CCINP 2025 MP Mathématiques 2

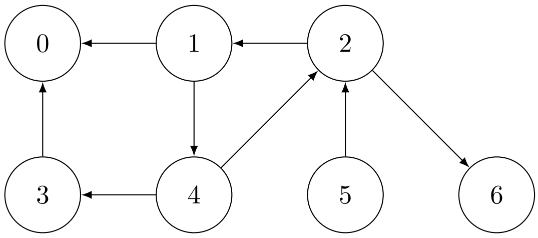
Proposition de corrigé

Exercice 1

Q1. On suppose que les listes des sommets dans le dictionnaire d'adjacence ne comportent pas de sommets répétés plusieurs fois (ce qui est cohérent avec la définition usuelle d'un graphe, où il peut y avoir au plus un arc entre deux sommets).

```python
def degreMax(d: dict) -> int:
    dmax = 0              # degré maximum parmi ceux des sommets examinés
    for sommet in d:      # parcourt l'un après l'autre les sommets du graphe
        ds = len(d[sommet]) # calcule le degré sortant du sommet
        if ds > dmax:     # met à jour le maximum si nécessaire
            dmax = ds
    return dmax
```

Q2. Le graphe inverse de celui de l'énoncé peut être représenté ainsi :




```python
def grapheInv(d: dict) -> dict:
    # initialise un graphe sans arcs, ayant les mêmes sommets
    dInv = {s: [] for s in d}
    for s in d:           # pour chaque sommet s du graphe original G,
        for t in d[s]:    # et pour chaque successeur t de s dans G,
            dInv[t].append(s)   # ajoute s à la liste des successeurs de t
    return dInv
```

Remarque : la complexité de cette fonction est $\mathrm{O}(N+M)$, où N est le nombre de sommets et M le nombre d'arcs du graphe.

Q3. On vérifie que tout arc relie des sommets ayant des couleurs différentes.

```python
def colorationValide(d: dict, L: list) -> bool:
    for s in d:           # s parcourt tous les sommets de le graphe G
        for t in d[s]:    # t parcourt tous les successeurs de s dans G
            if L[s] == L[t]:    # s'il existe un couple de sommets adjacents
                return False    # ayant la même couleur, la coloration est invalide
    return True
```

Q4. On note S l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs (couples ordonnés de sommets reliés) : on a $N = |S|$ et $M = |A|$. Le corps de la fonction consiste d'une boucle parcourant les sommets $s \in S$ (N itérations) ; dans le corps de cette boucle on accède au dictionnaire `d` pour lire la liste des extrémités des arcs sortant de s (complexité $\mathrm{O}(1)$) puis pour chacune de ces extrémités on vérifie si la couleur associée est différente de celle de s (complexité $\mathrm{O}(|A(s)|)$). Si la coloration est invalide, l'instruction `return` interrompt la boucle (on a donc une vérification paresseuse de la validité de la coloration) ; dans le pire des cas (c'est-à-dire, si la coloration est valide), la complexité est dominée par $\sum\limits_{s\in S}\big(1+|A(s)|\big) = |S|+|A|$, à savoir elle est $\boxed{\mathrm{O}(N+M)}$ (le parcours des sommets est toujours réalisé, même si le graphe ne possède aucun arc).

Q5.
```
SELECT MAX(duree) FROM LOCATIONS;
```

Q6.
```
SELECT L.codefilm, nomfilm, AVG(duree) AS duree_moyenne
FROM FILMS F JOIN LOCATIONS L ON F.codefilm = L.codefilm
GROUP BY L.codefilm
HAVING duree_moyenne < 100
ORDER BY duree_moyenne DESC;
```

Exercice 2

Dans cet exercice, on établit quelques propriétés élémentaires classiques des polynômes de Tchebychev P_n.

Q7. On constate que l'égalité $\deg(P_n) = n$ est vraie pour $n \in \{0, 1\}$ (*initialisation*).
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\deg(P_n) = n$ et $\deg(P_{n+1}) = n+1$; on a $\deg(2XPn+1) = 1 + (n+1) = n+2 > \deg(P_n)$ donc $\deg(P_{n+2}) = \max\{\deg(2XP_{n+1}), \deg(P_n)\} = n+2$.
Par récurrence (double), on conclut que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg(P_n) = n}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le coefficient dominant de P_n. Le degré de $2XP_{n+1}$ est strictement plus grand que celui de P_n, donc le coefficient dominant de $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ est égal à celui de $2XP_{n+1}$, autrement dit $c_{n+2} = 2c_{n+1}$. Ainsi la suite $(c_n)_{n \geqslant 1}$ est géométrique de raison 2 et de terme initial $c_1 = 1$, donc pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $c_n = 2^{n-1}c_1 = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Le coefficient dominant de } P_0 \text{ vaut } 1, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ le coefficient dominant de } P_n \text{ vaut } 2^{n-1}.}$$

Q8. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{E}_n$ le prédicat $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.
L'égalité $\mathcal{E}_1$ découle directement de la substitution de l'indéterminée X par $\cos(\theta) = \cos(1\theta)$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $\cos(0\theta) = \cos(0) = 1$, donc $\mathcal{E}_0$ est vraie aussi.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{E}_{n+1}$ sont vraies ; l'évaluation en $\cos(\theta)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$, donc

$$\begin{aligned} P_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)P_{n+1}\big(\cos(\theta)\big) - P_n\big(\cos(\theta)\big) &= 2\cos(\theta)\cos\big((n+1)\theta\big) - \cos(n\theta) \\ &= \cos\big((n+1)\theta + \theta\big) + \cos\big((n+1)\theta - \theta\big) - \cos(n\theta) = \cos\big((n+2)\theta\big) \end{aligned}$$

cela établit $\mathcal{E}_{n+2}$. Par récurrence (double), on conclut que $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \theta \in \mathbb{R} \quad P_n\big(\cos(\theta)\big) = \cos(n\theta)$.

Q9. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$, donc par produit et composition la fonction

$$f_{P,Q} : t \longmapsto \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = P(t)Q(t)(1-t)^{-1/2}(1+t)^{-1/2}$$

est continue sur $]-1, 1[$.
On a $\lim\limits_{t \to 1^-} P(t)Q(t)(1+t)^{-1/2} = \dfrac{P(1)Q(1)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ donc $f_{P,Q}(t) = \underset{t \to 1^-}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$; par comparaison à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$ qui est intégrable en 1^- (critère de Riemann), la fonction $f_{P,Q}$ est intégrable en 1^- aussi. D'une manière analogue, $\lim\limits_{t \to (-1)^+} P(t)Q(t)(1-t)^{-1/2} = \dfrac{P(-1)Q(-1)}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ donc $f_{P,Q}(t) = \underset{t \to (-1)^+}{\mathrm{O}}\left(\dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}\right)$; par comparaison à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{(1+t)^{1/2}}$ qui est intégrable en $(-1)^+$ (critère de Riemann), la fonction $f_{P,Q}$ est intégrable en $(-1)^+$ aussi.
Cela montre que $f_{P,Q}$ est intégrable sur $]-1, 1[$; il en découle que l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$ converge.

Deuxième raisonnement, et expression du produit scalaire comme intégrale sur un segment.
L'application $\varphi : \theta \longmapsto \cos(\theta)$ est de classe C^1, de dérivée $\varphi' : \theta \longmapsto -\sin(\theta)$, et induit une bijection strictement décroissante de $]0, \pi[$, où $\sin > 0$, vers $]-1, 1[$. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$; par changement de variable, les intégrales

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{\pi}^{0} \frac{P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos(\theta)^2}}(-\sin(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$$

sont de même nature et valeur en cas de convergence. Par composition et produit de fonctions continues, $\theta \longmapsto P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc sa restriction à $]-1, 1[$ a un prolongement continu au segment $[-1,1]$: il en suit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta$ est faussement impropre, donc convergente, et on conclut que l'intégrale définissant $\langle P,Q\rangle$ est convergente et

$$\forall (P,Q)\in(\mathbb{R}[X])^2 \quad \langle P,Q\rangle = \int_0^\pi P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

Q10. D'après **Q9.**, $\langle\,,\,\rangle$ est une application bien définie de $\mathbb{R}[X]^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
La multiplication sur $\mathbb{R}$ est distributive sur l'addition et commutative, et l'évaluation est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$; il en suit que pour $P,Q,R\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale sur $]-1,1[$ on a

$$\langle Q,P\rangle = \int_{-1}^1 \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle$$

$$\langle P,Q+\lambda R\rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)+\lambda P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \lambda\int_{-1}^1 \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle + \lambda\,\langle P,R\rangle$$

donc $\langle\,,\,\rangle$ est une forme symétrique et linéaire à droite, donc bilinéaire, sur $\mathbb{R}[X]$.
Soit $P\in\mathbb{R}[X]$: pour tout $t\in\,]-1,1[$ on a $\dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}\geqslant 0$ donc $\langle P,P\rangle\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale. On suppose que $\langle P,P\rangle = 0$: la fonction $t\longmapsto \dfrac{P(t)^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $]-1,1[$, donc elle est identiquement nulle sur cet intervalle ; il en suit que tout élément de l'intervalle $]-1,1[$, qui est un ensemble infini, est une racine du polynôme P, donc P est le polynôme nul.
On conclut que $\langle\,,\,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, donc il induit par restriction un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_k[X]$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Q11. Soient $n,m\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$; on linéarise un produit de fonctions circulaires :

$$\cos(n\theta)\cos(m\theta) = \frac{\cos((n+m)\theta)+\cos((n-m)\theta)}{2}$$

Or si p est un entier relatif non nul on a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\sin(p\theta)}{p}\right]_0^\pi = 0$, tandis que pour $p=0$ on a $\displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi 1\,\mathrm{d}\theta = \pi$; par linéarité de l'intégrale, il en résulte que

$$\boxed{\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases}\pi & \text{si } n=m=0,\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n=m\neq 0,\\ 0 & \text{si } n\neq m.\end{cases}}$$

Q12. Pour $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, on utilise **Q8.**, l'expression (1) du produit scalaire et le résultat de **Q11.** :

$$\langle P_n,P_m\rangle = \int_0^\pi P_n(\cos(\theta))P_m(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases}\pi & \text{si } n=m=0,\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } n=m\neq 0,\\ 0 & \text{si } n\neq m.\end{cases}$$

autrement dit, la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et pour tout $n\in\mathbb{N}$ la norme euclidienne du polynôme P_n est égale à $\sqrt{\pi}$ si $n=0$ et à $\sqrt{\pi/2}$ si $n>2$; il en résulte que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où

$$\boxed{Q_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{et} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^* \quad Q_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}P_n}$$

est orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle\,,\,\rangle$. Pour $k\in\mathbb{N}$, la sous-famille $(Q_0,\ldots,Q_k)$ est une famille de $k+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_k[X]$ d'après **Q7.**, toujours orthonormale donc libre, et $\dim(\mathbb{R}_k[X]) = k+1$: on conclut que

$$\boxed{\text{Pour } k\in\mathbb{N}, \text{ la famille } (Q_0,\ldots,Q_k) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}_k[X] \text{ pour le produit scalaire } \langle\,,\,\rangle.}$$

Problème – Matrices de rang 1

Partie I – Exemples

On note $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires considérées.

Q13. Soit $\omega \in \Omega$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $M(\omega)$ est égale à $X_j(\omega)U(\omega)$, donc le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes de $M(\omega)$ est inclus dans $\mathrm{Vect}(U(\omega))$; ainsi $Y(\omega) = \mathrm{rg}(M(\omega)) \in \{0, 1\}$. Cela montre que Y est une variable aléatoire de Bernoulli.
Si $U(\omega)$ est le vecteur nul, alors $M(\omega)$ est la matrice nulle de $M_n(\mathbb{R})$ et $Y(\omega) = 0$.
Si $U(\omega)$ n'est pas nul, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_i(\omega) \neq 0$, donc le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de $M(\omega)$, à savoir $X_i(\omega)^2$, est non nul : la matrice $M(\omega)$ est non nulle, donc $Y(\omega) > 0$ et nécessairement $Y(\omega) = 1$.
Ainsi l'événement $\{Y = 0\}$ est égal l'événement $\{U = 0_{n,1}\}$, c'est-à-dire l'intersection $\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}$; par indépendance mutuelle de $(X_1, \ldots, X_n)$ on obtient

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = (1 - p)^n \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{P}(Y = 1) = 1 - \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - (1 - p)^n$$

autrement dit, Y suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.

Q14. Pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a $X_i(\omega) \in \{0, 1\}$ car X_i est une variable aléatoire de Bernoulli, donc $X_i(\omega)^2 = X_i(\omega)$; par conséquent

$$\mathrm{Tr}(M(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$

donc $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i$. En tant que somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p,

$$\boxed{\mathrm{Tr}(M) \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n, p).}$$

Q15. On fixe $\omega \in \Omega$: on a

$$M(\omega)^2 = \left(U(\omega) \times U(\omega)^\top\right)^2 = U(\omega) \times \left(U(\omega)^\top \times U(\omega)\right) \times U(\omega)^\top$$

Or $U(\omega)^\top \times U(\omega) \in M_1(\mathbb{R})$ est assimilée au réel $\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)^2 = \mathrm{Tr}\left(M(\omega)\right)$; il en suit que

$$M(\omega)^2 = \mathrm{Tr}\left(M(\omega)\right)\left(U(\omega) \times U(\omega)^\top\right) = \mathrm{Tr}\left(M(\omega)\right) M(\omega).$$

Cela établit que les variables aléatoires M^2 et $\mathrm{Tr}(M)M$ sont égales.
$M(\omega)$ est une matrice de projection si et seulement si

$$M(\omega)^2 = M(\omega) \iff \mathrm{Tr}\left(M(\omega)\right) M(\omega) = M(\omega) \iff M(\omega) = 0_n \ \text{ ou } \ \mathrm{Tr}\left(M(\omega)\right) = 1$$

donc l'événement $\left\{M^2 = M\right\}$ est la réunion des événements $\{M = 0_n\}$ et $\{\mathrm{Tr}(M) = 1\}$, qui sont incompatibles. D'après **Q14.** la loi de $\mathrm{Tr}(M)$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$; l'événement $\{M = 0_n\}$ est égal à $\{\mathrm{rg}(M) = 0\}$ et la loi de $Y = \mathrm{rg}(M)$ a été déterminée en **Q13.** ; par additivité finie de $\mathbb{P}$, on obtient

$$\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(M = 0_n) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) + \binom{n}{1} p^1 (1 - p)^{n-1} = (1 - p)^n + np(1 - p)^{n-1}$$

$$\boxed{\text{La probabilité de l'événement «}M \text{ est une matrice de projection» est égale à } (1-p)^n + np(1-p)^{n-1}.}$$

Q16. Les calculs d'événements faits en **Q13.** et en **Q15.** restent valables, on doit toutefois recalculer leurs probabilités en tenant compte des nouvelles hypothèses sur $(X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi l'événement considéré $\left\{M^2 = M\right\}$ est toujours égal la réunion des événements incompatibles $\{M = 0_n\}$ et $\{\mathrm{Tr}(M) = 1\}$, donc $\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathbb{P}(M = 0_n) + \mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1)$. On a

$$\{M = 0_n\} = \{Y = 0\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\} \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{P}(M = 0_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = 0) = \left(\mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!}\right)^n = \mathrm{e}^{-n\lambda}$$

car $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. En utilisant la distribution conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ pour exprimer la distribution de probabilité de $\mathrm{Tr}(M)$ on obtient

$$\mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1) = \mathbb{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1\Big) = \sum_{\substack{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{N}^n \\ x_1^2+\dots+x_n^2=1}} \mathbb{P}\big((X_1, \dots, X_n) = (x_1, \dots, x_n)\big)$$

Pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ d'entiers naturels, l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ est satisfaite si et seulement s'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $x_k = 1$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!] \setminus \{k\}$ on a $x_i = 0$; en utilisant l'indépendance de $X_1, \dots, X_n$ et leur loi commune $\mathcal{P}(\lambda)$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{Tr}(M) = 1) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\Big(\{X_k = 1\} \cap \bigcap_{i\neq k} \{X_i = 0\}\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k = 1) \prod_{i\neq k} \mathbb{P}(X_i = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda}(\mathrm{e}^{-\lambda})^{n-1} = n\lambda\mathrm{e}^{-n\lambda}\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\mathbb{P}(M^2 = M) = \mathrm{e}^{-n\lambda} + n\lambda\mathrm{e}^{-n\lambda}}$

Q17. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Les colonnes de J sont toutes égales à la matrice colonne non nulle $u = \sum\limits_{k=1}^{n} e_k$, donc le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qu'elles engendrent est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(u)$; ainsi $\boxed{\mathrm{rg}(J) = 1}$ et par ailleurs $\boxed{\mathrm{Tr}(J) = n}$

On a $J^2 = nJ$ donc J admet comme polynôme annulateur $X^2 - nX = X(X - n)$; ce polynôme est scindé à racines simples donc J est diagonalisable (on arrive à la même conclusion en observant que J est une matrice symétrique réelle) et les valeurs propres de J sont 0 et n, de sous-espaces propres associés

$$\mathrm{Sep}_n(J) = \mathrm{Vect}(u) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sep}_0(J) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_2, \dots, e_1 - e_n)$$

On en déduit la diagonalisation

$J = P\,\mathrm{Diag}(n, 0_{n-1})P^{-1}$ où P est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les éléments de la première ligne et de la première colonne sont égaux à 1, les autres éléments diagonaux sont égaux à -1, et tous les autres éléments sont nuls.

Q18. On considère par exemple la matrice carrée d'ordre 3 $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

N possède une seule colonne non nulle, donc $\mathrm{rg}(N) = 1$.
N est triangulaire et tous ses coefficients diagonaux sont nuls, donc $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$; si N était diagonalisable alors il existerait une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $N = P0_3P^{-1}$ donc $N = 0_3$, mais ce n'est pas le cas : on conclut que N n'est pas diagonalisable.

Dans cet exemple, on a $\boxed{\mathrm{Tr}(N) = 0}$ *En fait, il sera établi à la question* ***Q22.*** *que la condition* $\mathrm{Tr}(N) = 0$ *est nécessaire pour que* N *ne soit pas diagonalisable.*

Partie II – Résultats généraux

Q19. L'image de la matrice A est le sous-espace vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les colonnes $C_1, \dots, C_n$ de A, et le rang de A est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$; comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, $\mathrm{Im}(A) \neq \{0_{n,1}\}$ donc au moins une des colonnes de A est non nulle : cela justifie l'existence d'un (plus petit) $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $C = C_k \neq 0_{n,1}$.
De plus, $\mathrm{Vect}(C) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(C)) = 1 = \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$, donc $\mathrm{Vect}(C) = \mathrm{Im}(A)$; il en suit que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on a $C_j \in \mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C)$ donc il existe un réel x_j tel que $C_j = x_jC$; en particulier $C = C_k = x_kC$ avec $C \neq 0_{n,1}$ donc $x_k = 1$. En notant $L = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, L est une matrice ligne non nulle telle que $A = C \times L$ comme voulu.

Q20. En assimilant la matrice $L \times C \in M_1(\mathbb{R})$ à son unique élément et en utilisant les propriétés de la trace on obtient

$$L \times C = \mathrm{Tr}(L \times C) = \mathrm{Tr}(C \times L) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{L \times C = \mathrm{Tr}(A)}$$

(*en explicitant les coefficients de L et C, $L = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^\top$, pour $i \in [\![1, n]\!]$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de $A = C \times L$ est égal à $y_i x_i$, donc* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = L \times C$).

Par associativité de la multiplication matricielle,

$$A^2 = (C \times L)^2 = C \times (L \times C) \times L = \mathrm{Tr}(A)\,(C \times L) = \mathrm{Tr}(A) A \quad \text{comme voulu.}$$

Q21. D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1 > 0$; il en suit que 0 est une valeur propre de A d'ordre de multiplicité supérieur ou égal à $n-1$, donc X^{n-1} divise le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A. D'après les propriétés générales du polynôme caractéristique, on sait χ_A est un polynôme unitaire de degré n et que le coefficient de son terme de degré $n - 1$ est égal à $-\mathrm{Tr}(A)$; ainsi

$\boxed{\chi_A(X) = (X - \mathrm{Tr}(A))X^{n-1}}$

D'après **Q20.**, $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X$ est un polynôme annulateur de A, donc le polynôme minimal π_A de A est un diviseur unitaire de ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$; comme $0 < \mathrm{rg}(A) = 1 < n$, A n'est pas un multiple scalaire de la matrice identité I_n, donc π_A est de degré strictement supérieur à 1. On déduit que

$\boxed{\pi_A(X) = (X - \mathrm{Tr}(A))X}$

Q22. La matrice A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$; d'après **Q21.**, π_A est scindé, et il est à racines simples si et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Q23. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$; l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être vide, donc $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u)$ contient au moins un vecteur non nul, on note ϵ_2 un tel vecteur et on fixe un vecteur $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\epsilon_2 = u(\epsilon_1)$. Le sous-espace vectoriel engendré par ϵ_2 est inclus dans le sous-espace vectoriel $\mathrm{Im}(u)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(\epsilon_2)) = 1$, d'autre part $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(A) = 1$ aussi, donc $\mathrm{Vect}(\epsilon_2) = \mathrm{Im}(u)$; $\mathrm{Vect}(\epsilon_2)$ est également inclus dans $\mathrm{Ker}(u)$, et on en déduit que $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$.

D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = n - \mathrm{rg}(u) = n - 1$; ϵ_2 est un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(u)$, donc d'après le théorème de la base incomplète il existe des vecteurs $\epsilon_3, \ldots, \epsilon_n$ tels que $(\epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$. On considère la famille $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$, et une famille $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i = 0_{\mathbb{R}^n}$. En appliquant l'endomorphisme u on obtient

$$0_{\mathbb{R}^n} = u\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon_i\Big) = a_1 u(\epsilon_1) + \sum_{i=2}^{n} a_i \underbrace{u(\epsilon_i)}_{=0_{\mathbb{R}^n}} = a_1 \epsilon_2$$

et comme ϵ_2 n'est pas le vecteur nul on déduit que $a_1 = 0$; la sous-famille $(\epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(u)$ donc elle est libre, par conséquent $a_2 = \cdots = a_n = 0$. Cela établit que $\mathcal{B}$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, de cardinal égal à $n = \dim(\mathbb{R}^n)$: ainsi $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Comme $u(\epsilon_1) = \epsilon_2$ et $u(\epsilon_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est celle de l'énoncé.

Q24. On suppose que $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, autrement dit $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ en somme directe. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u)$. Soit $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à cette décomposition en somme directe : on a $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{rg}(A) = 1$ donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(\epsilon_1)$; en particulier $u(\epsilon_1) \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $u(\epsilon_1) = a\epsilon_1$. Les autres vecteurs $\epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ appartiennent tous à $\mathrm{Ker}(u)$, donc $u(\epsilon_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$. Il en résulte que la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est celle de l'énoncé ; cette matrice doit être de rang égal à $\mathrm{rg}(u) = 1$, donc $a \neq 0$.

Q25. D'une part, en général deux matrices semblables ont la même trace.

Soit A une matrice de rang 1 ; puisque les matrices d'un même endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ par rapport à deux bases de $\mathbb{R}^n$ sont semblables, d'après **Q23.** et **Q24.**, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la matrice A appartient à la classe de similitude de la matrice M_a, où

$$M_0 = \mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0_{n-2}\right) \qquad \text{et} \qquad \forall a \in \mathbb{R}^* \quad M_a = \mathrm{Diag}(a, 0_{n-1}).$$

Or on constate que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $a = \mathrm{Tr}(M_a)$; il en suit que toute matrice A de rang 1 est semblable à la matrice $M_{\mathrm{Tr}(A)}$. Par transitivité et symétrie de la relation de similitude, deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de rang 1 ayant la même trace sont semblables.