

CONCOURS COMMUN INP 2023 CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES 1- MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE I

Q1. On utilisant la formule du produit matriciel, la fonction **produit** (A,B) qui renvoie AB peut être définie comme suit :

```
1 def produit(A, B):
2     if len(A) != len(B[0]) or len(A[0]) != len(B):
3         print("Les dimensions des matrices sont incompatibles.")
4         return None
5     n = len(A)
6     C = [[0]*n for i in range(n)]
7     for i in range(n):
8         for j in range(n):
9             for k in range(n):
10                C[i][j] += A[i][k] * B[k][j]
11     return C
```

Q2. Un graphe est non orienté si, et seulement si, sa matrice d'adjacence est symétrique. La fonction **orienté**(A) qui retourne True si le graphe est orienté et False sinon peut être définie comme suit :

```
1 def orienté(A):
2     n = len(A)
3     for i in range(n):
4         for j in range(n):
5             if A[i][j] != A[j][i]:
6                 return True
7     return False
```

Q3. En utilisant le résultat admis, la fonction **distance**(A,i,j) qui renvoie le nombre minimal d'arêtes que l'on doit parcourir pour atteindre le sommet j depuis le sommet i peut être définie comme suit :

```
1 def distance(A, i, j):
2     p = 1
3     B = A
4     while B[i][j] == 0:
5         B = produit(A, B)
6         p = p + 1
7     return p
```

Q4. La requête SQL pour extraire les identifiants de tous les clients provenant de la ville de "Toulouse" est :

```
1 SELECT id FROM CLIENTS WHERE ville = 'Toulouse';
```

Q6. La requête SQL pour extraire les emails de tous les clients ayant "SCEI" comme partenaire est :

```
1 SELECT email FROM CLIENTS
2 WHERE id IN (SELECT id_client FROM PARTENAIRES WHERE partenaire = 'SCEI');
```

EXERCICE II

On définit la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$ sur \mathbb{R}^2 .

Q6. Soit $\varphi : x \mapsto x - e^{-x}$, on a $\varphi'(x) = 1 + e^{-x}$, donc φ est strictement croissante et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaire (généralisé) donne φ admet une unique solution, α sur \mathbb{R} .

De plus on a $\varphi(0) = -1$ donc α est strictement positive.

Q7. (x, y) est point critique de f si et seulement si il annule les dérivées partielles de f , il est donc solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = 2y \\ x - e^{-x} = 0 \end{cases}$$

Donc f possède un unique point critique $(\alpha, \frac{\alpha}{2})$, (α l'unique solution de l'équation $x = e^{-x}$).

Q8. La matrice hessienne de f et (x, y) est donnée par

$$H_f(x, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) \right)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}} = \begin{pmatrix} 2 + e^{-x} & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

donc

$$H_f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 + \alpha & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice symétrique réelle donc elle est diagonalisable, elle admet deux valeurs propres réelles λ et μ vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda\mu = \det H_f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) = 4(\alpha + 1) \\ \lambda + \mu = \text{Tr } H_f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha + 6 \end{cases}$$

α est strictement positive donc $\lambda\mu > 0$ et $\lambda + \mu > 0$, par conséquent $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ainsi est définie positive et $(\alpha, \frac{\alpha}{2})$ est un minimum local.

PROBLÈME

Dans tout le problème, α est un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. On pose :

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx$$

Partie I - Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

Q9. Par comparaison aux intégrales de Riemann, on a

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \text{ et } 1-\alpha \in]0, 1[\text{ donc } x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \text{ est intégrable sur }]0, 1[. \\ \triangleright \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{2-\alpha}} \text{ et } 2-\alpha \in]1, 2[\text{ donc } x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[. \end{aligned}$$

Donc $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q10. Par le changement de variables $t = \frac{1}{x}$, dans $J(\alpha)$, on obtient :

$$J(\alpha) = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha+1}}{1+\frac{1}{t}} \frac{dt}{t^2} = \int_0^1 \frac{t^{-\alpha}}{1+t} dt = I(1-\alpha)$$

Q11. 1^{re} tentative :

\triangleright Soit $x \in]0, 1[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ donc :

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{\alpha+n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

\triangleright On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = (-1)^n$, et la série $\sum (-1)^n$ diverge, le théorème d'interversion de limite

et \sum assure que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $]0, 1[$.

Q12. 2^e tentative :

\triangleright On a

- (S_n) converge simplement, sur $]0, 1[$, vers $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ qui est intégrable sur $]0, 1[$.

- Les fonctions f_n sont intégrables sur $]0, 1[$.

- Pour tout $x \in]0, 1[$, on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1} = \frac{x^{\alpha-1}(1 - (-x)^{n+1})}{1+x}$$

donc

$$|S_n(x)| \leq \frac{x^{\alpha-1}(1+x^{n+1})}{1+x} \leq 2 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$$

la fonction $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1[$.

Le théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = I(\alpha)$$

Qui s'écrit

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

▷ On a

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 (-1)^n x^{n+\alpha-1} dx = \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

donc

$$I(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$$

Q13. D'après la question Q10 on a

$$J(\alpha) = I(1-\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha}$$

donc :

$$\begin{aligned} I(\alpha) + J(\alpha) &= \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

Q14. On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

Pour $x = 0$ on a

$$1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma .

Dans toute la suite, on pose :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt$$

Q15. Par comparaison aux intégrales de Riemann , on a

▷ $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$ et $1 - \alpha \in] - \infty, 1[$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

▷ $t^{x-1}e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Donc $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x \in]0, +\infty[$, par suite Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.

Q16. Par comparaison on a

$$\left| \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} \right| \leq \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$$

▷ La fonction $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ (d'après Q9) donc $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout x dans $[0, +\infty[$. Ainsi f_α est bien définie sur $[0, +\infty[$.

▷ La fonction $(x, t) \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ est continue sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et elle est dominée par une fonction intégrable $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ sur $]0, +\infty[$, donc f_α est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

Q17. La fonction $g : (x, t) \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ (*théorème des opérations élémentaires*) et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = -\frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt}$$

Pour tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ ($a < b$) on a

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-at} = \varphi(t)$$

puisque $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} 0$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ alors φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, donc f_α est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, pour tout $[a, b] \subset]0, +\infty[$, par suite elle est \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'_\alpha(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt} dt$$

Q18. Soit (u_n) une suite $]0, +\infty[$ qui tend vers $+\infty$, on a alors :

▷ La suite de fonctions $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-u_n t}$ converge simplement vers 0 sur $]0, +\infty[$.

▷ La fonction $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-u_n t}$ dominée la fonction $t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{t+1}$ qui est intégrable $]0, +\infty[$ Le théorème de convergence dominée donne $\lim_{n \rightarrow \infty} f_\alpha(u_n) = 0$.

D'après la caractérisation séquentielle de la limite on a $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = 0$.

Q19. Par comparaison aux intégrales de Riemann , on a

▷ $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ et $\alpha \in]0, 1[$ donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$.

▷ $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$ donc $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Ainsi $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ converge, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ et

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = 0$$

Partie III - Vers la formule des compléments .

Q20. Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{t+1} e^{-xt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-xt} dt \\ &= \int_{u=tx}^{+\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha-1} e^{-u} \frac{du}{x} \\ &= \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

Q21. Soit $x \in]0, +\infty[$, on a : $g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$

$$g'_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \left(e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt + e^x \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \right)' \right)$$

écrivons $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt - \int_1^x \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$ donc $\left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \right)' = -\frac{e^{-x}}{x^\alpha}$, par suite

$$\begin{aligned} g'_\alpha(x) &= \Gamma(\alpha) \left(e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt - \frac{1}{x^\alpha} \right) \\ &= g_\alpha(x) - \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} \end{aligned}$$

g_α est donc une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha} (E)$.

D'après la question Q20 f_α est solution de (E) sur $]0, +\infty[$, donc

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = g_\alpha(x) - g'_\alpha(x)$$

par suite

$$(f_\alpha(x) - g_\alpha(x))' = f_\alpha(x) - g_\alpha(x)$$

et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0, +\infty[, f_\alpha(x) - g_\alpha(x) = \lambda e^x$$

On a de plus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = 0.$$

ce qui donne $\lambda = 0$ et $\forall x \in]0, +\infty[, f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

Q22. f_α et g_α sont prolongeables par continuité en 0, donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g_\alpha(x)$, ainsi on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt$$

Q23. D'après Q14 on a $\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$, de plus

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt = \int_0^{+\infty} t^{(1-\alpha)-1} e^{-t} dt = \Gamma(1-\alpha)$$

D'après Q22 on a :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \quad (\text{formule des compléments})$$

Q24. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, on obtient par le changement de variable $u = t^2$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

la formule des compléments pour $\alpha = \frac{1}{2}$ donne $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ainsi

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Fin.