Partie I – Exemples élémentaires

I.A.1 Dériver (P_1) par rapport à y puis poser $y = x$.

I.A.2 L'appartenance à $\mathrm{E}_n(\mathrm{I})$ peut s'établir par récurrence, ainsi que la formule donnant la dérivée :

$$\left(\mathrm{M}^k\right)' = \sum_{p=0}^{k-1} \mathrm{M}^p \mathrm{M}' \mathrm{M}^{k-p-1}$$

I.A.3 La continue dérivabilité de M^{-1} résulte par exemple d'un expression de l'inverse à l'aide de la matrice complémentaire, mais la dérivée s'exprime plus simplement grâce à la dérivation de $\mathrm{M}\mathrm{M}^{-1} = \mathbb{I}_n$: on obtient $\left(\mathrm{M}^{-1}\right)' = -\mathrm{M}^{-1}\mathrm{M}'\mathrm{M}^{-1}$.

I.B.1 On obtient facilement $\left(\dfrac{c}{b}\right)' = \left(\dfrac{d-a}{b}\right)' = 0$. Il s'ensuit que $\dfrac{c}{b}$ et $\dfrac{d-a}{b}$ sont des constantes. On a donc des scalaires λ et μ tels que $\mathrm{M}(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ \lambda b(x) & a(x) + \mu b(x) \end{pmatrix}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. Donc, on peut choisir $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$ et M vérifie aussi (P_1).

I.B.2 L'existence de X est classique. Si $\mathrm{BA} = \mathrm{AB}$, alors on a $\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{BX} & = & u\mathrm{X} + v\mathrm{AX} \\ \mathrm{BAX} & = & u\mathrm{AX} + v\mathrm{A}^2\mathrm{X} \end{array} \right.$ de sorte que $\mathrm{B} = u\mathbb{I}_2 + v\mathrm{A}$.

I.B.3 L'existence du couple $(u,\, v)$ résulte de la question précédente. Montrons que u et v sont *localement* continues (*sic !*). Si $x_0 \in \mathrm{I}$, alors par exemple $a(x_0) \neq d(x_0)$ car $\mathrm{M}(x_0)$ n'est pas scalaire. On a donc $a(x) \neq d(x)$ sur tout un voisinage $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ de x_0. Or, $\left\{ \begin{array}{rcl} u + va & = & a' \\ u + vd & = & d' \end{array} \right.$ et donc $\left\{ \begin{array}{rcl} u & = & \dfrac{a'd - ad'}{d-a} \\ v & = & \dfrac{d' - a'}{d-a} \end{array} \right.$ montre que u et v sont continues sur J. **On conclut de même si** $b(x_0) \neq 0$ **ou** $c(x_0) \neq 0$.

On obtient alors $\mathrm{C}' = v\mathrm{C}$, que l'on résout composante par composante :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \mathrm{C}(x) = \begin{pmatrix} \alpha \exp \mathrm{V}(x) & \beta \exp \mathrm{V}(x) \\ \gamma \exp \mathrm{V}(x) & \delta \exp \mathrm{V}(x) \end{pmatrix}$$

où V est une primitive de v et où α, β, γ et δ sont des scalaires. Comme $\mathrm{C}(x_0) = 0$, on conclut que $\mathrm{C} = \underline{0}$, et ce pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, de sorte que M vérifie (P_1).

I.B.4a On vérifie essentiellement que b est bien C^1 ; le reste est mécanique.
I.B.4b (P_2) équivaut au système $(bc' = b'c,\ xb' = 2b,\ xc' = 2c)$. La solution générale d'icelui est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x \leqslant 0 & \longmapsto & (b(x),\, c(x)) = (\alpha x^2,\, \beta x^2) \\ x \geqslant 0 & \longmapsto & (b(x),\, c(x)) = (\gamma x^2,\, \delta x^2) \end{array} \right.$$

où α, β, γ, δ sont des scalaires.
On vérifie alors

1. que (P_1) est satisfaite si, et seulement si, $\alpha = \gamma$ et $\beta = \delta$,
2. que $\mathrm{Vect}\,\{\mathrm{M}(x),\, x \in \mathrm{I}\}$ est de dimension 2 dans ce cas, et 3 sinon. En effet, une famille génératrice en est toujours $\left\{ \mathbb{I}_2\,,\ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \delta & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

I.C.1 Cela résulte du théorème de relèvement des applications C^1.

I.C.2 M est alors de la forme $x \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\vartheta(x) & \sin\vartheta(x) \\ \sin\vartheta(x) & -\cos\vartheta(x) \end{pmatrix}$. Ainsi, (P_2) équivaut à $\vartheta' = 0$ c'est-à-dire à M constante.

Partie II – Étude de cas particuliers

II.A Appliquer le résultat admis au sous-espace vectoriel E_0 des matrices antisymétriques réelles d'ordre n. Le résultat subsiste par exemple pour une équation de la forme

$$\mathrm{M}'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\, {}^t\mathrm{P}_k(x)\mathrm{M}^{2k+1}\mathrm{P}_k(x)$$

où $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_m$ sont des fonctions matricielles continues sur I.

II.B.1 On obtient $\mathrm{T}'(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)\mathrm{T}^k(x)$. On applique alors $\mathscr{T}$ au sous-espace vectoriel E_1 des matrices triangulaires supérieures réelles d'ordre n.

II.B.2 Chaque composante $\mathrm{T}_{i,\,i}$ est solution de $y' = \sum_{k=0}^{m} a_k(x)y^k$, de sorte que $\mathrm{T}(x)$ est stricte pour tout $x \in \mathrm{I}$ si, et seulement si, $\underline{0}$ est solution de cette équation, c'est-à-dire si, et seulement si, $a_0 = \underline{0}$.

II.B.3 Si $\mathrm{T}'(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k(x)\mathrm{T}^k(x)$, alors T^r est solution de l'équation (E) :

$$\mathrm{M}' = ra_1(x)\mathrm{M} + ra_2(x)\mathrm{TM} + \ldots + ra_m(x)\mathrm{T}^{m-1}\mathrm{M} = (ra_1(x)\mathrm{M} + ra_2(x)\mathrm{TM} + \ldots + ra_m(x)\mathrm{T}^{m-1})\mathrm{M}$$

(En effet, cela découle de **I.A.2** sachant qu'en plus T et T′ commutent.) Le résultat $\mathscr{T}$ appliqué au sous-espace vectoriel E_1' des matrices triangulaires supérieures réelles strictes d'ordre n montre alors que l'équation (E), avec le problème de Cauchy $\mathrm{M}(x_0) = 0$, n'admet comme solution maximale que la solution nulle. De cela suit que $\mathrm{T}^r = \underline{0}$ (et, d'ailleurs, que l'indice de nilpotence de $\mathrm{T}(x)$ est constant puisque, on vient de le voir, il admet en tout point un maximum local).

II.C.1 Appliquer $\mathscr{T}$ au sous-espace vectoriel $\mathfrak{z}$ des matrices réelles d'ordre n qui commutent avec $\mathrm{U}(x_0)$.

II.C.2 Si l'équation est polynomiale, les conditions du **II.C.1** sont satisfaites, ce quel que soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Donc (P_1) est satisfaite, et cela implique (P_2). Cela étant, on peut aussi appliquer $\mathscr{T}$ au sous-espace vectoriel $\mathfrak{z}' = \mathbb{R}[\mathrm{U}(x_0)]$ et cela montre que $\mathrm{U}(x) \in \mathfrak{z}'$ pour tout x, de sorte que, grâce par exemple au théorème de Cayley-Hamilton,

$$\dim\left(\mathrm{Vect}\left(\{\mathrm{U}(x),\, x \in \mathrm{I}\}\right)\right) \leqslant n$$

[Ce résultat illustre celui du **I.B.4b**.]

II.D Posons $\varphi(t) = \exp(t\mathrm{M})\mathrm{N}\exp(-t\mathrm{M})$. Alors, φ est solution de

$$\begin{cases} \mathrm{P}' & = & \mathrm{MP} - \mathrm{PM} \\ \mathrm{P}(0) & = & \mathrm{N} \end{cases}$$

et $\mathscr{T}$ appliqué dans E à cette équation montre que $\varphi(t) \in \mathrm{E}$ pour tout t.

Partie III – Cas des matrices orthogonales

III.A.1 Avec ces hypothèses, la constante $x \longmapsto \mathrm{U}(x_0)$ est solution de $(\mathscr{E}')$ et $\mathscr{T}$ montre que $\mathrm{U}(x) =$

$\mathrm{U}(x_0)$ pour tout x.

III.A.2 $\mathrm{N}-\mathrm{J}$ est solution de $\mathrm{M}' = -a(x)\,({}^t\mathrm{UM}+\mathrm{MU})$. Or, $\mathrm{N}(x_0)-\mathrm{J}=0$, et la constante nulle vérifie aussi cette équation, ce qui implique que $\mathrm{N}(x)=\mathrm{J}$ pour tout x. De cela suit, si J est inversible, que $\det^2(\mathrm{U}(x))=1$ pour tout x puis que $\det \mathrm{U}(x)$ est une constante (argument de valeur intermédiaire).

III.B.1a C'est une propriété des matrices de rotation.

III.B.1b La matrice demandée est de la forme $\begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0\\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ pour un ϑ réel. Alors $\mathrm{M}_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}) = \begin{pmatrix}0 & -\sin\vartheta & -\sin 2\vartheta\\ 1 & \cos\vartheta & \cos 2\vartheta\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, dont le déterminant est $\det_{\mathrm{B}}(\mathrm{C}) = 2\sin\vartheta(1-\cos\vartheta)\neq 0$. Donc, C est une base de $\mathbb{R}^3$.

III.B.1c Procéder comme en **I.B.3**.

III.B.1d On a $({}^t\mathrm{UU})' = 0 = (u+w)(\mathrm{U}+{}^t\mathrm{U}) + 2v\mathbb{I}_3$. Comme U vérifie les hypothèses de **III.B**, $\{\,\mathbb{I}_3\,,\,\mathrm{U}+{}^t\mathrm{U}\,\}$ est libre et on en déduit que $v=0$ et $w=-u$. Donc $\mathrm{U}' = u(\mathbb{I}_3-\mathrm{U}^2)$ et U satisfait bien une équation de la forme attendue.

III.B.2 L'introduction de A (*transformation de* Cayley) est licite car, vu les hypothèses, $x \longmapsto (\mathbb{I}_3+\mathrm{U}(x))^{-1}$ est définie et C^1 (*confer* **I.A.3**). Alors, la formule $\mathrm{A} = (\mathbb{I}_3+\mathrm{U})^{-1}(\mathbb{I}_3-\mathrm{U})$ montre que $\mathrm{U}(x)$ et $\mathrm{A}(x)$ commutent pour tout x. Maintenant, $\mathbb{I}_3+\mathrm{A}(x)$ est inversible pour tout x : si $\mathrm{AX}=-\mathrm{X}$ pour $\mathrm{X}\in\mathbb{R}^3$, alors $(\mathbb{I}_3+\mathrm{U})\mathrm{AX} = (\mathbb{I}_3-\mathrm{U})\mathrm{X}$ montre que $2\mathrm{X}=0$ puis $\mathrm{X}=0$. Alors, $\mathrm{U} = (\mathbb{I}_3+\mathrm{A})^{-1}(\mathbb{I}_3-\mathrm{A})$ donne, après calcul, $\mathrm{A}' = -2u\mathrm{A}$. De cela suit $\mathrm{A}(x) = \exp(-2\Upsilon(x))\mathrm{A}_0$, où $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}(x_0)$ et $\Upsilon(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} u(t)\,\mathrm{d}t$. Donc, quel que soit x, $\mathrm{U}(x) = (\mathbb{I}_3+\exp(-2\Upsilon(x))\mathrm{A}_0)^{-1}(\mathbb{I}_3-\exp(-2\Upsilon(x))\mathrm{A}_0)$. Inversement, quoique cela ne soit pas demandé, on vérifie que U vérifie les hypothèses du **III.B** si, et seulement si, A_0 est une matrice antisymétrique non nulle.

[À noter que les matrices trouvées correspondent à des rotations de même axe : avec les notations *supra*, pour $x\in\mathrm{I}$ et $\mathrm{X}\in\mathbb{R}^3$, $\mathrm{U}(x)\mathrm{X}=\mathrm{X} \iff \mathrm{A}(x)\mathrm{X}=0 \iff \mathrm{A}_0\mathrm{X}=0$. Cela explique la construction faite à la question suivante : pour obtenir des $\mathrm{U}(x)$ qui ne commutent pas, on leur autorise un subreptice changement d'axe à la faveur d'un passage par la matrice unité, matrice canonique d'une rotation qui a pléthore d'axes comme on le sait en général.]

III.C Soit ψ une fonction C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\psi(0)=\psi'(0)=0$ et qui ne soit constante ni sur $\mathbb{R}^+$ ni sur $\mathbb{R}^-$. On pose

$$\mathrm{M}(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix}\cos\psi(x) & -\sin\psi(x) & 0\\ \sin\psi(x) & \cos\psi(x) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \text{si } x\leqslant 0\\[2ex] \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\psi(x) & -\sin\psi(x)\\ 0 & \sin\psi(x) & \cos\psi(x)\end{pmatrix} & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$$

Alors, $\mathrm{M}(x)$ et $\mathrm{M}'(x)$ commutent pour tout x. En revanche, $\mathrm{M}(x)$ et $\mathrm{M}(y)$ *ne commutent pas* dès lors que $x<0<y$, $\psi(x)\neq 0$, $\psi(y)\neq 0$, $|\psi(x)|<\pi$, $|\psi(y)|<\pi$ (et un tel couple $(x,\,y)$ existe).

III.D Vu **II.C**, $\mathrm{U}(x)$ commute avec $\mathrm{U}(0)$ pour tout x, et est donc de la forme demandée. En outre,

$$\begin{pmatrix}a' & b'\\ b' & a'\end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 + \begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}^2 \iff \begin{cases} a' &= 1+a^2+b^2\\ b' &= 2ab\end{cases}$$

On a alors $u' = 2a.(u-1)$ avec $u(0)=1$ et donc $u=\underline{1}$. De cela suit $a' = 2(1+a^2)$ avec $a(0)=0$ et donc $a(x) = \operatorname{tg} 2x$ pour $x\in\mathrm{I}$. De $b' = 2b\operatorname{tg}2x$ et $b(0)=1$ on déduit $b = \dfrac{1}{\cos 2x}$ pour $b\in\mathrm{I}$. Comme intervalle I maximal, il est loisible de choisir $\left]-\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right[$ puisqu'aucun prolongement n'est possible en $\pm\dfrac{\pi}{4}$.