CCP INP
Filière MP - Maths 2
2019

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.

Exercice I

Dans cet exercice "Algorithme de décomposition primaire d'un entier" (*Informatique pour tous*), on se propose d'écrire un algorithme pour décomposer un entier en produit de nombres premiers. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

On définit la valuation p-adique [de n] pour p nombre premier et n entier naturel non nul.
Si p divise n, on note $\nu_p(n)$ le plus grand entier k tel que p^k divise n.
Si p ne divise pas n, on pose $\nu_p(n) = 0$.
L'entier $\nu_p(n)$ s'appelle la valuation p-adique de n.

Q1 Écrire une fonction booléenne `estPremier(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et qui renvoie le booléen `True` si n est premier et le booléen `False` sinon. On pourra utiliser le critère suivant : un entier $n \geqslant 2$ qui n'est divisible par aucun entier $d \geq 2$ tel que $d^2 \leqslant n$, est premier.

Q2

En déduire une fonction `liste_premiers(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul n et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à n.

Q3 Pour calculer la valuation 2-adique de 40, on peut utiliser la méthode suivante :

— 40 est divisible par 2 et le quotient vaut 20.
— 20 est divisible par 2 et le quotient vaut 10.
— 10 est divisible par 2 et le quotient vaut 5.
— 5 n'est pas divisible par 2.

La valuation 2-adique de 40 vaut donc 3.

Écrire une fonction `valuation_p_adique(n,p)` **non récursive** qui implémente cet algorithme. Elle prend en arguments un entier naturel n non nul et un nombre premier p et renvoie la valuation p-adique de n. Par exemple, puisque $40 = 2^3 \times 5$, `valuation_p_adique(40,2)` renvoie 3, `valuation_p_adique(40,5)` renvoie 1 et `valuation_p_adique(40, 7)` renvoie 0.

Q4 Écrire une deuxième fonction cette fois-ci **récursive** `val_p_adique(n,p)` qui renvoie la valuation p-adique de n.

Q5 En déduire une fonction `decomposition_facteurs_premiers(n)` qui calcule la décomposition en facteurs premiers d'un entier $n \geqslant 2$.
Cette fonction doit renvoyer la liste des couples $(p, \nu_p(n))$ pour tous les nombres premiers p qui divisent n.
Par exemple, `decomposition_facteurs_premiers(40)` renvoie la liste `[[2, 3], [5, 1]]`.

Exercice II

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\ |\ \rangle$. On note $\|x\|^2 = \langle x \,|\, x \rangle$.

Q6 Un endomorphisme u de E vérifiant, pour tout vecteur x de E, $\langle u(x) \,|\, x \rangle = 0$, est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?

Q7 Étant donné un endomorphisme u de E, on admet qu'il existe un unique endomorphisme v de E vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \,|\, y \rangle = \langle x \,|\, v(y) \rangle$.

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

i. $u \circ v = v \circ u$.
ii. $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x) \,|\, u(y) \rangle = \langle v(x) \,|\, v(y) \rangle$.
iii. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|v(x)\|$.

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications :
$i \Rightarrow ii, ii \Rightarrow iii, iii \Rightarrow ii$ et $ii \Rightarrow i$.

Problème

On s'intéresse dans ce problème, à tracers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Partie I – Étude de quelques exemples

Q8 Justifier que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

Q9 On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.
Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est doagonalisable).
Ont-elles le même polynôme minimal ?

Q10

On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :
première méthode : en utilisant u l'endomorphisme associé à A dans une base (e_1, e_2, e_3) d'un espace vectoriel E et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de E.
deuxième méthode : en prouvant que le polynôme $X3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées α, β et γ.

Q11 Démontrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & . & . & \vdots & a_2 \\ \vdots & . & . & . & \vdots \\ \vdots & . & . & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

Q12 *Application* : soit E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$ et u un endomorphisme de Ede rang 1 vérifiant $u \circ u \neq 0$, démontrer que u est diagonalisable.

Q13 Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

Q14 On donne une matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ où α, β sont deux nombres complexes non nuls, différents et non opposés.
Déterminer le rang de la matrice A et en déduire que 0 est valeur propre de A.
Justifier que $2(\alpha + \beta)$ et $2(\alpha - \beta)$ sont aussi valeurs propres de A.
Préciser une base de vecteurs propres de A.
Dans cette question, il est [vivement] déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de A.

Q15 Démontrer que quels que soient les réels non nuls a, b et le réel λ, les matrices $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ sont semblables.

Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice P inversible à coefficients complexes telle que $B = P^{-1}AP$. Écrivons $P = R + iS$ où R et S sont deux matrices à coefficients réels.

Q16 Montrer que $RB = AR$ et $SB = AS$.

Q17 Justifier que la fonction $x \mapsto \mathrm{Det}(R + xS)$ est une fonction polynômiale non identiquement nulle [sur $\mathbb{C}$] et en déduire qu'il existe un réel x tel que la matrice $Q = R + xS$ soit inversible.

Q18 Conclure que les matrices A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q19 *Application* : démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique $X^3 + X$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie III

On s'intéresse dans cette question [partie] à la proposition P_n :
« Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayany à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ».

Q20 En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le polynôme minimal, démontrer que la proposition P_n est vraie pour $n = 2$.

On admet qu'elle est vraie également pour $n = 3$.

Q21 Démontrer que la proposition P_n est fausse pour $n = 4$. On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.