-iy}p(t)$, $\dfrac{\partial^{k+l} f}{\partial x^k \partial y^h}(x,y,t) = (-\ln t)^{k+l}i^l f(x,y,t)$ et on utilise le même argument qu'au **II.D** et on a

$$\boxed{\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}F(x,y) = \int_0^1 (-\ln t)^{k+l}i^l t^{-z}p(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } F \in \mathcal{C}^\infty.}$$

II.E.2 On remarque que $\boxed{i\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y}.}$

II.E.3 Par un calcul simple on arrive à $\boxed{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0.}$

II.F.1 On pose $z_n = x_n + iy_n$ alors

$$F(z_n)-F(z) = (x_n-x)\frac{\partial F}{\partial x}(z)+(y_n-y)\frac{\partial F}{\partial y}(z)+o(z_n-z) = [(x_n-x)+i(y_n-y)]\frac{\partial F}{\partial x}(z)+o(z_n-z)$$

d'où $\dfrac{F(z_n)-F(z)}{z_n-z} = \dfrac{\partial F}{\partial x}(z)+o(1) \to \dfrac{\partial F}{\partial x}(z)$. On a ainsi $\boxed{DF(z) = \displaystyle\int_0^1 -\ln t.t^{-z}p(t)\,\mathrm{d}t.}$

II.F.2 On prouve de même que $i\dfrac{\partial DF}{\partial x} = \dfrac{\partial DF}{\partial y}$ donc $\dfrac{DF(z_n)-DF(z)}{z_n-z} \to \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(z)$ et, par une récurrence immédiate, $\boxed{D^k F(z) = \dfrac{\partial^k F}{\partial x^k}(z).}$

II.G.1 $t^{-u} = e^{-u\ln t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-\ln t)^n}{n!}u^n$ pour $t > 0$, $R = +\infty$.

II.G.2 En utilisant le développement de la question précédente, on a $F(z) = \displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t)z^k\,\mathrm{d}t$ où $f_k(t) = \dfrac{(-\ln t)^k}{k!}p(t)$. Chaque fonction f_k est intégrable sur $I =]0,1[$ et les fonctions f_k sont positives.
Si on pose $S_K(t,r) = \displaystyle\sum_{k=0}^{K} f_k(t)r^k$ avec $0 < r < 1$ alors $S_K(t,r)$ est majorée par $t^{-r}p(t)$ qui est intégrable sur I donc le théorème de convergence dominée nous permet de dire que, avec $r = |z|$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k = \lim_{K\to+\infty} \int_0^1 S_K(t,z)\,\mathrm{d}t = F(z).$$

On déduit de ceci l'égalité demandée.

II.G.3 On vient de voir que le rayon de convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ est supérieur ou égal à 1. Comme $F(x) \to +\infty$ quand $x \to 1$ alors $R \leq 1$.
Conclusion : $R = 1$.

II.H.1 On a prouvé que $\lim_{x\to 1}(F(x) - G(x)) = l > 0$ au **II.C.3**. On développe G en série entière de la même façon que F, $G(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ avec $b_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^{k+1}\,\mathrm{d}t = k+1$ (en posant $t = e^{-x}$ on reconnaît la fonction Γ). Or

$$c_k - b_k = \frac{1}{k!}\int_0^1 (-\ln t)^{k+1}\left[-1 - \frac{\ln(1-t)}{t}\right]\mathrm{d}t \geq 0.$$

Montrons que $\sum c_k - b_k$ converge. En effet pour $x > 0$, $F(x) - G(x)$ qui tend vers l en croissant donc $\sum_{k=0}^{+\infty}(c_k - b_k)x^k \leq l$. Soit $K \in \mathbb{N}$ on a, en passant à la limite quand $x \to 1$

$$\sum_{k=0}^{K}(c_k - b_k)x^k \to \sum_{k=0}^{K}(c_k - b_k) \leq l$$

donc la série à termes positifs $\sum c_k - b_k$ converge i.e. $c_k - b_k \to 0$ et en particulier $c_k \sim k$.

II.H.2 Comme $c_n \to +\infty$ alors la série $\sum c_k z^k$ diverge pour $|z| = 1$.

Partie III - Développements en série

III.A.1 On sait que $\dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}$ et le rayon de convergence vaut 1.

III.A.2 On fait une intégration par parties $\begin{cases} u &= \ln t \qquad \mathrm{d}u &= \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \\ \mathrm{d}v &= t^{n-z}\,\mathrm{d}t \qquad v &= \dfrac{t^{n-z+1}}{n-z+1} \end{cases}$

d'où $u_n(z) = \underbrace{\left[\dfrac{t^{n-z+1}}{n-z+1}\ln t\right]_0^1}_{=0} - \dfrac{1}{n-z+1}\displaystyle\int_0^1 t^{n-z}\,\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{(n-z+1)^2}.$

III.A.3 $F(z) = -\displaystyle\int_0^1 t^z \ln t \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t$. Soit $g_n(t) = \dfrac{t^{n-z}}{n+1}(-\ln t)$ alors$|g_n(t)| = \dfrac{t^{n-x}}{n+1}(-\ln t)$ où $x = \mathrm{Re}(z)$. Or $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)(n-x+1)^2}$ et $\sum \int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge donc, en vertu du théorème d'interversion de $\sum$ et $\int$ on a bien

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+1-z)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n-z)^2}.$$

III.B.1 Soit $h_n(u) = \dfrac{1}{n(n-u)^2}$ pour $u < 1$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} h_n(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n(n-x)}$.
Pour $x \in I$, la série $\sum \int_{-\infty}^{x} h_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge et les fonctions h_n sont ≥ 0, on peut, là

aussi intervertir $\sum$ et $\int$ d'où

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} F(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x} h_n(u)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)}$$

et $\Phi(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

III.B.2 Pour $0 < x < 1$ on a $0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ (série convergente) d'où

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\Phi(x) = \lim_{x\to 1} 1 + (1-x)\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x)} = 1$$

d'où $\Phi(x) \underset{1}{\sim} \frac{1}{1-x}$.

III.C.1 $H(y) = F(iy) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-iy)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(y)$.

Or $|f_n(y)| = \frac{1}{n(n^2+y^2)}$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(y)|\,\mathrm{d}y = \frac{1}{n^2}\left[\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{n}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{n^2}$.

La série $\sum \int_{\mathbb{R}} |f_n|$ converge donc on peut lui appliquer le théorème de Lebesgue d'interversion intégrale et sommation. $|H|$ est alors intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(n-iy)^2}}_{=0} = 0.$$

Ensuite $|H(y)|^2 \leq |H(y)| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2+y^2)} \leq |H(y)| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ donc $|H|^2$ est intégrable car $|H|$ l'est.

III.C.2 Étudions la convergence de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta}$.

Si $\alpha+\beta \leq 1$ alors $\frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \sim \frac{1}{m^{\alpha+\beta}}$, cette série diverge donc une condition nécessaire pour que la somme $S(\alpha,\beta)$ soit définie est que $\alpha+\beta > 1$, ce que l'on suppose par la suite.

On va chercher un équivalent de $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta}$ et on utilise pour cela le théorème de comparaison série-intégrale avec $f(x) = \frac{1}{x^\alpha(x+n)^\beta}$. $f'(x) = -\frac{(\alpha+\beta)x+\alpha n}{x^{\alpha+1}(x+n)^{\beta+1}}$.

- Si $\alpha \geq 0$ alors f est décroissante donc $I_n \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \leq \frac{1}{(1+n)^\beta} + I_n$ où $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(x+n)^\beta}$. On fait le changement de variable $y = nx$ dans I_n on a $I_n = \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha(y+1)^\beta}$.
  - Si $\alpha < 1$ alors $I_n \sim \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha(y+1)^\beta}}_{=I}$ donc $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha(m+n)^\beta} \sim \frac{I}{n^{\alpha+\beta-1}}$ i.e. $S(\alpha,\beta) < +\infty$ ssi $2\alpha+\beta-1 > 1$.

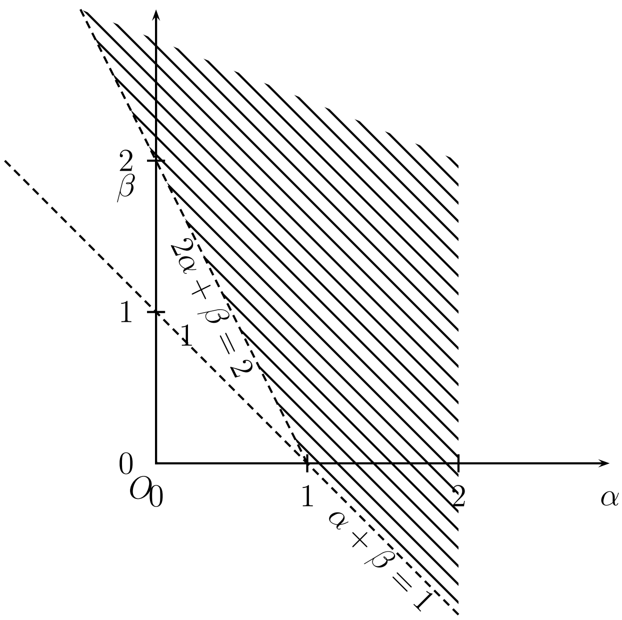
- Si $\alpha > 1$ alors, avec le théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$\int_{1/n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha (y+1)^\beta} = \int_{1/n}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha (y+1)^\beta} + \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha (y+1)^\beta}$$
$$\sim \int_{1/n}^{1} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1}.$$

  d'où $I_n \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \dfrac{n^{\alpha-1}}{\alpha-1} = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^\beta}$ et donc la condition $\alpha+\beta>1$ suffit à faire converger $S(\alpha,\beta)$.
  Remarque : on peut se passer du théorème cité ci-dessus (qui n'est plus au programme) en utilisant l'encadrement $1 \le y \le 2$ pour $y \in [0,1]$ et intégrer les inégalités ainsi obtenues (mais il faut alors distinguer les cas $\beta \ge 0$ et $\beta < 0$).
- Si $\alpha = 1$, le raisonnement ci-dessus nous donne $I_n \sim \dfrac{\ln n}{n^\beta}$ et la comparaison avec les séries de Bertrand nous donne là encore la convergence de $S(\alpha,\beta)$ pour $\alpha+\beta>1$.

• Si $\alpha < 0$ on pose $\gamma = \dfrac{-\alpha}{\alpha+\beta}$ alors, par le même genre d'argument que ci-dessus, on obtient $\displaystyle\sum_{m=[\gamma n]+1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha (m+n)^\beta} \sim \int_{\gamma n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha (x+n)^\beta} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{y^\alpha (y+1)^\beta}$.
Or $\displaystyle\sum_{m=1}^{[\gamma n]} \frac{1}{m^\alpha (m+n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} S_n$ où $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{[\gamma n]} h(\tfrac{m}{n})$ avec $h(t) = \dfrac{1}{t^\alpha (1+t)^\beta}$. On reconnaît à peu de choses près une somme de Riemann qui admet comme limite $\displaystyle\int_0^\gamma \frac{y^{-\alpha}\,\mathrm{d}y}{(y+1)^\beta}$.

Finalement $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^\alpha (m+n)^\beta} \sim \frac{1}{n^{\alpha+\beta-1}} \int_0^{+\infty} \frac{y^{-\alpha}\,\mathrm{d}y}{(y+1)^\beta}$. On se retrouve en fait dans le cas où $\alpha < 1$ traité ci-dessus d'où le domaine de convergence :



III.C.3 On décompose la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(y+im)^2 (y-in)^2} = \frac{1}{(m+n)^3}\left[-\frac{m+n}{(y+im)^2} - \frac{(m+n)}{(y-in)^2} + \frac{2i}{y+im} - \frac{2i}{y-in}\right].$$

On remarque ensuite que, pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(y+a)^2} = 0$ (cf.**III.C.1**) et, pour $b \in \mathbb{R}^*$,

$$\int_{-X}^{X} \frac{\mathrm{d}y}{y+ib} = \left[\frac{1}{2}\ln(y^2+b^2)\right]_{-X}^{X} - i\left[\operatorname{Arctan}\frac{y}{a}\right]_{-X}^{X} \to -2\varepsilon i\pi$$

où ε est du signe de b.

Finalement $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(y+im)^2(y-in)^2} = \frac{4\pi}{(m+n)^3}.}$

$$\begin{aligned} |H(y)|^2 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m(m-iy)^2} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+iy)^2} = \sum_{m,n\geq 1} \frac{1}{mn} \frac{1}{(y+im)^2(y-in)^2} \\ &= \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{1\leq m,n\leq N} \frac{1}{mn} \frac{1}{(y+im)^2(y-in)^2}}_{=H_N(y)}. \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_N(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{1\leq m,n\leq N} \frac{4\pi}{mn(m+n)^3}$ qui est une somme convergente vers $S(1,3)$.
Ensuite on applique le théorème de convergence dominée car

- $0 \leq H_N(y) \leq |H(y)|^2$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$,
- $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} H_N(y) = |H(y)|^2$

d'où, en conclusion : $\boxed{\displaystyle\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |H(y)|^2\,\mathrm{d}y = S(1,3).}$

III.D.1 Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ alors chaque quantité $\dfrac{1}{n(n-z)^2}$ est définie et comme $\left|\dfrac{1}{n(n-z)^2}\right| \sim \dfrac{1}{n^3}$, la série définissant F converge absolument. Le domaine $\widetilde{\Omega}$ est donc égal à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}^*$ (c'est l'ensemble maximal sur lequel F peut être définie).
Sur $\widetilde{\Omega}$ on a $F(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n-x-iy)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(x,y)$ et, par une récurrence immédiate,

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F_n(x,y) = \frac{i^l}{n} \frac{(k+l+1)!}{(n-x-iy)^{k+l+2}}.$$

Soit $\Omega_p = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{d}(x,\mathbb{N}) > \frac{1}{p},\ x < p\}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\left|\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F_n(x,y)\right| \leq \dfrac{1}{n}\dfrac{(k+l+1)!}{(n-p)^{k+l+2}}$ donc la série $\displaystyle\sum \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} F_n$ converge normalement sur Ω_p, F est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω_p pour tout p et par conséquent F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\widetilde{\Omega} = \displaystyle\bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \Omega_p$.

III.D.2 $|z-n|^2 = (x-n)^2 + y^2 \geq (n-n_0)^2$ d'où, en posant $a = z' - n$ et $b = z - n$ alors

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{a^p} - \frac{1}{b^p}\right| &= |b-a| \times \left|\frac{1}{a^p b} + \frac{1}{a^{p-1}b^2} + \cdots + \frac{1}{ab^p}\right| \\ &\leq |b-a|\left(\frac{1}{|a|^p.|b|} + \frac{1}{|a|^{p-1}|b|^2} + \cdots + \frac{1}{|a|.|b|^p}\right) \leq \frac{p|z-z'|}{(n-n_0)^{p+1}}. \end{aligned}$$

III.D.3 Soit (z_q) une suite de complexes de $\widetilde{\Omega}$ qui tend vers z et n_0 un entier $\geq \mathrm{Re}(z_q)$ pour tout q alors, en posant $f_n(z_q) = \dfrac{1}{n(z-z_q)}\left[\dfrac{1}{(z_q-n)^2} - \dfrac{1}{(z-n)^2}\right]$, on a

$$\frac{F(z_q)-F(z)}{z_q-z} = \sum_{n=1}^{n_0} f_n(z_q) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(z_q).$$

- $\lim\limits_{z_q\to z} f_n(z_q) = \dfrac{-2}{(z-n)^3}$,
- $|f_n(z_q)| \leq \dfrac{2|z-z_q|}{(n-n_0)^3} \leq \dfrac{2M}{(n-n_0)^3}$ où M est un majorant des $|z-z_q|$.

La série $\sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty} f_n(z_q)$ converge normalement donc on peut intervertir la limite sur q et la sommation d'où

$$\lim_{z_q\to z}\frac{F(z_q)-F(z)}{z_q-z} = -2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(z-n)^3} = DF(z).$$

La récurrence est alors immédiate vu la majoration du **III.D.2** qui assure la convergence normale.

Finalement : $D^kF(z) = (k+1)!\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n-z)^{k+2}}.$

III.E.1 On utilise la formule du **III.A.3**. Pour $|z|<1$ on a

$$\frac{1}{(n-z)^2} = \frac{1}{n^2}\frac{1}{(1-\frac{z}{n})^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{z^k}{n^k}.$$

- La série des modules converge vers $\dfrac{1}{(n-|z|)^2}$,
- la série $\sum \dfrac{1}{n(n-|z|)^2}$ converge

on peut donc utiliser le théorème d'interversion des séries qui dit que

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)z^k\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+3}}.$$

On a ainsi $c_k = (k+1)\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{k+3}}.$

III.E.2 Pour $k\in\mathbb{N}$ on a $\dfrac{1}{n^{k+3}} \leq \dfrac{1}{n^3}$ donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^{k+3}}$ converge normalement et par conséquent

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{k+3}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{n^{k+3}} = 1$$

et en conclusion : $c_k \sim k.$

Remarque : on pouvait aussi utiliser le théorème de comparaison série-intégrale.