(version dimanche 19 mai 2002 : 6h58)

nom :

spé MP1 carnot DIJON

Solution concertée de **Philippe FONTAINE, Guez de Balzac ANGOULÈME et Lg VIDIANI, Carnot DIJON**

TITRE PROPOSÉ **Décroissances rapide ou exponentielle, Théorème de généralisé de NEUMANN de développement en série de TCHEBYCHEV**

(NEUMANN Carl Gottfried Königsberg 1832 Leipzig 1925, Dont on trouvera le portrait et une courbe biographie dans http : //www − history.mcs.st − andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Neumann_Carl.html) (Plus généralement aller à http : //www − history.mcs.st − and.ac.uk/ ∼ history/BiogIndex.html)

(Le but du problème et de chaque partie est donné en clair, la fin du problème est signalée ; la pagination est normalisée : numéro de page en cours / nombre total de pages : tout est fait pour donner de bonnes conditions matérielles aux candidats ; Une coquille (vénielle) qui est rectifiable par tous les candidats :⚠Dans le préambule de (II.C), il est marqué $\mathbb{C}_n(X)$ (séries formelle) au lieu de $\mathbb{C}_n[X]$ (polynômes) ; ⚠La balance entre les indices k pour la décroissance rapide et tantôt l'indice n soit l'indice k pour les coefficients de FOURIER dans la partie III, introduit un risque de confusion qui aurait pu être évité ; Les remarques particulières seront faites, à l'emplacement où elles se posent.). La question (II.A.1) me semble hors programme MP ! De plus le problème alterne, sans préavis, des questions triviales et d'autres difficilles, ce qui peut bloquer les candidats dans leur progression (par exemple (III.C.2) n'est pas évidente, alors que celles qui l'encadrent sont élémentaires.

(Google donne 388 réponses pour la décroissance exponentielle (carbone 14, cinétique chimique), et 459 pour la décroissance rapide (ondelettes) ; ce sont donc des notions constamment utilisées dans différents domaines)

CONCOURS CENTRALE- SUPÉLEC 2 mai 2002 8h-12h : Mathématiques première épreuve Filière MP

Préliminaires et objectifs du problème

(a) **Décroissance exponentielle implique rapide :**

Cela tient au fait que $r^n n^k \to 0$ pour n tendant vers l'infini, et cela quel que soit k, d'après le cours : la fonction expoentielle est prépondérante àl'infini par rapport à toute puissance. On a donc $r^n \le M_k \frac{1}{n^k}$; une simple étude de la fonction $f(x) = r^x x^k = e^{x \ln(r)} x^k = e^{ax} x^k$, comme $f'(x) = e^{ax} x^{k-1}(ax + k)$ montrant qu'elle est majorée par $M_k = f(-\frac{k}{a}) = f(-\frac{k}{\ln r}) = e^{-k}(-\frac{k}{\ln r})^k$.

(b) $\mathcal{F}_\infty$ **et** $\mathcal{F}_{exp}$ **sous espaces vectoriels de** $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{C})$**, les comparer :** Ce sont en effet deux ensembles non vides (ils contiennent tous deux la fonction nulle) et stables par les lois d'espace, car si dans la définition respective Q_n et R_n sont associés à f et g, comme (avec des notations classiques) $||f+\lambda g-Q_n-\lambda R_n||_\infty \le ||f-Q_n||+|\lambda|||g-R_n||_\infty$ et que les suites à décroissance rapide (respectivement exponentielle) sont deux espaces vectoriels, la suite $||f+\lambda g - Q_n - \lambda R_n||_\infty$ est elle aussi à décroissance rapide (ou exponentielle).

Le (a) a prouvé que $\boxed{\mathcal{F}_{\mathbf{exp}} \subseteq \mathcal{F}_\infty}$

(c-i) **f à dérivées bornées par un même M est dans** $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$ **:**

■ **Première solution :** Appliquant à f la formule de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre n en 0, et appelant Q_n le polynôme partie régulière de ce développement : $Q_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f - Q_n = \frac{f^{(n}(\theta x)}{n!} x^n$ et ainsi $|f-Q_n| \le \frac{M}{n!}$ qui est à décroissance rapide d'après STIRLING ou beaucoup plus élémentairement car $n! \ge 2^{n-1}$ donc $\frac{1}{n!} \le 2(\frac{1}{2})^n$ est à décroissance rapide avec $r = \frac{1}{2} < 1$.

■ **Seconde solution (par TAYLOR intégral) :** La série de Taylor de f a un rayon de convergence infini puisque $|a_n x^n| = \left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n\right| \le M \frac{|x|^n}{n!}$ la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ ($\sum_n M \frac{|x|^n}{n!} = M e^{|x|}$). Si l'on considère pour Q_n le polynôme de Taylor de f en 0, par la formule de Taylor avec reste intégrale on obtient : $\forall x \in [-1,1]$ $|f(x) - Q_n(x)| \le \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{n+1}(t)\,dt\right| \le \left|\int_0^x \frac{1^n}{n!} M\,dt\right| \le \frac{1}{n!}\int_0^1 dt = \frac{1}{n!}$.

Or la suite $(\frac{1}{n!})_n$ est à décroissance exponentielle (découle de la convergence de la série exponentielle) donc $(\|f - Q_n\|\infty)_n$ est à décroissance exponentielle ce qui permet de conclure que f est un élément de $\mathcal{F}_{exp}$.

(c-ii) **Exemples de fonctions de** $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$ **:**

Les exemples triviaux Ae^x, $\frac{A}{1+x^2}$, sin, cos, sinh, cosh, cas particuliers vérifiant la condition suffisante précédente, viennent immédiatement à l'esprit.

Partie I -Polynômes de TCHEBYCHEV

(I-A) **Premières propriétés des $\mathbf{T_n}$**

(I-A-1) **$\mathbf{T_n}$ est un polynôme :**

Posant $t = \arccos x$, la formule de MOIVRE donne $T_n(x) = \mathrm{Re}(\cos t + i \sin t)^n = \sum_{p=0}^{2p\leq n} C_n^{2p} \cos^{n-2p} t(-1)^p(1 - \cos^2 t)^p$, qui est bien un poslynôme en $x = \cos t$, à coefficients entiers et de degré $\leq n$.

(I-A-2) **Expliciter $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, $\mathbf{T_3}$, et T_4 :** *(Pourquoi poser cette question ici, alors après (A-3) ce serait plus rapide et plus simple, en utilisant la relation de récurrence entre trois polynômes d'indices successifs ?)*

Utilisant soit le calcul direct, soit la formule précédente on a :

$$\begin{cases} T_1 = \cos t & = \mathbf{x} \\ T_2 = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1 & = \mathbf{2x^2 - 1} \\ T_3 = \cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t(1-\cos^2 t) = 4\cos^3 t - 3\cos t & = \mathbf{4x^3 - 3x} \\ T_4 =_c os^4 t - 6\cos^2 t(1-\cos^2 t) + (1-\cos^2 t)^2 = 8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 & = \mathbf{8x^4 - 8x^2 + 1} \end{cases}$$

(I-A-3) **Relation de récurrence $\mathbf{T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)}$:** La formule de trigonométrie $\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos t \cos nt$ intepretée donne immédiatement la formule annoncée.

(I-A-4) **Parité, degré, coefficient dominant de $\mathbf{T_n}$:** L'hypothèse de récurrence (vérifée pour les 4 premières valeurs de n) que T_n est de la parité de n, de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} se transfère immédiatement grâce à la relation de récurrence précédente, en remarquant que xT_{n+1} est une fonction polynomiale de parité différente de celle de T_{n+1}.

(I-A-5) **Algorithme de calcul de $\mathbf{T_n(X)}$:** La formule de récurrence, précédente s'interprète : on ajoute à $-T_n$ le produit par $2X$ de T_{n+1} ; en ordonnant (sort) on trouve T_{n+2}.

Entrée de n
$u \leftarrow 1$
$v \leftarrow X$
For p from 2 to n do
$w \leftarrow v$
$v \leftarrow 2 * X * v - u$
$u \leftarrow w$
endfor
Afficher v

Avec le logiciel Maple on a plus simple : La commande $with(orthopoly)$; donne $[G, H, L, P, T, U]$, puis $T(4, x)$; donne instantanément $8x^4 - 8x^2 + 1$ et $T(12, x)$ donne aussi $2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1$

(I-A-6) **$\mathbf{T_n(\cos t) = \cos nt}$:** Tout $t \in | = [0, \pi]$ est un arccos : il suffit de poser $t = arcosx$ et alors la formule de définition de T_n devient $T_n(\cos t) = \cos nt$.

(I-B)**Calcul des normes**

(I-B-1) **Calculer $||T_n||_\infty$:**

La formule précédente prouve que $|T_n(x)| = |\cos nt| \leq 1$ atteint pour $t = 0$ par conséquent $\boxed{||\mathbf{T_n}||_\infty = \mathbf{1}}$

(I-B-2) **$|\sin \mathbf{nu}| \leq \mathbf{n}|\sin \mathbf{u}|$:** Triviale pour $n = 0$, l'inégalité demandée se transfère par récurrence à partir de $\sin(n+1)t = \sin nt \cos t + \cos nt \sin t$ et l'inégalité triangulaire : puisque $|\sin(n+1)t| = |\sin nt \cos t + \cos nt \sin t| \leq_{\text{inégalité triangulaire}} |\sin nt| \times 1 + 1 \times |\sin t| \leq_{\text{hypothèse de récurrence à l'ordre n}} (n+1)|\sin t|$.

(I-B-3) **Déduire $||\mathbf{T'_n}||_\infty = \mathbf{n^2}$:**

Par dérivation de fonction composée (on pose $x = \cos t$ et $T_n^*(t) = T_n(\cos t)$) on a $|\frac{\partial T_n}{\partial x}| = |\frac{\partial T_n^*}{\partial t}.\frac{\partial t}{\partial x}| =$
$= |-n \sin nt \frac{1}{\sin t}| \leq_{\text{d'après (I.B.2)}} n^2$ qui est la borne sup car obtenue par prolongement d'inégalité large quand t tend vers 0 ou π.

(I-C) **Encadrement de $\mathbf{T_n(x)}$ sur $[\mathbf{1}, +\infty[$**

(I-C-1) $\mathbf{T_n(\frac{r+r^{-1}}{2}) = \frac{r^n+r^{-n}}{2}}$ **:**

Posant $r = e^t$, t réel, on a $\frac{r+r^{-1}}{2} = \cosh t$ et l'hypothèse de récurrence $T_n(\cosh t) = \cosh nt$ vérifiée pour $n = 0, 1, 2$ se transfère grâce à la formule de récurrence (I.A.3) puisque $T_{n+2}(\cosh t) = 2\cosh t \cosh nt - \cosh nt = \cosh(n+2)t$; La formule d'EULER $\cosh nt = \frac{e^{nt}+e^{-nt}}{2}$ donne immédiatement le résulat puisque $e^{nt} = (e^t)^n$. (formule qui serait même valable pour t complexe car n est entier).

(I-C-2-a) **Existence de $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^*$, tel que $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}+\mathbf{r}^{-1}}{\mathbf{2}}$:**

Il suffit d'étudier les variations de $f(r) = \frac{r+r^{-1}}{2}$ sur $\mathbb{R}*$, ou plus simplement de constater que dans le calcul précédent si $x = \cosh t$ (t positif par exemple, puisque cosh est paire) alors $r = e^t$ convient.

(I-C-2-b) **Déduire que $\mathbf{1 \leq T_n(x) \leq (x + \sqrt{x^2-1})^n}$:**

Cet encadrement résulte trivialement de $T_n(\cosh t) = \cosh nt \geq 1$ d'une part et du fait que comme $2xr = r^2 + 1$ soit $r^2 - 2xr + 1 = 0$, il y a deux valeurs de r qui conviennent de même signe (leur produit est 1, positif le signe de $2x$ leur somme). Comme elles sont inverses l'une de l'autre, celle qui est ≥ 1 est $r = x + \sqrt{x^2-1}$ or $\frac{r^n+r^{-n}}{2} \leq 2r^n\frac{1}{2} = r^n = (x+\sqrt{x^2-1})^n$.

(I-D) **Équation différentielle vérifiée sur $\mathbb{R}$ par $\mathbf{T_n}$**

(I-D-1) **Équation différentielle vérifiée par $\mathbf{T_n}$:**

Comme avec les notations données en (I.B.3) $T^*" = -n^2 \cos nt = -n^2 T_n^*$ et comme par dérivation de fonction composée $T_n^{*\prime} = \frac{\partial T_n}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t} = -T_n' \sin t$ et $T_n^{*}" = T"_n(\sin^2 t) - T'n \cos t = T"_n(1-x^2) - xT_n'$, il vient : $T"_n(1-x^2) - xT_n' = -n^2 T_n$ et l'équation différentielle demandée est donc pour $x \in [-1, 1]$: $\boxed{\mathbf{y"(1-x^2) - xy' + n^2 y = 0}}$

Mais la fonction polynomiale $x \mapsto (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x)$ est identiquement nulle sur $[-1, 1]$, aussi le polynôme $(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2 T_n(X)$ est le polynôme nul, par conséquent pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0$. L'équation différentielle vérifiée par T_n sur $\mathbb{R}$ est donc bien $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$.

(I-D-2) **Déduire de la question (1-D-1) que $\mathbf{T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{2^k k!}{(2k)!}}$:**

On dérive les deux membres de l'équation précédente, par LEIBNITZ à l'ordre $k-1$: on obtient $y^{(k+1)}(1-x^2) - 2(k-1)xy^k - (k-1)(k-2)y^{(k-1)} - xy^{(k)} - (k-1)y^{(k-1)} + n^2 y^{(k-1)} = 0$;

Faisant $x = 1$ dans cette relation, il vient, en posant pour simplifier $A_k = T_n^{(k)}(1)$: $A_k(2k-1) = A_{k-1}(n^2 - (k-1)^2)$ soit par transitivité en remarquant que $A_0 = T_n(1) = \cos n0 = 1$, on a

$$\begin{cases} A_k(2k-1) = A_{k-1}(n^2-(k-1)^2) \\ A_{k-1}(2k-3) = A_{k-2}(n^2-(k-2)^2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1 = A_0 n^2 \end{cases} \text{ soit } A_k = \frac{(n^2(n^2-1)\dots\dots(n^2-(k-1)^2)}{1.3\dots(2k-1)}$$

Reconstituant les factorielles on peut écrire : $A_k = \frac{(n.n.(n-1)(n-(k-1))\times(n+1)\dots(n+k-1)}{1.2.3\dots(2k-1)(2k)} 2^k k!$

Qui en complétant encore des factorielles amorcées dans le groupe de gauche, donne bien la formule annoncée.

■ **Montrer que $\mathbf{T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k} T_n^{(k)}(1)}$:**

La dernière formule demandée, provient du fait que T_n est de la parité de n et que k dérivations (chaque dérivation change la parité) donnent que $T_n^{(k)}(x)$ est de la parité de $n+k$.

Partie II -Application des polynômes de TCHEBYCHEV à la majoration des polynômes et de leurs dérivées

⚠ **Attention, il est sous entendu que $\mathbf{n \geq 1}$!**

(II-A) **Majoration d'un polynôme sur $[\mathbf{1}, +\infty[$**

(II-A-1) **Résoudre l'équation $|\mathbf{T_n(x)}| = \mathbf{1}$ et calculer** $T_n'(a_j)$ **:** Cela revient en posant $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ à résoudre $\cos nt = \varepsilon = \pm 1$. Ce qui donne $t_k = \frac{k}{n}\pi$, $k = 0..n$, et $\cos nt_k = (-1)^k$. Compte tenu de la décroissance de cos sur $[0, \pi]$ en changeant k en $n-k$, on trouve comme solutions les a_k et $T_n(a_k) = (-1)^{n-k}$.

Comme $T_n(\cos t) = \cos nt$ on a $T_n'(\cos t) = -n \sin nt[-\frac{1}{\sin t}]$; le problème est qu'en 0 ou π, il y a indétermination : Pour $j = 1..n-1$ $T_n'(a_j) = 0$. Mais on applique la formule du $(I.D.2)$ avec $k = 1$ ce qui donne pour $j = n$: $T_n'(1) = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(n-1)!}\frac{2}{2} = n^2$ et toujours d'après cette question, pour $j = 0$, $T_n'(-1) = (-1)^{n+1}n^2$. D'où la synthèse

$\mathbf{T_n'(a_n) = n^2}$	$\mathbf{T_n'(a_0) = (1)^{n+1} n^2}$	$\mathbf{T_n'(a_j) = 0}$ **pour j=1..n-1**

(II-A-2) **Montrer que** $\mathbf{T_n(X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}L_i(X)}$ **:** C'est la formule de décomposition sur la base de LAGRANGE, quand on connait la valeur de $T_n(a_j) = (1)^{n-j}$ donnée par la question précédente.

(II-A-3) **Montrer que** $\mathbf{T_n(x) = \sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|}$ **:**

La formule précédente valable sur un ensemble de cardinal infini $[-1,1]$ est valable aussi sur $\mathbb{R}$ et en particulier pour $x \geq 1$. Mais les a_j étant dans $[-1,1]$ et $x \geq 1$ les $X - a_j$ sont ≥ 0.

Or le dénominateur de L_i est $(a_i - a_0)(a_i - a_1)....(a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1})...(a_i - a_n)$. Compte tenu de la croissance des a_k les i premiers facteurs sont positifs. Les $n - i$ derniers sont négatifs. Le dénominateur de L_i est donc du signe de $(-1)^{n-i}$ donc $(-1)^{n-i}L_i(x) = |L_i(x)|$ cqfd.

(II-A-4) $\mathbf{|P(x)| \leq ||P||_\infty(x + \sqrt{x^2+1})^n}$ **:**

D'après LAGRANGE, comme P est de degré $\leq n$, on a $P(x) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(x)$, donc par inégalité triangulaire :

$|P(x)| = |\sum_{i=0}^{n} P(a_i)L_i(x)| \leq \sum_{i=0}^{n}|P(a_i)|.|L_i(x)| \leq_{\text{car les } a_i \in [0,1]} ||P||_\infty \sum_{i=0}^{n}|L_i(x)| \leq_{\text{d'après (II.A.3)}} ||P||_\infty T_n(x)$ $\leq_{\text{D'après (I.C.2.b)}} ||P||_\infty(x + \sqrt{x^2-1})^n$.

(II-B) **Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur** $[\mathbf{1}, +\infty[$

(II-B-1) $\mathbf{T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n}|L_i^{(k)}(x)|}$ **:**

C'est exactement la même justification qu'en (II.A.3) car en dérivant le numérateur de $L_i(x)$ tous les termes qui apparaissent dans cette dérivée de produit sont positifs.

(II-B-2) $\mathbf{|P^{(k)}(x)| \leq ||P||_\infty T_n^{(k)}(x)}$ **:**

C'est exactement la même justification qu'en (II.A.4) en utilisant (II.B.1), sauf pour la dernière inégalité puisque cette fois on ne connait pas de majorant de $T_n^{(k)}(x)$, comme on le connaissait pour $T_n(x)$ par (I.C.2.b).

(II-C) **Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur** $[\mathbf{-1}, \mathbf{1}]$

(II-C-1) $\mathbf{|P_\lambda^{(k)}(1)| = \left(\frac{|\lambda|+1}{2}\right)^k |P^{(k)}(\lambda)|}$ **:**

On dérive par rapport à x, k fois les deux membres de la formule posée, à chaque dérivation apparait le coefficient angulaire $\frac{\lambda+\varepsilon}{2}$ de la fonction affine et compte tenu des définitions de ε on constate que $|\frac{\lambda+\varepsilon}{2}| = \frac{|\lambda|+1}{2}$.

(II-C-2) **Déduire que** $\mathbf{||P^{(k)}||_\infty \leq 2^k T_n^{(k)}(1)||P||_\infty}$ **:**

Comme $(1 + |\lambda|) \geq 1$ l'égalité précédente donne

$|P^{(k)}(\lambda)| \leq 2^k |P_\lambda^{(k)}(1)| \leq_{\text{D'après (II.B.2) pour } x = 1 \text{ et } P_\lambda \in \mathbb{C}_n[X]} 2^k ||P_\lambda||_\infty T_n^{(k)}(1)$.

Il reste à remarquer que pour $x \in [-1,1]$ alors $\frac{\lambda+\epsilon}{2}x + \frac{\lambda-\epsilon}{2} \in [-1,1]$ pour obtenir $\|P_\lambda\|_\infty \leq \|P\|_\infty$.

- Si $0 \leq \lambda \leq 1$, alors $-1 \leq 0\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} \leq \frac{\lambda+1}{2}x + \frac{\lambda-1}{2} = \lambda\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} \leq 1\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} = x \leq 1$
- Si $-1 \leq \lambda < 0$ alors $-1 \leq x = (-1)\frac{1-x}{2} + \frac{x+1}{2} \leq \frac{\lambda-1}{2}x + \frac{\lambda+1}{2} = \lambda\frac{1-x}{2} + \frac{x+1}{2} \leq 0\frac{1-x}{2} + \frac{x+1}{2} \leq 1$

D'où la majoration demandée pour $||P^{(k)}||_\infty$.

(II-C-3) $\mathbf{||P^{(k)}||_\infty \leq 2^{2k}\frac{k!}{(2k)!}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}||P||_\infty}$ **et la majoration plus fine** $||P'||_\infty \leq 2n^2||P||_\infty$ **:**

Le second membre de l'inégalité précédente donne :

$2^k||P||_\infty T_n^{(k)}(1) =_{\text{D'après (I.D.2)}} 2^{2k}\frac{n}{n+k}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\frac{k!}{(2k)!}$ qui implique bien la majoration demandée puisque $0 < \frac{n}{n+k} \leq 1$

■ La majoration plus fine provient de faire $k = 1$ dans l'avant dernière majoration et d'utiliser (I.B.3) pour majorer $|T_n'(1)|$ par n^2.

Partie III - Détermination de l'ensemble $\mathcal{F}_\infty$

(III-A) **Propriétés liées aux normes** $\mathbf{N_2}$ **et** $\mathbf{N_\infty}$

(III-A-1) **La suite** $\mathbf{(S_n(\varphi))_{n\in\mathbb{N}}}$ **converge uniformément vers** φ **:** ⚠ (Question)

■**Première solution :** *(Cette question me semble d'une difficulté exagérée, hors du programme MP)*

En effet, la la convergence normale puisque $|c_n(\varphi)e_n + c_{-n}(\varphi)e_{-n}| \leq (|c_n(\varphi)| + |c_{-n}(\varphi)|)$ implique la convergence uniforme demandée, et comme les $S_n(f)$ sont continues, la convergence se fait vers une fonction g continue, dont les coefficients de FOURIER sont, puisque $\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \lim S_n(t)e^{-ikt}dt =$

$=_{\text{droit de permuter somme et intégrale, car la CV est uniforme}} \lim \int_{-\pi}^{\pi} S_n(t)e^{-ikt}dt =_{\text{famille e(k) orthonormale}} 2\pi c_k(\varphi)$.

Les coefficients de FOURIER de la fonction continue $F = g - \varphi$ sont donc nuls.

Mais par WEIESTRASS trigonométrique F continue sur $[-\pi, \pi]$ est bornée (par M), et est limite uniforme d'une suite $F_n \in \tau_n$. (alias $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists n_0 \in \mathbb{N})$ $(\forall n \geq n_0 \Longrightarrow \forall t \in [-\pi,_p i]|F(t) - F_n(t)| \leq \varepsilon)$

On a donc $(F|F) = (F|F - F_n + F_n) =_{\text{coefficients de Fs nuls de } F_n} = (F|F - F_n)$; donc $0 \leq (F|F) = |(F|F - F_n)| = |\int_{-\pi}^{\pi}(F(t)[F(t) - F_n(t)]dt| \leq M \int_{-\pi}^{\pi} |F - F_n|dt \leq M(2\pi)\varepsilon$.

Par conséquent $N_2(F) = 0$ et par séparation $F = 0$ alias $g = \varphi$. (on peut ausi utiliser le fait que l'égalité de PARSEVAL est vraie puisque la famille (e_k) est une base Hilbertienne dans l'ensemble des fonctions 2π-périodiques intégrables). $\mathbf{S_n}(\varphi)$ **converge donc uniformément vers** φ**).**

■ **Seconde solution :**

L'hypothèse donnée assure la convergence normale, donc uniforme, sur $\mathbb{R}$ de la série de FOURIER de φ. D'après le cours la série de FOURIER d'une fonction continue converge pour la norme N_2 vers φ, et on a aussi la majoration $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. Supposons que la série de FOURIER de φ converge uniformément vers g alors $N_\infty(S_n(\varphi) - g) \to 0$ mais alors $N_2(S_n(\varphi) - g) \to 0$, en vertu de l'unicité de la limite on a $g = \varphi$. En conclusion la série de FOURIER de φ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers φ.

(III-A-2) $\mathbf{N_2}(\varphi - \omega) > \mathbf{N_2}(\varphi - \mathbf{S_n}(\varphi))$ **:**

D'après le rappel $S_n - \varphi$ est orthogonale à tout élément de τ_n donc en particulier à $S_n - \omega$, donc par PYTHAGORE comme $\varphi - \omega = (\varphi - S_n) + (S_n - \omega)$ on a : $N_2(\varphi - \omega)^2 = N_2(\varphi - S_n)^2 + N_2(S_n - \omega)^2 > N_2(\varphi - S_n)^2$ d'après le fait que N_2 est strictement positive (axiome de séparation) sur τ_n).

(III-A-3) $|\mathbf{c_k}(\varphi)| \leq \frac{\mathbf{N_\infty}(\varphi^{(\mathbf{p})})}{|\mathbf{k}|^{\mathbf{p}}}$ **:**

Une intégration par parties $\left\{ \begin{array}{l} u = \varphi(t) \\ dv = e^{-ikt}dt \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} du = \varphi'(t)dt \\ v = -\frac{1}{ki}e^{-it} \end{array} \right.$ donne $c_k(\varphi) = \frac{1}{ki}c_k(\varphi') =$

$=_{\text{après encore p-1 intégrations par parties}} = \frac{1}{(ki)^p}c_k(\varphi^{(p)})$; puis en prenant le module des deux membres

$|c_k(\varphi)| = \frac{1}{2\pi|k|^p}|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(p)}(t)e^{-ikt}dt| \leq \frac{1}{2\pi|k|^p}|\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi^{(p)}(t)|dt \leq \frac{1}{2\pi|k|^p}|\int_{-\pi}^{\pi} |\ |\varphi^{(p)}||_\infty dt = \frac{1}{|k|^p}|\ ||\varphi^{(p)}||_\infty$.

(III-B) **Étude d'une application linéaire**

L est injective et calculer $|||\mathbf{L}|||_\infty$ **et** $|||\mathbf{L}|||_\mathbf{2}$ **:** L est injective car si $Lf = Lg$ cela signifie que $f(\cos t) = g(\cos t)$ pour tout t réel, mais comme $t \mapsto \cos t$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $[-1, 1]$ cela signifie que $f(x) = g(x)\forall x \in [-1, 1]$ donc $f = g$.

■ **Normes associées :** On a par définition $||L(f)||_\infty = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} |f(\cos t)| = ||f||_\infty$ par conséquent, puisque l'égalité est atteinte pour $f = 1$ $\boxed{|||\mathbf{L}|||_\infty = \mathbf{1}}$

De même $||L(f)||_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(\cos t)dt} \leq ||f||_\infty \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt} = ||f||_\infty$ et là encore, comme l'égalité est atteinte pour $f = 1$ $\boxed{|||\mathbf{L}|||_\mathbf{2} = \mathbf{1}}$

(III-C) **Propriétés liées aux coefficients de FOURIER d'une fonction Lf**

(III-C-1) $\mathbf{c_{-k}(Lf) = c_k(Lf)}$ **:**

$2\pi c_k(Lf) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)e^{-ikt}dt =_{\text{changement de variable}} t = -u \ \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos u)e^{iku}du = c_{-k}(Kf)$.

(III-C-2) $|\mathbf{c_k(Lf)}| \leq \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}||\mathbf{f} - \mathbf{Q_{k-1}}||_\infty$ **:** .

■ **Première solution par CAUCHY-SCHWARZ :** D'après la question précédente $c_k(Lf) = \frac{1}{2}(c_k(Lf) + c_{-k}(Lf)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos t)\cos kt dt =$

$=_{\text{car la famille } \cos nt \text{ est orthogonale (on retranche 0)}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\cos t) - Q_{k-1}(\cos t)]\cos kt dt \leq_{\text{en vertu de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ}}$

$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(f(\cos t) - Q_{k-1}(\cos t))^2 dt \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt} \leq \frac{1}{2\pi}||f - Q_{k-1}||_\infty \sqrt{2\pi\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}dt} = ||f - Q_{k-1}||_\infty \sqrt{\frac{1}{2}}$

■ **Seconde solution par PARSEVAL :**

On peut remarquer que si $Q_n \in \mathbb{C}_n[X]$, alors $LQ_n \in \tau_n$. Donc pour $k \geq 2$ on a $c_k(LQ_{k-1}) = 0 = c_{-k}(LQ_{k-1})$, on en déduit par linéarité des coefficients de FOURIER, puis de la formule de PARSEVAL $2|c_k(Lf)|^2 = |c_k(Lf)|^2 +$

$|c_{-k}(Lf)|^2 = |c_k(Lf - LQ_{k-1})|^2 + |c_{-k}(Lf - LQ_{k-1})|^2 \leq N_2(Lf - LQ_{k-1})^2 \leq \|f - Q_{k-1}\|_\infty^2$. On obtient l'inégalité en prenant la racine carrée des deux membres extrêmes.

(III-C-3) $\mathbf{U_n(f) = c_0(Lf) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)T_k}$ **:**

Il suffit de regrouper (je pose $t = \arccos x$) : $c_k(Lf)e^{-ikt} + c_{-k}(Lf)e^{ikt} =_{\text{voir (III.C.1)}} 2c_k(Lf)\cos kt$. Donc $U_n(f) = c_0(f) + 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)T_k$

(III-C-4) $\mathbf{||f - U_n(f)|| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)|}$ **:**

C'est une simple application de (III.A.1) !

On peut remarquer que pour tout $x \in [-1,1]$ il existe $t \in [-\pi,\pi]$ tel que

$$|f(x) - U_n(f)(x)| \leq \left| f(\cos t) - c_0(Lf) - 2\sum_{k=1}^{n} c_k(Lf)\cos(kt)\right| = |Lf(t) - S_n(Lf)(t)| \leq N_\infty\left(Lf - S_n(Lf)\right)$$

D'après la question IIIA1) on a

$$Lf(t) = S_n(Lf)(t) + 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} c_k(Lf)\cos(kt)$$

et aussi la majoration indépendante en t

$$|Lf(t) - S_n(Lf)(t)| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)|$$

et donc

$N_\infty\left(Lf - S_n(Lf)\right) \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)|$. On a donc prouvé pour tout $x \in [-1,1]$

$$|f(x) - U_n(f)(x)| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)| \Longrightarrow \|f - U_n(f)\|_\infty \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} |c_k(Lf)|$$

(III-D) **Développement en série de TCHEBYCHEV d'une fonction f de $\mathcal{F}_\infty$**

(III-D-1) **La suite $(|\mathbf{c_n(Lf)}|)_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est à décroissance rapide :** On constate d'après (III.C.1) que quelle que soit une suite de polynômes de $C_n[X]$, on a $|c_n(Lf)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}||f - Q_{n-1}||_\infty$ (avec bien sûr $Q_{n-1} \in C_{n-1}[X] \subseteq C_n[X]$).

En prenant comme suite de polynômes, celle qui traduit dans la définition que la suite $||f - Q_{n-1}||_\infty$ est à décroissance rapide, on a immédiatement par domination que la suite $C_n(Lf)$ l'est aussi.

(III-D-2) $\mathbf{f(x) = c_0(Lf) + 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n}$ **converge normale :**

C'est une conséquence immédiate de (III.C.4) dont les hypothèses sont vérifées, puisque d'une part $||T_n||_\infty = 1$ d'après (I.B.1) d'autre part $|c_n(Lf)|$ est évidemment convergente, puisqu'elle est à convergence rapide et d'après la domination (III.C.2) qui en fait une série de RIEMANN convergence en prenant $k \geq 2$.

(III-D-3) **f est de classe $\mathbf{C^\infty}$; $\mathbf{f^{(k)}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x)}$:**

Toute série dérivée terme à terme de la série précédente, converge normalement, donc uniformément en utilisant la majoration (II.C.3) pour $T_n^{(k)}(x)$ et $|c_n(Lf)|$ dominée par une série de RIEMANN convergente, comme il vient d'être fait dans la question précédente.

(III-E) **Achèvement de la détermination de l'ensemble $\mathcal{F}_\infty$.**

(III-E-1) $(|\mathbf{c_n(Lf)}|)_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ **est à décroissance rapide :**

$\varphi = Lf$ étant C^∞, c'est une simple conséquence du résultat de la question (III.A.3).

(III-E-2) **Déduire que $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_\infty$:**

Le fait que $|c_n(Lf)|$ soit à décroissance rapide, implique que $|c_{n+1}(Lf)| + |c_{n+2}(Lf)| + ... \leq M_{k+2}\left(\frac{1}{n^{k+2}} + \frac{1}{(n+1)^{k+2}} + ...\right)$, c'est aussi par majoration immédiate du reste d'une série de RIEMANN convergente (à affiner).

Partie IV Étude de l'ensemble $\mathcal{F}_{exp}$

(IV-A) **Caractérisation des éléments de l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$**

(IV-A-1) **Équivalence entre : (a) $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$ (b) La suite $(|\mathbf{c_n(Lf)}|)_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}}$ est à décroissance exponentielle :**

(a) Implique (b) : même type de démonstration qu'en (III.E.1) en remplaçant décroissance rapide par décroissance esponentielle.

(b) implique (a) : même type de démonstration qu'en (III.D.1) en utilisant (III.C.2) avec la suitede polynômes adamtée à la décroissance exponentielle.

(IV-B) **Développement en série de TCHEBYCHEV d'une fonction f de $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$**

(IV-B-1) **Justifier le fait que :** $(\forall \mathbf{x} \in [-\mathbf{1},\mathbf{1}], \mathbf{f(x)} = \mathbf{c_0(Lf)} + \mathbf{2}\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \mathbf{c_n(Lf)T_n}$, **que la série de fonctions converge normalement sur** $[-\mathbf{1},\mathbf{1}]$**, que f est de classe $\mathbf{C}^\infty$ sur** $[-1,1]$ **et que** $(\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N})$, $(\forall \mathbf{x} \in [-\mathbf{1},\mathbf{1}])$, $\mathbf{f^{(k)}(x)} = \mathbf{2}\sum_{\mathbf{n=1}}^{+\infty} \mathbf{c_n(Lf)T_n^{(k)}(x)}$ **:**

Même type de démonstration qu'en (III.D.2) et (III.D.3)

(IV-B-2) **Déduire que** $(\forall \mathbf{k} \in \mathbb{N})$, $||\mathbf{f^{(k)}}||_\infty \leq \frac{\mathbf{2M}}{\mathbf{1-r}} \cdot \frac{\mathbf{k!}}{[\lambda(\mathbf{r})]^{\mathbf{k}}}$**, avec** $\lambda(r) = \frac{(1-r)^2}{4r}$ **:**

En prenant le module des deux membres de la relation précédemment obtenue : $f^{(k)}(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} c_n(Lf)T_n^{(k)}(x)$, on a par inégalité triangulaire, puis en utilisant la majoration de $|c_nLf)|$ hypothèse de cette question, on a $|f^{(k)}(x)| \leq 2\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(Lf)|\ |T_n^{(k)}(x)| \leq 2M\sum_{n=1}^{+\infty} r^n|T_n^{(k)}(x)| \leq_{\text{par majoration (II.C.3) et } ||T_n||=1} 2M4^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \dfrac{(n+k)!}{(2k)!(n-k)!} =$

$=_{\text{“j'ai rien changé !”}}\ 2M4^k r^k k! \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-k}\frac{1}{(2k)!}(n+k)....(n-k+1)$

On si l'on pose $G(r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} r^{n+k} = r^{k+1}\frac{1}{1-r} = S + \frac{1}{1-r}$ où S partie entière est un polynôme de degré $\leq k$ qui disparaît après $k+1$ dérivations, on constate l'effet de dérivation successives sur le terme général r^{n+k} :

$$\begin{cases} (n+k)r^{n+k-1} & \text{après 1 dérivation} \\ (n+k)(n+k-1)r^{n+k-2} & \text{après 2 dérivations} \\ .... & .... \\ (n+k)......(n-k+1)r^{n-k} & \text{après } 2k \text{ dérivations} \end{cases};$$

Or $G^{(2k)} = 0 + \frac{(2k)!}{(1-r)^{2k+1}}$ qui après regroupements donne bien la formule annoncée. Formule qui est d'ailleurs intéréssante par elle-même, car ayant un aspect général.

(IV-C) **Développement en série de TAYLOR au voisinage de tout point $\mathbf{a} \in [-\mathbf{1},\mathbf{1}]$ d'une fonction f de $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$**

La série $\displaystyle\sum_{\mathbf{n}\geq\mathbf{0}} \frac{\mathbf{f^{(n)}(a)}}{\mathbf{n!}}(\mathbf{x-a})^{\mathbf{n}}$ **converge vers f(x) :**

La formule précédente donne dans l'intervalle spécifié, une domination par une série géométrique convergente, et en plus le terme complémentaire (à cause de la majoration par la norme infinie) tend vers zéro quand n tend vers l'infini. Les sommes partielles de TAYLOR convergente vers $f(x)$ (comme dans le cours pour les DSE de exploentielle cosinus trigonométriques ou hyperboliques).

(IV-D) **Inclusion stricte entre $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$ et $\mathcal{F}_\infty$ $\mathbf{f(x)} = \mathbf{exp}(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x^2}})$ et** $f(0) = 0$ **appartient à $\mathcal{F}_\infty$ mais n'appartient pas à $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$:**

Il est classique de vérifier par récurrence sur le prolongement en zéro, que cette fonction est de classe infinie ($exp(-\frac{1}{x^2}$ est négligeable en 0 par rapport à tout polynôme en $\frac{1}{x}$ qui apparaît dans les dérivations soccessives de $f(x)$), par conséquent (III.E.2) s'applique et cette fonction est bien dans $\mathcal{F}_\infty$.

Par contre elle n'est pas dans $\mathcal{F}_{exp}$ car alors sa série de TAYLOR d'après la question précédente, convergerait vers $f(x) > 0$ dans le voisinage de 0 alors que les sommes partielles de cette série sont nulles puisque $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

(IV-E) **Réciproque partielle concernant la détermination de l'ensemble $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$ Montrer que la restriction de f au segment $[-1, 1]$ appartient à $\mathcal{F}_{\mathbf{exp}}$:**

Il suffit (à détailler) d'utiliser la démonstration analogue au lemme d'ABEL qui permet de démontrer que le terme général d'une série est dominée par une série géométrique convergente à l'intérieur de tout disque fermé strictement inclus dans le domaine ouvert de convergence :

Supposons que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]-\rho, \rho[$ avec $1 < \rho$. La série est donc absolument convergente en 1 on peut donc écrire $\forall x \in [-1, 1]$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|$$

Mais la convergence absolue en $\frac{\rho+1}{2}$ assure que la suite $\left(|a_k| \left(\frac{\rho+1}{2}\right)^k \right)_k$ est bornée par M (elle tend vers 0), donc

$$|a_k| \leq M \left(\frac{2}{\rho+1} \right)^k$$

ce qui permet d'écrire $\forall x \in [-1, 1]$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} M \left(\frac{2}{\rho+1} \right)^k = \frac{M}{1 - \frac{2}{\rho+1}} \left(\frac{2}{\rho+1} \right)^{n+1}$$

Ce qui donne en posant $Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $r = \frac{2}{\rho+1} \in]0, 1[$

$$\|f - Q_n\|_\infty \leq M' r^n$$

donc $f \in \mathcal{F}_{exp}$.

FIN DU PROBLÈME

Théorème de Karl (Carl) Gottfried NEUMANN

FAVARD (Jean) Cours d'analyse de l'école Polytechnique tome III fascicule 1 équations différentielles (Gauthiers villars 1962) pages 253, 260.

SZEGÖ (Gabor) Orthogonal polynomials (American Mathematical Society Colloquium publications volume 23 (1939 une excellent année LGV) pages 245 (théorème généralisé) et page 248 où la note en bas de page comport une faute de Frappe : il faut lire K. Neumann et non F. Neumann)

VALIRON (Georges) équations différentielles, applications (Masson 1950) pages 256 et 264.

WHITTAKER ("ET"=Edmund Taylor) et WATSON (GN=George Neville) , a course of Modern Analysis (Cambridge 1958) page 322.

Optimisation de TCHEBYCHEV

"Parmi les polynômes à coefficients réels, unitaires de degré n, c'est le polynôme $\frac{1}{2^{n-1}} T_n$ dont la distance (norme infinie) au polynôme nul est minimale.

Problèmes : Capes 1976, X 1977, Enset 81, oral 90, Air 93, Ensieta 95, ensae M'3 96; O 96 num 62, Alessandri Exbrayat thèmes d'analyse pour l'Agrégation p 168 et surtout 175 ; Ovaert et Verley Algèbre 1 Cédic p 108 ; Oral 2000 num 86 ; Polya 2 p 81 ; Centrale 1 2002 ;

FAVARD (Jean) Cours d'analyse de l'École Polytechnique tome I Introduction Opérations (Gauthiers villars 1960) page 245
