CCP MP 2016 maths2

Exercice I (informatique)

I.1 Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On teste chaque entier k de 1 à $\min(a, b)$ pour savoir s'il divise a et b et on met à jour une variable d qui est le dernier diviseur commun k trouvé.

```
def gcd(a,b):
    m = min(a,b)
    d = 1
    for k in range(1,m+1):
        if (a % k == 0) and (b % k == 0):
            d = k
    return d
```

I.2 Soit r le reste dans la division euclidienne de a par b, où $b \neq 0$. On a $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$, ce qui permet d'écrire un programme récursif de calcul de pgcd. On prévoit un test d'arrêt : si $b = 0$ et $a \neq 0$ alors $\text{pgcd}(a, b) = a$.

```
def euclide_rec(a,b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euclide_rec(b,a%b)
```

I.3 (a) $u = 8$ et $v = 5$. On a $8 = 1 \times 5 + 3$ donc $r = 3$. Ensuite, $u = 5$ et $v = 3$. Puis $5 = 1 \times 3 + 2$ donc $r = 2$. Puis $u = 3$ et $v = 2$. On a $3 = 1 \times 2 + 1$ donc $r = 1$. Puis $u = 2$ et $v = 1$. On a $2 = 1 \times 1 + 1$, donc $r = 1$. Puis $u = 1$ et $v = 1$. Enfin, $1 = 1 \times 1 + 0$ donc $r = 0$ et le programme s'arrête en renvoyant $u = 1$.

(b) La relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ avec $0 \leqslant F_n < F_{n+1}$ montre par unicité du couple quotient,reste dans une division euclidienne que le reste dans la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1} est F_n.

Dans `euclide`, la première division euclidienne effectuée sera celle de F_{n+2} par F_{n+1}, puis celle de F_{n+1} par F_n, etc. La dernière effectuée sera celle de F_2 par F_1 qui donne 0. Il y aura donc $n + 1$ divisions euclidiennes.

(c) Le minimum m de F_{n+2} et F_{n+1} est $F_{n+1} \sim \frac{\phi^{n+1}}{\sqrt{5}}$. À chaque passage dans la boucle `for`, on effectue 2 divisions euclidiennes. On a donc $v_n = 2m \sim \frac{2}{\sqrt{5}}\phi^{n+1}$, donc u_n (linéaire en n) est négligeable devant v_n (exponentiel en n).

I.4 On utilise deux variables u et v qui représentent respectivement F_n et F_{n+1}, et que l'on met à jour grâce à la relation de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

```
def fibo(n):
    if n == 0:
        return 0
    elif n == 1:
        return 1
    else:
        u,v = 0,1
        for k in range(n):
            u,v = v,u+v
        return u
```

I.5 On utilise l'associativité du pgcd. On a $\mathrm{pgcd}(a, b, c) = \mathrm{pgcd}(\mathrm{pgcd}(a, b), c)$.

```
def gcd_trois(a,b,c):
    return euclide(euclide(a,b),c)
```

Exercice II

II.1 Le polynôme $P = X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1) = X(X - j)(X - \bar{j})$ est annulateur de A. Le spectre complexe de A est inclus dans l'ensemble $\{0, j, \bar{j}\}$ des racines de ce polynôme annulateur.

II.2 Le polynôme P étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

II.3 On suppose A inversible, donc $0 \notin \mathrm{Spec}(A)$. De plus, le spectre complexe de A n'est pas vide, et la matrice étant à coefficients réels, si z est valeur propre, $\bar{z}$ aussi et avec la même multiplicité m puisque $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$. Donc $\mathrm{Spec}(A) = \{j, \bar{j}\}$. Le déterminant de A est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité. On trouve donc $\det A = j^m \bar{j}^m = (j\bar{j})^m = 1^m = 1$.

Problème

Questions préliminaires

III.1 (a) Par contraposition : si P et Q ne sont pas premiers entre eux, alors le polynôme $\mathrm{pgcd}(P, Q)$ est non constant, donc admet une racine complexe. Cette racine est commune à P et Q.

(b) Comme P divise R, il existe un polynôme P_1 tel que $R = PP_1$. Par hypothèse, Q divise $R = PP_1$ et P et Q sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, Q divise P_1. Il existe donc Q_1 tel que $P_1 = QQ_1$. Finalement, $R = PQQ_1$, ce qui montre que PQ divise R.

III.2 Posons $\tilde{P}_j = \prod_{i \neq j} P_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Alors $P' = \sum_j P'_j \tilde{P}_j$, puis $\frac{P'}{P} = \frac{\sum_j P'_j \tilde{P}_j}{\prod_i P_i} = \sum_j \frac{P'_j}{P_j}$.

Interpolation de Hermite

III.3 (a) La formule de Taylor en a s'écrit $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^n$ puisque $P(a) = P'(a) = 0$. En posant $Q = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X - a)^{n-2} \in \mathbb{R}[X]$, on a $P = (X - a)^2 Q(X)$, ce qui prouve que $(X - a)^2$ divise P.

(b) L'application φ est clairement linéaire et $\dim \mathbb{R}_{2p-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n$. Il suffit de prouver l'injectivité de φ. Soit $P \in \ker \varphi$; d'après la question précédente, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $(X - x_i)^2$ divise P. De plus ces polynômes sont premiers entre eux deux à deux (pas de racines communes, cf. III.1.a) donc $\prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^2$ divise P (d'après III.1.b). Or le degré de $\prod_{i=1}^{p}(X - x_i)^2$ est $2p$ et celui de P est strictement inférieur à $2p$. On en déduit que $P = 0$, ce qui prouve l'injectivité.

(c) L'existence et l'unicité de P_H découlent directement de la bijectivité de φ.

III.4 Cherchons P_H sous la forme $P_H = a + bX + cX^2 + dX^3$. Les 4 conditions d'interpolation conduisent au système

$$\begin{cases} a - b + c - d = 1 \\ b - 2c + 3d = -1 \\ a + b + c + d = 0 \\ b + 2c + 3d = 2 \end{cases}$$

Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 \\ -1 \\ 3/4 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $P_H = -\frac{1}{4} - X + \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{2}X^3$.

III.5 (a) On trouve $Q_i(x_k) = \delta_{k,i}$ (symbole de Kronecker).
Si $k \neq i$, alors $(X - x_k)^2$ divise Q_i, donc x_k est racine double de Q_i, ce qui entraîne $Q_i'(x_k) = 0$.
Supposons que $k = i$. Posons $P = \prod_{j \neq i}(X - x_j)^2$ et $P_j = (X - x_j)^2$. D'après III.2, $P' = QP = \sum_{j \neq i} \frac{P_j'}{P_j} P$. On en déduit que $P'(x_i) = P(x_i) \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}$, puis $Q_i'(x_i) = \frac{P'(x_i)}{P(x_i)} = \sum_{j \neq i} \frac{2}{x_i - x_j}$.

(b) Tout d'abord, on constate que $P \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$. Soit $j \in [\![1, p]\!]$; on vérifie que $P(x_j) = a_j$ et $P'(x_j) = b_j$.
Comme les $Q_i(x_j)$ sont nuls si $i \neq j$, il vient

$$P(x_j) = \Big[(1 - Q_j'(x_j)(x_j - x_j))a_j + (x_j - x_j)b_j\Big] Q_j(x_j) = a_j Q_j(x_j) = a_j.$$

De même, en dérivant le produit correspondant à $i = j$ et en utilisant que $Q_j(x_j) = 1$,

$$P'(x_j) = (-Q_j'(x_j)a_j + b_j) + a_j Q_j'(x_j) = b_j$$

On conclut par unicité de P_H que $P = P_H$.

(c) Ici, $Q_1 = \frac{(X-1)^2}{4}$ et $Q_2 = \frac{(X+1)^2}{4}$. De plus, $Q_1'(x_1) = Q_1'(-1) = -1$. Il vient donc

$$P = [1 + (X+1) - (X+1)]Q_1 + 2(X-1)Q_2 = \frac{(X-1)^2}{4} + \frac{X-1}{2}(X+1)^2 = -\frac{1}{4} - X + \frac{3}{4}X^2 + \frac{1}{2}X^3.$$

Polynômes de Hermite

III.6 Récurrence immédiate.

III.7 Démontrons cette relation par récurrence. On a $H_0 = 1$ et $H_1 = X$, donc on a bien $H_1' = 1 \times H_0$.
Supposons que $H_n' = nH_{n-1}$ et montrons que $H_{n+1}' = (n+1)H_n$. On a

$$\begin{aligned} H_{n+1}' = (XH_n - H_n')' = H_n + XH_n' - H_n'' &= H_n + nXH_{n-1} - nH_{n-1}' \\ &= H_n + n(XH_{n-1} - H_{n-1}') = H_n + nH_n = (n+1)H_n. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

III.8 (a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et notons $R = PQ$. Soit $a_d X^d$ le monôme dominant de R ; la fonction $x \mapsto R(x)f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a $R(x)f(x) \sim a_d x^d f(x)$ lorsque $x \to \pm\infty$. Il suffit de prouver l'intégrabilité de $x \mapsto x^d e^{-x^2/2}$ au voisinage de $\pm\infty$. On peut par exemple écrire que $x^d e^{-x^2/2} = o(e^{-x})$ en $+\infty$; en effet, $\frac{x^d e^{-x^2/2}}{e^{-x}} = \frac{x^d}{e^{-x/2}} \frac{e^{-x^2/2}}{e^{-x/2}}$, produit de deux termes qui tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$. On conclut par comparaison avec la fonction $x \mapsto e^{-x}$ qui est intégrable en $+\infty$. De même au voisinage de $-\infty$ en comparant à e^x.

(b) Détaillons uniquement le caractère défini : si $\langle P, P \rangle = 0$, alors la fonction continue positive $x \mapsto P^2(x)f(x)$ est d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$ donc par théorème elle est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction f ne s'annule pas donc en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$, puis que P est le polynôme nul (infinité de racines).

III.9 (a) La propriété est claire pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\langle P, H_n \rangle = \langle P, XH_{n-1} - H_{n-1}' \rangle = \langle P, XH_{n-1} \rangle - \langle P, H_{n-1}' \rangle$. Calculons $\langle P, XH_{n-1} \rangle$. On a $\langle P, XH_{n-1} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)H_{n-1}(x)xf(x)\,\mathrm{d}x$.
À l'aide d'une intégration par parties, qui est licite parce que la quantité $P(x)H_{n-1}(x)f(x)$ admet une limite finie (nulle) en $\pm\infty$, il vient

$$\langle P, XH_{n-1} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (P'(x)H_{n-1}(x) + P(x)H_{n-1}'(x))f(x)\,\mathrm{d}x = \langle P', H_{n-1} \rangle + \langle P, H_{n-1}' \rangle.$$

Finalement, $\langle P, H_n \rangle = \langle P', H_{n-1} \rangle$.
On montre ensuite par récurrence que $\langle P, H_n \rangle = \langle P^{(n)}, H_0 \rangle$.

(b) Montrons d'abord que la famille est orthogonale. Soit $0 < i < j \leqslant n$. D'après la question prédédente, $\langle H_i, H_j \rangle = \langle H_i^{(j)}, H_0 \rangle = \langle 0, H_0 \rangle = 0$. En effet, H_i est de degré i et $j > i$, donc $H_i^{(j)} = 0$. Les polynômes de la famille $(H_0, \ldots, H_n)$ étant non nuls, cette famille orthogonale est libre. Elle est de cardinal $n+1$ qui est la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle = \langle n!, 1 \rangle$. En effet, le monôme dominant de H_n est X^n donc $H_n^{(n)} = n!$. Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$, on trouve $\|H_n\|^2 = n! \int_{-\infty}^{+\infty} f = n!$. Ainsi, $\|H_n\| = \sqrt{n!}$.

(d) Il vient immédiatement $H_1 = X$, $H_2 = X^2 - 1$ et $H_3 = X^3 - 3X$. On trouve facilement que $P = (X^3 - 3X) + (X^2 - 1) + 4X + 2 = H_3 + H_2 + 4H_1 + 2H_0$. Ceci permet d'écrire $P = 2H_0 + Q$ avec $Q \in \mathrm{Vect}(H_0)^\perp = \mathbb{R}_0[X]^\perp$. On en déduit d'après le cours que $\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_0[X]) = \|Q\| = \sqrt{\|H_3\|^2 + \|H_2\|^2 + 4^2\|H_1\|^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

III.10 (a) Si $p < n$, alors $S \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}(H_0, H_1, \ldots, H_{n-1})$. Donc $\langle S, H_n \rangle = 0$ puisque la famille $(H_0, \ldots, H_{n-1}, H_n)$ est orthogonale.

(b) Le polynôme SH_n n'admet pas de racines réelles d'ordre impair est il est unitaire. Il est donc de signe constant positif.

(c) Si l'on suppose que $p < n$, on obtient avec les deux questions précédentes que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(x)H_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

avec pour tout x, $S(x)H_n(x)f(x) \geqslant 0$. Ceci implique que le polynôme SH_n est nul, ce qui est absurde car ni S ni H_n est nul. Par conséquent, on a $p = n$, ce qui signifie que H_n admet n racines réelles distinctes.