(version mercredi 6 juin 2001 : 22h34)

(Solution PATTE philippe.patte@free.fr et VIDIANI lg_vidiani@ipac.fr)

(Le fait qu'une certaine géométrie calculatoire et en particulier sur les coniques et quadriques, a été enseignée en classes préparatoires pendant 150 ans a laissé des traces : ce problème en est la preuve et ne permet pas de voir si les élèves maîtrisent l'ensemble du programme : ce problème porte sur une partie minime du programme actuel, partie qui représente au maximum 5 pour cent des efforts fournis ; le problème est malgré tout classant).

Question préliminaire A : signature

Signature de q ? L'hypothèse initiale sur q suppose $(r,s,t) \neq (0,0,0)$.

Pour $X \in \mathbb{R}^2$, $q(X) = rx^2 + 2sxy + ty^2$. Nous allons chercher la signature de q en utilisant la méthode de la décomposition de GAUSS qui (quand il y a des termes carrés) consiste à mettre le trinôme sous forme canonique.

Premier cas

Si $r \neq 0$, la mise du trinôme en x^2 sous forme canonique donne $q(X) = r(x + \frac{s}{r}y)^2 + \frac{rt-s^2}{r}y^2$ qui est une décomposition de GAUSS de q.

- si $rt - s^2 > 0$ la signature de q est $(2,0)$ si $r > 0$, $(0,2)$ si $r < 0$ *(r et t sont de même signe $\in \{-1,0,1\}$)*
- si $rt - s^2 < 0$ la signature de q est $(1,1)$
- si $rt - s^2 = 0$ (forme dégénérée) la signature de q vaut $(1,0)$ si $r > 0$, $(0,1)$ si $r < 0$

Deuxième cas

Si $t \neq 0$, la discussion est identique en échangeant les rôles de r et t, ce qui ne change pas $rt - s^2$.

Troisième cas

Si $r = t = 0$, ($s \neq 0$ à cause de l'hypothèse initiale $(r,s,t) \neq (0,0,0)$) $q(X) = \frac{s}{2}(x+y)^2 - \frac{s}{2}(x-y)^2$, donc q est de signature $(1,1)$ et $rt - s^2 < 0$.

Synthèse :

- **si $\mathbf{rt - s^2 < 0}$ signature=(1,1)**
- **si $\mathbf{rt - s^2 > 0}$ alors r et t sont de même signe strict ε et la signature vaut $(\mathbf{1}+\varepsilon, \mathbf{1}-\varepsilon)$**
- **si $\mathbf{rt - s^2 = 0}$ r ou t non nul(s) et de même signe ε et signature=$(\frac{1+\varepsilon}{2}, \frac{1-\varepsilon}{2})$**

Remarque 1 : Ces résultats sont à connaître "par cœur" par tout "bon" candidat.

On fait quelques essais basés sur les Lagrangiens $\frac{\delta^2-\delta}{2}(1,1) + \frac{1+\delta}{2}(1+\varepsilon, 1-\varepsilon)$ et on trouve la belle formule :
(Dans δ défini dans le cadre ci dessous, on fait la convention $\delta = 0$ si $rt = 0$)

$$\boxed{\delta = \mathbf{signe}(rt - s^2),\ \varepsilon = \mathbf{signe(rt)}\ \Big|\ \mathbf{signature(q)} = \left(\mathbf{\frac{1+\delta^2}{2}} + \mathbf{\frac{1+\delta}{2}}\varepsilon, \mathbf{\frac{1+\delta^2}{2}} - \mathbf{\frac{1+\delta}{2}}\varepsilon\right)}$$

Remarque 2 : Cette formule est à savoir "par cœur" par tout "bon" candidat.

Nature du cône isotrope $\mathbf{C_q}$:

- Si $rt - s^2 > 0$ la forme quadratique q est définie positive ou définie négative donc $\boxed{\mathbf{C_q} = \{\mathbf{0}\}}$
- Si $rt - s^2 < 0$, avec $r \neq 0$, $q(X) = 0 \iff x = \frac{s}{r}y = \pm\frac{\sqrt{rt-s^2}}{r}y$ et ainsi C_q est la réunion de deux droites vectorielles réelles distinctes.

Avec $t \neq 0$, on a un résultat analogue.

Avec $r = t = 0$, $q(X) = 0 \iff x = 0$ ou $y = 0$ et C_q est encore formé de deux droites vectorielles réelles distinctes.

- Si $rt - s^2 = 0$ avec par exemple $r \neq 0$, $q(X) = 0 \iff (x + \frac{s}{r}y)^2 = 0 \iff x + \frac{s}{r}y = 0$ et C_q est une droite "double".

On a un résultat analogue pour $t \neq 0$ (échanger le rôle des composantes de X).

$r = t = 0$ est impossible puisque cela donnerait dans ce cas $s = 0$, donc $q = 0$ cas écarté par l'énoncé.

Après quelques essais Lagrangiens on a la synthèse $\boxed{\mathbf{Cardinal(C_q)} = \mathbf{1} - \delta}$

Remarque 3 : Les résultats peuvent être obtenus aussi rapidement avec une réduction en base orthonormale (propre).

PARTIE I : Cônes contenant cinq vecteurs donnés

I.A) CNS $\mathbf{C_q}$ contient le vecteur i : Notant $A = (a_{\alpha,\beta})$ la matrice de q relativement à la base $B_c = (i,j,k)$, comme $q(i) = a_{1,1}$, on a $\boxed{\mathbf{i} \in \mathbf{C_q} \iff \mathbf{a_{1,1}} = \mathbf{0}}$;

Par permutation sur les vecteurs, i, j, k on a $\boxed{\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \in \mathbf{C_q} \iff \text{A est à diagonale nulle}}$

Ce qui équivaut à l'expression de q dans la base canonique B_c ne contient que des termes rectangles soit $\exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$, $q(X) = \alpha zy + \beta zx + \gamma xy$ avec $\alpha = 2a_{2,3}$, $\beta = 2a_{3,1}$, $\gamma = 2a_{1,2}$.

I.B.1) Relier le rang de (l,l') et la dimension de $\mathbf{Q_{e,e'}}$: On note Q l'espace vectoriel des formes quadratiques de $E=\mathbb{R}^3$, contenant i, j et k, et pour $\tau=(\alpha,\beta,\gamma)$, q_τ la forme quadratique définie par $q_\tau(X)=\alpha yz+\beta zx+\gamma xy$, l'application $\tau \overset{\Delta}{\mapsto} q_\tau$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur Q, donc Q est de dimension 3.

$Q_{e,e'} \subseteq Q$: l'appartenance $q_\tau \in Q_{e,e'}$ équivaut à $\ell(\tau)=0$ ET $\ell'(\tau)=0$.

Via Δ, $dimQ_{e'_e} = dim(Ker\ell \cap Ker\ell')$ = dimension de l'espace des solutions du système linéaire homogène $\begin{cases}\ell(\tau)=0\\ \ell'(\tau)=0\end{cases}$ = nombre d'inconnues -rang du système $=3-rang(\ell,\ell')$. $\boxed{\mathbf{dim(Q_{e,e'})=3-rang}(\ell,\ell')}$

I.B.2) Cône isotrope quand cette dimension vaut 1 ? Si $dim(Q_{e,e'})=1$ alors $rang(\ell,\ell')=2$, et la méthode des cofacteurs montre que α,β,γ, sont proportionnels aux cofacteurs $A_0=\begin{vmatrix} ca & ab\\ c'a' & a'b'\end{vmatrix}$, $B_0=-\begin{vmatrix} bc & ab\\ b'c' & a'b'\end{vmatrix}$, $C_0=\begin{vmatrix} bc & ca\\ b'c' & c'a'\end{vmatrix}$, (non tous nuls, puisque le système $\ell(\tau)=0,\ \ell'(\tau)=0$ est de rang 2) de la ligne "virtuelle" rajoutée au système $\tau=\lambda\tau_0=\lambda(A_0,B_0,C-0)$. $Q_{e,e'}$ est la droite vectorielle engendrée par q_0 définie par $q_0(X)=A_0yz+B_0zx+C_0xy$.

Pour $\lambda\neq 0$ le cône isotrope $\boxed{\mathbf{C_{\lambda q_0}=C_{q_0}}}$

I.B.3) Interpréter la condition (2) : La condition (2) signifie que tous les cofacteurs précédemment évoqués dans le système $\ell(x)=0,\ \ell'(x)=0$, sont tous non nuls. Or ils s'interprètent (au signe près) comme les déterminants $det(e,e',i),\ det(e,e',j),\ det(e,e',k)$; Par exemple e,e',i ne sont pas liés :

$\boxed{\textbf{(2) signifie qu'aucun vecteur de la base canonique n'est dans Vect(e,e')}}$

Chercher une base de $\mathbf{Q_{e,e'}}$: Si (2) est vérifiée comme $A_0=cc'(ba'-ab')\neq 0$, $rang(\ell,\ell')=2$ et donc d'après (I.B.1) $dim\ Q_{e,e'}=3-2=1$ et q_{τ_0} en est une base d'après le calcul fait en (I.B.2).

$\boxed{q_{\tau_0}(X)=aa'(cb'-bc')yz-bb'(ca'-c'a)xz+cc'(ba'-ab')xy}$

Rang des formes quadratiques non nulles de $\mathbf{Q_{e,e'}}$:

Pour $\lambda\neq 0$, $rang(\lambda q_{\tau_0})=rang(q_{\tau_0})$.

La matrice de q_{τ_0} dans la base canonique est $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & C_0 & B_0\\ C_0 & 0 & A_0\\ B_0 & A_0 & 0\end{pmatrix}$ dont le détemrinant vaut $\frac{1}{4}A_0B_0C_0\neq 0$ d'après (2) et $abca'b'c'\neq 0$. Donc $\boxed{\textbf{Les éléments non nuls de } \mathbf{Q_{e,e'}} \textbf{ sont de rang 3}}$

---

signature de $\mathbf{q_{\tau_0}}$?

Pour $q\in Q_{e,e'}$, $q(i)=q(j)=q(k)=q(e)=q(e')=0$: il y a des vecteurs isotropes non nuls et réels : la forme q n'est ni définie positive, ni définie négative : si signature ne peut valoir $(3,0)$ ou $(0,3)$.

Avec $q\neq 0$, le rang de q vaut 3, la signature de q ne peut donc valoir que $(2,1)$ ou $(1,2)$.

Remarque : si la signature de q vaut $(2,1)$, celle de $-q$ vaut $(1,2)$.

PARTIE II : Nature d'une section conique

Question préliminaire B : éléments communs aux cônes isotropes :

L'équation du cône isotrope de q_τ étant $\alpha yz+\beta zx+\gamma xy=0$, ceci devant être vérifié pour tout triple $\tau=(\alpha,\beta,\gamma)$ les éléments communs à tous ces cônes isotropes est déterminé par $yz=zx=xy=0$,ie M a au moins deux coordonnées nulles.

Donc $\boxed{\bigcap_{\tau\in\mathbb{R}^3}\mathbf{C}_\tau=\mathbf{Vect(i)}\cup\mathbf{Vect(j)}\cup\mathbf{Vect(k)}}$ c'est à dire l'union des trois axes de coordonnées de la base canonique.

II.A) Étude de $\mathbf{C}_\tau\cap\mathbf{P_0}$:

Existence de (I,J) : C'est le théorème de réduction d'une forme quadratique (puisque de matrice symétrique réelle) d'un espace euclidien appliqué à $q_\tau|P_0$.

Nature de $\mathbf{C}_\tau\cap\mathbf{P_0}$:

Pour $M=XI+YJ\in P_0$, $q_\tau(M)=\alpha'X^2+\beta'Y^2$ et $C_\tau\cap P_0=\{M=XI+YJ|\alpha'X^2+\beta'Y^2=0\}$.

(Les équations dans la discussion ci-dessous sont toutes données dans le plan (I,J))

$$\begin{cases} \bullet \text{ si } \alpha'\beta' > 0 \text{ id est } \alpha' \text{ et } \beta' \text{ de même signe : } & C_\tau \cap P_0 = \{0\} \\ \bullet \text{ si } \alpha'\beta' < 0 & C_\tau \cap P_0 \text{ est la réunion des droites d'équations respectives } Y = \pm\sqrt{-\frac{\alpha'}{\beta'}}X \\ \bullet \text{ si } \alpha' = 0 \text{ et } \beta' \neq 0 \text{ ou si } \alpha' \neq 0 \text{ et } \beta' = 0 & C_\tau \cap P_0 \text{ est une droite double dirigée par I ou J respectivement} \\ \bullet \text{ si } \alpha' = \beta' = 0 & C_\tau \cap P_0 = P_0 \end{cases}$$

Remarque : On aurait pu appliquer la question préliminaire A à q_τ/P_0, sauf dans le dernier cas.

II.B.1.a) Équation de $\mathbf{P_1}$: $P_0 = Vect(I, J)$ a pour équation $Z = 0$. C'est la direction de P_1 qui a donc pour équation $Z = z_0$ avec $z_0 \in \mathbb{R}$.

$|z_0|$ est la distance de 0 à P_1 (la base est orthonormale) donc $|z_0| = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

(On rappelle que la distance d'un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ à un plan P d'équation $ux + vy + cz + h = 0$ est $d(M_0, P) = \frac{|ux_0+vy_0+wz_0+h|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$: apprenez votre cours mon vieux !)

Donc $\boxed{\mathbf{z_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}}}$

II.B.1.b) Forme de la matrice de $\mathbf{q_\tau}$: On rappelle que les coefficients $a(i, j)$ d'une forme quadratique sont égaux à $\widetilde{q}(e_i, e_j)$ où $\widetilde{q}$ est la forme bilinéaire symétrique associée à q.

La matrice de q_τ dans B est donc de la forme $A = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 & * \\ 0 & \beta' & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$ où $*$ désigne un terme inconnu.

Majoration de $\mathbf{rang(q_\tau) = Rang(A)}$:

Si $\alpha' = \beta' = 0$, A ayant ses deux premières colonnes proportionnelles est de rang ≤ 2.

Dans ce cas, la matrice de q_τ dans B_c, (qui a même rang que A) a un déterminant nul. Or cette matrice est (voir (I.B.3) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant $\frac{1}{4}\alpha\beta\gamma$. Donc $\alpha\beta\gamma = 0$.

II.B.1.c) Système définissant $\mathbf{C_\tau \cap P_1}$: On note $A = (a_{r,s})$, pour $M = XI + YJ + ZK$, on a $q(M) = \alpha' X^2 + \beta' Y^2 + a_{3,3}Z^2 + 2a_{2,3}YZ + 2a_{1,3}XZ$.

Mais $M \in C_\tau \cap P_1 \iff \begin{cases} Z = Z_0 \\ \alpha' X^2 + \beta' Y^2 + \underbrace{2a_{2,3}Z_0}_{\delta'} Y + \underbrace{2a_{1,3}Z_0}_{\gamma'} X + \underbrace{a_{3,3}Z_0^2}_{\varepsilon'} = 0 \end{cases}$.

On trouve bien la forme souhaitée.

Nature de $\mathbf{C_\tau \cap P_1}$: $C_\tau \cap P_1$ est une conique

$$\begin{cases} \bullet \text{ du type Ellipse si } \alpha'\beta' > 0 & \text{(ellipse, ou singleton ou vide)} \\ \bullet \text{ du type Hyperbole si } \alpha'\beta' < 0 & \text{(hyperbole ou réunion de 2 droites sécantes)} \\ \bullet \text{ du type Parabole si } \alpha'\beta' = 0 & \text{(parabole ou réunion de deux droites parallèles, voire confondues)} \end{cases}$$

(Remarque : $i, j, k \in C_\tau \cap P_1$. Ils ne sont pas alignés). Avec cette ultime remarque, on peut éliminer dans la classification précédente les cas : singleton, vide et droite double.

II.B.2) Lien entre genre de $\mathbf{C_\tau \cap P_1}$ et nature de $C_\tau \cap P_0$.

La comparaisons des deux discussions (II.B.1.c) et (II.A) suivant les signes de α', β' donne

$$\begin{cases} C_\tau \cap P_1 \text{ est du type Ellipse} \iff C_\tau \cap P_0 = \{0\} \\ C_\tau \cap P_1 \text{ est du type Hyperbole} \iff C_\tau \cap P_0 \text{ est la réunion de deux droites} \\ C_\tau \cap P_1 \text{ est du type Parabole} \iff C_\tau \cap P_0 \text{ est une droite double} \end{cases}$$

PARTIE III : Sections circulaires d'un cône

III.A) Existence de λ :

■ **Première solution :**

On commence par chercher λ tel que la forme quadratique $q = q_\tau - \lambda q_0$ s'annule sur Π_0. D'après la question préliminaire (A) (pour qu'une forme quadratique d'un plan s'annule sur trois droites distinctes, il faut et il suffit qu'elle ne soit pas comme dans la question préliminaire (A), autrement dit qu'elle soit nulle) : Donc q restreinte à Π_0 est nulle si et seulement si elle s'annule sur trois droites distinctes, ie sur trois vecteurs deux à deux indépendants de Π_0, par exemple $X_1 = (a, -b, 0),\ X_2 = (a, 0, -c),\ X_3 = X_1 - X_2 = (0, -b, c)$.

$q(X_1) = 0 \iff \lambda = -\frac{ab\gamma}{a^2+b^2}$; $q(X_2) = 0 \iff \lambda = -\frac{ac\beta}{a^2+c^2}$; $q(X_3) = 0 \iff \lambda = -\frac{bc\alpha}{b^2+c^2}$;

Avec la condition (3) c'est possible ! $\boxed{\lambda = -\frac{\mathbf{ab}\gamma}{\mathbf{a^2+b^2}} = -\frac{\mathbf{ac}\beta}{\mathbf{a^2+c^2}} = -\frac{\mathbf{bc}\alpha}{\mathbf{b^2+c^2}}}$

□ **Avec ce λ :** $B = (X_1, X_2, i)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et (X_1, X_2) est une base de Π_0. On note (X, Y, Z) les coordonnées dans B.

Le plan Π_0 a pour équation $Z = 0$ dans B, et $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ dans B_c. Donc Z et $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$ sont deux formes linéaires proportionnelles sur $\mathbb{R}^3$.

Il existe donc $\mu \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall M \in \mathbb{R}^3,\ Z = \mu(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c})$.

Dans B la matrice de q s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ell' \\ 0 & 0 & m' \\ \ell' & m' & n' \end{pmatrix}$.

Pour $M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, de coordonnées (X, Y, Z) dans B, $q('M) = 2\ell' XZ + 2m'YZ + n'Z^2 = Z\underbrace{2\ell' X + 2m'Y + niZ)}_{\varphi(M)}$,

où φ est une formes linéaire de $\mathbb{R}^3$.

Donc $q(M) = q_\tau(M) - \lambda q_0(M) = (\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0).\mu\varphi(M)$.

Il reste à poser $\ell = \mu\varphi$, qui est bien une forme linéaire de $\mathbb{R}^3$.

■ **Seconde solution :**

Il s'agit du thème "sections planes coniques communes" à deux quadriques ici q_τ et la sphère de centre O.

$q_\tau - \lambda q_0$ doit être le produit de deux formes linéaires, donc de rang 2 d'après un calcul fait au moment de la démonstration de la décomposition de GAUSS $LL' = \frac{1}{4}[(L + L')^2 - (L - L')^2]$; comme la factorisation en le produit de deux formes linéaires doit se faire avec des coefficients réels, il suffit (et cela est aussi nécessaire) que $q_\tau - \lambda q_0$ ait une matrice de rang 2 avec 2 valeurs propres de signes contraire -pour faire apparaître une différence de carrés -(c'est-à-dire que λ soit la valeur propre "intermédiaire" de A.

Or, $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \gamma & \beta \\ \gamma & 0 & \alpha \\ \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ étant la matrice de q_τ, la matrice de $q_\tau - \lambda q_0$ est $A - \lambda I$, le fait qu'elle soit de rang 2 signifie que λ est valeur propre de A.

Mais l'identification $q_\tau(X) - \lambda q_0(X) = (\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c})\ell(x) = (\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c})(ux + vy + wz) = \alpha yz + \beta zx + \gamma xy - \lambda(x^2 + y^2 + z^2)$

donne $\begin{cases} -\lambda = \frac{u}{a} & \text{identification des coefficients en } x^2 \\ -\lambda = \frac{v}{b} & \text{identification des coefficients en } y^2 \\ -\lambda = \frac{w}{c} & \text{identification des coefficients en } x^2 \\ \alpha = \frac{w}{b} + \frac{v}{c} & \text{identification des coefficients en } yz \\ \beta = \frac{u}{c} + \frac{w}{a} & \text{identification des coefficients en } zx \\ \gamma = \frac{v}{a} + \frac{u}{b} & \text{identification des coefficients en } xy \end{cases}$

Or la condition (3) s'écrit $\frac{\alpha}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b}} = \frac{\beta}{\frac{c}{a} + \frac{a}{c}} = \frac{\gamma}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}} = k$ (posé valeur commune) et également $\alpha = \frac{kb}{c} + \frac{kc}{b},\ \beta = \frac{ka}{c} + \frac{kc}{a},\ \gamma = \frac{ka}{b} + \frac{kb}{a}$, montre que le système des trois dernières équations est possible avec $u = ka,\ v = kb,\ w = kc$ et le système des trois premières puisque $\lambda = -\frac{u}{a} = -k$ valeur commune à $\frac{u}{a}$, $\frac{v}{b}$ et $\frac{w}{c}$.

■ **Troisième solution :**

Soit un plan $P = ux + vy + wz = 0$, on fait la division euclidienne du première membre de l'équation d'une quadrique Q d'équation $q(X) = 0$ considéré par exemple si $u \neq 0$ comme polynôme d'une seule variable x, cela donne $q(X) = PP' + \varphi(y, z)$ où $\varphi(y, z)$ constante en x est une forme quadratique en (y, z). Si q s'annule sur trois droites distinctes de P alors $Q \cap P$ intersection de quadrique et plan devrait être du genre conique et contiendrait trois droites distinctes : pour des raisons de degré (ou encore dans l'"esprit du problème, d'après la question préliminaire (A)) φ est identiquement nulle, et Q se factorise bien en deux formes linéaires dont l'une est P.

En prenant ici le plan Π_0 et posant $q = q_\tau - \lambda q_0$, comme les trois vecteurs $X_1 = (a, -b, 0,\ X_2 = (a, 0, -c)$ et $X_3 = X_1 - X_2$ constituent trois vecteurs deux à deux indépendants de π_0 l'écriture $q(X_1) = 0, q(X_2) = 0, q(X_3) = 0$ donne respectivement $\lambda = -\frac{ab\gamma}{a^2+b^2}$, $\lambda = -\frac{ac\beta}{a^2+c^2}$ et $\lambda = -\frac{bc\alpha}{b^2+c^2}$ ce qui est compatible d'après la condition (3).

On poursuit en factorisant q.

$C_\tau \cap P_1$ **est inclus dans une sphère :** D'après la factorisation obtenue $q_\tau \equiv \lambda q_0 + \Pi_1 \ell$ et comme $\lambda \neq 0$ le système $\begin{cases} q_\tau(X) = 0 \\ \Pi_1(X) = 1 \end{cases}$ est équivalent au système $\begin{cases} -\lambda q_0(X) = \ell(X) \\ \Pi_1(X) = 1 \end{cases}$ intersection d'une sphère (car non vide) et d'un plan donc un cercle, éventuellement vide si la distance d du centre $(-\frac{u}{2\lambda}, -\frac{v}{2\lambda}, -\frac{w}{2\lambda})$ de la sphère au plan Π_1 est supérieur au rayon $\sqrt{\frac{u^2}{4\lambda^2}+\frac{v^2}{4\lambda^2}+\frac{w^2}{4\lambda^2}}$.

Or ce n'est pas la peine de vérifier $d \leq R$ car $C_\tau \cap \Pi_1$ contient manifestement les trois points réels A, B, C et constitue le **cercle circonscrit au triangle A,B,C**

III.B) M barycentre de A,B,C : A, B, C tous trois points de Π_1 n'étant pas alignés (sur les trois axes et distincts de l'origine) ils forment un repère affine de Π_1 et tout point M de Π_1 est donc barycentre de A, B, C.

Plus précisément : On constate que M appartenant à Π_1 on a $\begin{cases} \frac{x}{a}=\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \\ M=\frac{x}{a}A+\frac{y}{b}B+\frac{z}{c}C \end{cases}$ donc

$$\boxed{\mathbf{x'=\frac{x}{a}} \quad \mathbf{y'=\frac{y}{b}} \quad \mathbf{z'=\frac{z}{c}}}$$

Équation barycentrique du cercle circonscrit au triangle (A,B,C) :

On note f_τ la forme polaire de q_τ.

On a $q_\tau(A)=q_\tau(B)=q_\tau(C)=0$,puis $q_\tau(M)=q_\tau(x'A+y'B+z'C)=2x'y'f_\tau(A,B)+2x'z'f_\tau(A,C)+2y'z'f_\tau(B,C)$ or $\begin{cases} q_\tau(A-B)=q_\tau(A)-2f_\tau(A,B)+q_\tau(B)=-2f_\tau(A,B) \\ q_\tau(A-C)=-2f_\tau(A,C) \\ q_\tau(B-C)=-2f_\tau(B,C) \end{cases}$

Comme $\forall M=(x,y,z)\in\Pi_0,\ q_\tau(M)-\lambda q_0(M)=0$ (d'après (III.A) et que $A-B, A-C, B-C$ sont dans Π_0 on a $q_\tau(A-B)=\lambda q_0(A-B)=\lambda||A-B||^2=\lambda||\overrightarrow{AB}||^2$ et $q_\tau(A-C)=\lambda||\overrightarrow{AC}||^2$ et $q_\tau(B-C)=\lambda||\overrightarrow{BC}||^2$.

Finalement $\boxed{\mathbf{q_\tau(M)=-\lambda\big(x'y'||\overrightarrow{AB}||^2+y'z'||\overrightarrow{BC}||^2+x'z'||\overrightarrow{AC}||^2\big)}}$

PARTIE IV : Couple foyer-directrice d'une conique

IV.A) Existence de $\mathbf{d_a}$:

D'après le cours "distance d'un point Ω_a à une droite" donnée par un point O et un vecteur directeur V (ici $V=OM$) on a $d_a=\frac{||V\wedge O\Omega_a||}{||V||}$.

Or $OM\wedge O\Omega_a=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(y-z) \\ -a(x-z) \\ a(x-y) \end{pmatrix}$ donc $||OM\wedge O\Omega_a||^2=2a^2(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$.

Compte tenu de ce que $M\in C_0-\{0\}$ on a $\boxed{\mathbf{d_a=|a|\sqrt{2}}}$ et même $d(\Omega_a,(Om))=d_a \iff xy+yz+zx=0 \iff M\in C_0$.

Nature de $\mathbf{C_0}$: La condition d'appartenance à C_0 étant comme il vient d'être remarqué $d(\Omega_a,(Om))=d_a$ θ étant l'angle (à π près) de $O\Omega_a$ et de OM on a $d(\Omega_a,(Om))=d_a \iff \sin\theta=\frac{d_a}{||O\Omega_a||}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ =constante.

Donc C_0 est **le cône de révolution de sommet O d'axe $\mathbf{O\Omega_a}$ et de demi-angle au sommet Arcsin$\sqrt{\frac{2}{3}}$**

IV.B) Lien entre $\mathbf{P_a}$ et $\mathbf{P_1}$: Comme $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$ P_a est l'image de P_1 dans l'homothétie de centre O et de rapport a.

Existence de λ_0 :

On essaie de faire apparaître l'équation d'une sphère en faisant disparaître les termes $xy+yz+zx$. $\Phi_\lambda(M)=x^2+y^2+z^2+(\lambda+2)(y+zx+xy)-2a(x+y+z)+a^2$. Et ainsi $\Phi_\lambda(M)=0$ est l'équation d'une sphère si et seulement si $\boxed{\lambda=\mathbf{-2}=\lambda_0}$.

Comme $\Phi_{\lambda_0}(M)=(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-2a^2$, Σ_a est la sphère **de centre $\mathbf{\Omega_a}$ et de rayon $\mathbf{d_a}$**. C_0 est donc le cône de sommet O circonscrit à la sphère Σ_a : ses génératrices sont les droites passant par O et tangentes à Σ_a.

IV.C.1) Existence de D et de μ : On note D la droite $P_a\cap\Pi$ et θ l'angle des plans π et P_a. Pour $M\in\Pi$ on note H sa projection orthogonale sur P_a et K sa projection orthogonale sur D.

$d(M,P_a)=MH$ et $d(M,D)=MK$ et comme le plan MKH est normal à D, $MH=MK\sin\theta$.

Enfin si $M=(x,y,z)$ $MH=\frac{|x+y+z-a|}{\sqrt{3}}$ donc $\frac{(x+u+z-a)^2}{3}=\sin^2\theta\big(d(M,D)\big)^2$ ce qui est la formule souhaitée avec $\boxed{\mu=\mathbf{3}\sin^{\mathbf{2}}\theta}$.

IV.C.2) Exprimer $\phi_{\lambda_0}(\mathbf{M})$ à l'aide de $||\mathbf{FM}||$:

Pour tout $M\in\mathbb{R}^3$, $\Phi_{\lambda_0}(M)=||\overrightarrow{M\Omega_a}||^2-2a^2$.

Si $M\in\Pi$, comme Π est le plan normal en F à la droite $(F\Omega_a)$. $MF\perp F\Omega_a$, donc $||\overrightarrow{M\Omega_a}||^2=||\overrightarrow{MF}||^2+\underbrace{||\overrightarrow{F\Omega_a}||^2}_{=2a^2}$.

Donc $\boxed{\mathbf{\Phi}_{\lambda_0}(\mathbf{M})=||\overrightarrow{FM}||^{\mathbf{2}}}$

IV.D) Conclusion et dessin : Avec l'hypothèse précédente sur Π : on note q_0 la forme quadratique $q_0(M)=xy+yz+zx$ et donc $C_0=C_{q_0}$.

$\Phi_{\lambda_0}(M)=(x+y+z-a)^2-2q_0(M)$. $M\in\mathbb{C}_0\cap\Pi\iff\begin{cases}M\in\Pi\\ q_0(M)=0\end{cases}\iff\begin{cases}M\in\Pi\\ \Phi_{\lambda_0}(M)=(x+y+z-a)^2\end{cases}\iff$ $\begin{cases}M\in\Pi\\ ||\overrightarrow{MF}||^2=\mu d(M,D)^2\end{cases}\iff\begin{cases}M\in\Pi\\ ||\overrightarrow{MF}||=\sqrt{\mu}\,d(M,D)\end{cases}$

Donc $C_0\cap\Pi$ est la conique du plan Π, de foyer F, de directrice D et $\boxed{\textbf{d'excentricité }\sqrt{\mu}}$.

PARTIE V : Centre d'une conique

V.A) Exprimer $\mathbf{q(X'+X")-q(X'-X")}$ à l'aide de f : Il s'agit de l'identité de POLARISATION (seconde formule de la médiane) revoyez votre cours mon vieux ! $\boxed{\mathbf{q(X'+X")-q(X'-X")=4f(X',X")}}$

déduction : $q(s(X))=q(X)\iff\forall(X',X")\in E'\times E"$, $q(X'+X")=q(X'-X")\iff\forall(X',X")\in E'\times E"\,f(X',X")=0$.

V.B) Équivalence à montrer : Si H est l'hyperplan $V^\perp$, on sait (cours) que $H^\perp=Vect(V)$. et $\forall(X,Y)\in F\times H$, $f(X,Y)=0\iff\forall(X,Y)\in F\times H$, $<u(X)|Y>=0\iff\forall(X',Y)\in u(F)\times H$, $<X'|Y>=0\iff u(F)\subseteq H^\perp=Vect(V)$.

V.C) Existence d'un supplémentaire F de H : Soit $F=u^{-1}(Vect(V))$. $u^{-1}\in GL(E)$, donc F est une droite vectorielle. $u(F)=vect(V)$ donc $\forall(X,Y)\in F\times H$, $f(X,Y)=0$ (d'après (B)). F est d'ailleurs la seule droite ayant cette propriété : Si F_1 en est une, alors $\underbrace{u(F_1)}_{droite}\subseteq Vect(V)$, donc $u(F_1)=Vect(V)$, donc $F_1=u^{-1}(Vect(V))$.

$\boxed{\mathbf{F=Vect(u^{-1}(V))}}$

F est un supplémentaire de $H\iff u^{-1}(V)\notin H\iff<u^{-1}(V)|V>\neq0$.

Finalement H admet un supplémentaire F vérifiant $\forall(X,Y)\in F\times H$, $f(X,Y)=0$ si et seulement si $<u^{-1}(V)|V>\neq0$. F est alors la droite $Vect(u^{-1}(V))$.

V.D) Comatrice de M : On a déja vu (par exemple en (III.A) que $M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&\gamma&\beta\\ \gamma&0&\alpha\\ \beta&\alpha&0\end{pmatrix}$ et que $det(M)=\frac{\alpha\beta\gamma}{4}$. Par conséquent $\boxed{\mathbf{com(M)}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix}-\alpha^2&\alpha\beta&\alpha\gamma\\ \alpha\beta&-\beta^2&\beta\gamma\\ \alpha\gamma&\beta\gamma&-\gamma^2\end{pmatrix}}$.

Caractérisation de la condition $<\mathbf{u^{-1}(V)|V}>\neq\mathbf{0}$: Comme la base canonique est orthogonale et que u est l'endomorphisme **symétrique** associé à q, M est aussi la matrice de u dans la base canonique B_c.

u^{-1} a pour matrice $\frac{1}{det(M)}\,{}^t(comM)=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\begin{pmatrix}-\alpha^2&\alpha\beta&\alpha\gamma\\ \alpha\beta&-\beta^2&\beta\gamma\\ \alpha\gamma&\beta\gamma&-\gamma^2\end{pmatrix}$.

Donc $u^{-1}(V) = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\begin{pmatrix}\alpha(-\alpha+\beta+\gamma)\\ \beta(\alpha-\beta+\gamma)\\ \gamma(\alpha+\beta-\gamma)\end{pmatrix}$ par conséquent $< u^{-1}(V)|V >= \frac{1}{\alpha\beta\gamma}(-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma)$.
La propriété (5) annoncée est donc bien vraie.

V.E) Décomposer un vecteur X : On écrit $X = \lambda u^{-1}(V) + X"$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $X" \in P_0 = V^{\perp}$. $< X|V >= \lambda\underbrace{< u^{-1}(V)|V >}_{\neq 0}$.

Donc $\lambda = \frac{<X|V>}{<u^{-1}(V)|V>}$ et $X" = X - \lambda u^{-1}(V)$. Ainsi $\boxed{\mathbf{X} = \frac{\mathbf{<X|V>}}{\mathbf{<u^{-1}(V)|V>}}.\mathbf{u^{-1}(V)} + \left(\mathbf{X} - \frac{\mathbf{<X|V>}}{\mathbf{<u^{-1}(V)|V>}}.\mathbf{u^{-1}(V)}\right)}$ et $\boxed{\mathbf{s(X)} = \frac{\mathbf{<X|V>}}{\mathbf{<u^{-1}(V)|V>}}.\mathbf{u^{-1}(V)} - \left(\mathbf{X} - \frac{\mathbf{<X|V>}}{\mathbf{<u^{-1}(V)|V>}}.\mathbf{u^{-1}(V)}\right)}$

---

s laisse stable $\mathbf{P_1}$: En remarquant que $< s(X)|V >=< X' - X"|V >=< X'|V >=< X' + X"|V >=< X|V >$ alors comme $x+y+z=1 \iff < X|V >= 1$, on a $X \in P_1 \iff < X|V >= 1 \iff < s(X)|V >= 1 \iff s(X) \in P_1$ c'est à dire que P_1 est stable par s.

$\mathbf{C_q \cap P_1}$ possède un centre de symétrie :
D'après (V.A), $\forall X \in \mathbb{R}^2$, $q(s(X)) = q(X)$ donc $q(X) = 0 \iff q(s(X)) = 0$ c'est à dire $X \in C_q \iff s(X) \in C_q$.
Donc $X \in C_q \cap P_1 \iff s(X) \in C_q \cap P_1$.

Or $s|_{P_1}$ est la symétrie centrale par rapport au point $\boxed{\mathbf{O' = P_1 \cap F} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{<u^{-1}(V)|V>}}.\mathbf{u^{-1}(V)}}$.

Donc $C_q \cap F$ est la symétrie par rapport à O', dont on a les coordonnées en exprimant analytiquement la formule encadrée précédente.

V.F.1) Nature de $\mathbf{C_q \cap P_1}$? Pour $M = (x,y,z) \in P_0$, $z = -x-y$, donc $q(M) = -\alpha y(x+y) - \beta x(x+y) + \gamma xy = rs^2 + 2sxy + ty^2$ avec $r = -\beta$, $t = -\alpha$, $2s = \gamma - \alpha - \beta$.
$(r,s,t) \neq (0,0,0)$, mais $rt - s^2 = 0$.
D'après la question préliminaire (A) il existe une unique droite de $\mathbb{R}^2$: $Vect(a,b)$ annulant $rs^2 + 2sxy + ty^2$.
Pour $M \in P_0$, $q(M) = 0 \iff M \in Vect(a,b,-a-b)$ c'est à dire $C_q \cap P_0$ est une droite.
D'après (II.B.2), $C_q \cap P_1$ est du type PARABOLE. $C_q \cap P_1$ contient les trois points non alignés i,j,k ; ce n'est donc pas une droite.

$\boxed{\text{$\mathbf{C_q \cap P_1}$ est donc une parabole ou la réunion de deux droites parallèles distinctes}}$

(⚠ peut-on plus préciser ?)
$q(u^{-1}(V)) = f(u^{-1}(V), u^{-1}(V)) =< V|u^{-1}(V) >= 0$ par conséquent $u^{-1}(V) \in C_q$; $u^{-1}(V) \perp V$ donc $u^{-1}(V) \in P_0$. Donc $C_q \cap P_0$ est la droite dirigée par $u^{-1}(V)$.
En reprenant l'étude du II, on est dans le cas où $\alpha' = 0$ ou (exclusif) $\beta' = 0$. Pour fixer les idées : $\beta' = 0$ avec $\alpha' \neq 0$.
$u^{-1}(V)$ est alors colinéaire à J : si $C_q \cap P_1$ est une parabole, $u^{-1}(V)$ dirige son axe de symétrie (cas $\delta' \neq 0$) ; sinon $u^{-1}(V)$ dirige les deux droites parallèles constituant $C_q \cap P_1$.
Cette dernière situation entraînerait l'existence parmi $i-j, i-k, j-k$ d'un vecteur colinéaire à $u^{-1}(V)$ (3 points sur deux droites parallèles).
Par exemple $u^{-1}(V)$ et $i-j$ colinéaires $\iff \begin{cases}\alpha+\beta-\gamma = 0\\ \alpha(-\alpha+\beta+\gamma)+\beta(\alpha-\beta+\gamma) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}\gamma = \alpha+\beta\\ 4\alpha\beta = 0\end{cases}$ Ce qui n'est pas possible. (D'après l'hypothèse $\alpha\beta\gamma \neq 0$ donnée dans l'énoncé deux lignes avant la question (V.D)).
De même on montre que $u^{-1}(V)$ n'est pas colinéaire à $i-k$ et $j-k$.
Donc $C_q \cap P_1$ n'est pas la réunion de deux droites parallèles.

$\boxed{\text{C'est une PARABOLE dont l'axe de symétrie est dirigé par } \mathbf{u^{-1}(V)}}$

V.F.2) Matrice de q :
Dans le repère (O,B), P_1 a pour équation $Z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $Mazt_B(q) = Mat_B(u)$ est symétrique et $u(J)$ est colinéaire à V, donc à K.

Donc $Mat_B(q) = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{pmatrix} = (a_{r,s})$.

Comme $u \in GL(E)$ alors $a_{3,2} = a_{2,3} \neq 0$ et $a_{1,1} \neq 0$.
On est alors exactement dans la situation du (II) avec $\delta' = 2a_{2,3}z_0 \neq 0$, $\alpha' = a_{1,1} \neq 0$ et $\beta' = 0$.

On retrouve la parabole d'équation $\underbrace{a_{1,1}}_{\neq \mathbf{0}} \mathbf{X^2} + \dfrac{\mathbf{2a_{1,3}}}{\sqrt{\mathbf{3}}}\mathbf{X} + \dfrac{\mathbf{a_{3,3}}}{\mathbf{3}} + \underbrace{\dfrac{2a_{2,3}}{\sqrt{3}}}_{\neq \mathbf{0}} \mathbf{Y} = \mathbf{0}$ **du plan** $\mathbf{P_1}$: $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$

Que représente J ? On sait d'après (IV) que $J = u^{-1}(V)$, dirige **l'axe de symétrie de cette parabole.**

FIN du corrigé

Centrale 2 MP 2001