Concours Communs polytechniques - Session 2015

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II (partie algébrique)
Filière MP

Projection orthogonale, surjectivité de l'application exponentielle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vers $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

Corrigé par M.TARQI [1]

Exercice II. Projection orthogonale

II.1. On vérifie facilement que $(A|A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

II.2. Notons $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il est clair que la famille (E_{11}, E_{12}, E_{22}) est une famille génératrice de $\mathscr{T}$; en fait c'est une base orthonormée de $\mathscr{T}$ pour le produit scalaire canonique.
Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{T}^{\perp}$, alors $(A|E_{11}) = (A|E_{12}) = (A|E_{22}) = 0$, donc nécessairement $a = b = d = 0$, donc $A = cE_{21} = c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathscr{T}^{\perp}$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire E_{21}.

II.3. Notons $p(A)$ la projection orthogonale de A sur $\mathscr{T}$ et $d(A, \mathscr{T})$ la distance entre A et le sous-espace vectoriel $\mathscr{T}$. On a $A = E_{11} + 2E_{12} + 3E_{21} + 4E_{22}$, donc $p(A) = E_{11} + 2E_{12} + 4E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
D'autre part, d'après le théorème du cours, $d(A, \mathscr{T}) = \sqrt{(A - p(A)|A - p(A))} = 3$.

Problème III. Surjectivité de l'application exponentielle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vers $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$

PARTIE PRÉLIMINAIRE

III.1. On peut vérifier facilement que l'application $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur l'espace des matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Soient $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ deux matrices à coefficients complexes et $C = AB = (c_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. On a $\forall i, j \in [\![1, n]\!]^2$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. D'où

$$n|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leq n \sup_{1\leq l\leq n} |a_{il}| \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| \leq n^2 \sup_{1\leq l\leq n} |a_{il}| \sup_{1\leq m\leq n} |b_{mj}|.$$

D'où, par passage à la borne supérieure sur les couples (i, j), $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$. Donc il s'agit bien d'une norme d'algèbre.

III.2. $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension finie, donc toute série d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ absolument convergente est convergente.

1. M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc. E-mail : medtarqi@yahoo.fr

III.3. Puisque on a une norme d'algèbre, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left\|\dfrac{M^k}{k!}\right\| \leq \dfrac{\|M\|^k}{k!}$ et comme la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{\|M\|^k}{k!}$ converge, alors la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{M^k}{k!}$ est absolument convergente, donc converge.

Première partie

III.4 Le polynôme caractéristique d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé, donc, d'après le théorème du cours, toute matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ est trigonalisable. Notons $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ les valeurs propres (complexes ou réels) de M, alors il existe une matrice P inversible telle que

$$M = PTP^{-1}$$

où T est une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M. Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{M^k}{k!} = P\dfrac{T^k}{k!}P^{-1}$ et donc $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{M^k}{k!} = P\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{T^k}{k!}P^{-1}$ et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ étant continue (application linéaire en dimension finie), donc

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!} = \lim_{k\to+\infty} P\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}P^{-1} = P \lim_{k\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}P^{-1}.$$

Autreeemnt dit $\exp(M) = P\exp(T)P^{-1}$, d'où $\det\exp(M) = \det\exp(T)$. Mais d'après le résultat donné dans cette partie $\det\exp(T) = e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i} = e^{\operatorname{tr}(M)}$. D'où $\det\exp(M) = e^{\operatorname{tr}(M)}$.
dans cette partie toute matrice

III.5. On vérifie facilement que $\det A = -12$. Supposons qu'il existe une matrice B à coefficients réels telle que $B^2 = A$, donc $\det A = (\det B)^2 \geq 0$ ce qui est absurde puisque $\det A = -12 < 0$. Donc il n'existe aucune matrice B à coefficients réels telle que $B^2 = A$.
Toujours, par l'absurde, supposons qu'il existe une matrice M à coefficients réels telle que $\exp(M) = A$, donc $\det A = \det\exp(M) = e^{\operatorname{tr}(M)} \geq 0$ ($M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc $\operatorname{tr}(M) \in \mathbb{R}$), ce qui est absurde.

Deuxième partie

III.6.

III.6.a. Considérons les applications $f_1 : x \mapsto 3^x e^{i\pi x} \in F$ ($k = 0, \rho = 3, \theta = \pi$) et $f_2 : x \mapsto x^2 2^x e^{i2\pi x} \in F$ ($k = 2, \rho = 2, \theta = 2\pi$). On a bien $f = \alpha f_1 + \beta f_2 \in F$ et vérifie $f(n) = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n$.

III.6.b. On a $x \mapsto (x + x_0)^k \rho^{x+x_0} e^{i\theta(x+x_0)} = \sum\limits_{j=0}^{k} \mathtt{C}_k^j x_0^{k-j} \rho^{x_0} e^{i\theta x_0} (x^j \rho^x e^{i\theta x})$, puisque tout élément de F est une combinaison des applications de type $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$, alors si $f \in F$, $x \mapsto f(x+x_0) \in F$.

III.7.

III.7.a. Posons $u_n = n^2 \left(\dfrac{2}{3}\right)^n e^{i\theta n}$. On a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2 \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3}$, donc u_n est le terme général d'une série convergente, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

III.7.b. L'égalité $(*)$: $\alpha n^{k_1} \rho_1^n e^{i\theta_1 n} + \beta\alpha n^{k_2} \rho_2^n e^{i\theta_2 n} = 0$ s'écrit encore $\beta = -\alpha n^{k_1-k_2} \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n e^{i(\theta_1-\theta_2)n}$.

- Si $\rho_1 < \rho_2$, alors comme dans la question précédente, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} -\alpha n^{k_1-k_2}(\frac{\rho_1}{\rho_2})^n e^{i(\theta_1-\theta_2)n} = 0$, puis $\alpha = 0$.
- Si $\rho_1 = \rho_2$, l'égalité $(*)$ s'écrit $\alpha n^{k_1} e^{i\theta_1 n} + \beta\alpha n^{k_2} e^{i\theta_2 n} = 0$ ou encore $\beta = -\alpha n^{k_1-k_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)n}$, donc $|\beta| = |\alpha| n^{k_1-k_2}$.
  - Si $k_1 < k_2$, alors on obtient par passage à la limite $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$
  - Si $k_1 > k_2$, alors on obtient par passage à la limite $\alpha = 0$ puis $\beta = 0$
  - Si $k_1 = k_2$, on obtient alors l'égalité $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \alpha e^{i\theta_1 n} + \beta e^{i\theta_2 n} = 0$ puis le système

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha e^{i\theta_1} + \beta e^{i\theta_2} = 0 \end{cases}$$

et comme $\theta_1 \neq \theta_2$, alors $(0,0)$ est l'unique solution, donc $\alpha = \beta = 0$.

III.7.c Si $f, g \in F$ alors $f - g \in F$ et donc si $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f = g$.

III.8. En divisant X^n par le polynôme caractéristique χ_A de A, on obtient une relation de type :

$$A^n = aA^2 + bA + cI_3.$$

Les nombres a, b et c sont des fonctions de n et plus précisément ils ont des expressions de la forme donnée dans la page 5, c'est-à-dire a, b et c s'expriment à l'aide des fonctions de F, en conséquence le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A^n est de la forme $w_{i,j}(n)$ où $w_{i,j} \in F$.

III.9

III.9.a. Il est clair que $\gamma(0) = I_3$ et $\gamma(1) = A$.

III.9.b. On a $\gamma(n+m) = A^{n+m} = A^n A^m = \gamma(n)\gamma(m)$.

III.9.c. $\forall n \in \mathbb{N},\ \ g(n)$ c'est le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice $\gamma(n)\gamma(m)$, donc c'est $w_{ij}(n+m)$, d'où $f = g$ sur $\mathbb{N}$ et comme f et g sont des éléments de F, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$ (la question III.7.c.) et par conséquent $\gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$.

III.9.d. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, les applications $y \mapsto w_{ij}(x+y)$ et $y \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{2} w_{ik}(x) w_{kj}(y)$ sont des éléments de F et coïncident sur $\mathbb{N}$, donc elles coïncident sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\forall y \in \mathbb{R},\ \ \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

III.10. On a $\gamma(0) = \gamma(1)\gamma(-1)$, c'est-à-dire $I_3 = A\gamma(-1)$, donc $A^{-1} = \gamma(-1)$.
On peut vrifier par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\gamma(px) = (\gamma(x))^p$. En particulier $\gamma(1) = \gamma\left(p \times \dfrac{1}{p}\right) = \gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)^p$, donc $\left(\gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right)^p = A$.

III.11. Les applications de type $x \mapsto x^k \rho^x e^{i\theta x}$ où $k \in \{0,1,2\}$ $\rho > 0$ et $\theta \in]0, 2\pi]$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et comme chaque w_{ij} est une combinaison linéaire de ces applications alors w_{ij} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc γ aussi.
D'autre part, $\forall t \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \frac{\gamma(h) - I_3}{h}\gamma(t) = \frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h}\gamma(t).$$

On obtient donc, quand h tend vers 0, la relation $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$, et comme $\gamma(0) = I_3$, alors γ est solution de l'équation différentielle matricielle :

$$\begin{cases} u(t) = \gamma'(0)u(t) \\ u(0) = I_3 \end{cases}$$

La solution d'une telle équation est donnée par $u(t) = \exp(t\gamma'(0))u(0) = \exp(t\gamma'(0))$, donc par unicité de la solution, on a ;

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \gamma(t) = \exp(t\gamma'(0)).$$

En particulier $A = \gamma(1) = \exp(\gamma'(0))$.

TROISIÈME PARTIE : EXEMPLE

III.12 On obtient : $\chi_A(X) = (X-2)^2(X+1)$.Donc la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre $\lambda = 2$ est 2, cherchons E_2 :
A la valeur propre $\lambda = 2$ correspond le système :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ x - 3y - 2z = 0 \\ -x - z = 0 \end{cases}$$

Donc $E_2 = \mathrm{Vect}(1, 1, -1)$. Donc $\dim E_2 = 1 < 2$, donc A n'est diagonalisable.

III.13 Soient a, b et c des réels tels que $A^n = aA^2 + bA + c$. Comme dans l'énoncé on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2^n \\ a - b + c = (-1)^n \\ 4a + b = n2^{n-1} \end{cases}$$

dont l'unique solution est donnée par

$$(a, b, c) = \left(\frac{(-1)^n}{9} + \frac{n2^n}{6} - \frac{2^n}{9}, 4\frac{(-1)^{n+1}}{9} - \frac{n2^n}{6} + 4\frac{2^n}{9}, \frac{4(-1)^n}{9} - \frac{n2^n}{3} + 5\frac{2^n}{9}\right).$$

D'où

$$A^n = \begin{pmatrix} n2^{n-1} + 2^n & 0 & n2^{n-1} \\ n2^{n-1} & (-1)^n & (-1)^n + n2^{n-1} - 2^n \\ -n2^{n-1} & 0 & -n2^{n-1} + 2^n \end{pmatrix}$$

On pose alors, pour tout réel t, la matrice $\gamma(t) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t2^{t-1} + 2^t & 0 & t2^{t-1} \\ t2^{t-1} & e^{i\pi t} & e^{i\pi t} + t2^{t-1} - 2^t \\ -t2^{t-1} & 0 & -t2^{t-1} + 2^t \end{pmatrix}$$

D'où :

III.13.a. $A^{-1} = \gamma(-1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & -1 & \frac{-7}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$

III.13.b. La matrice $B = \gamma(\frac{1}{2})$ vérifie $B^2 = A$. On trouve

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}\sqrt{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & i & i - \frac{3}{4}\sqrt{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{3}{4}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

III.13.c. La matrice $M = \gamma'(0)$ vérifie $\exp(M) = A$. On a

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2^t \ln 2 + 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 & 0 & 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 \\ 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 & i\pi e^{i\pi t} & i\pi e^{i\pi t} - 2^t \ln 2 + 2^{t-1} + t2^{t-1} \ln 2 \\ -2^{t-1} - t2^{t-1} \ln 2 & 0 & 2^t \ln 2 + 2^{t-1} - t2^{t-1} \ln 2 \end{pmatrix}.$$

D'où

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \ln 2 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & i\pi & i\pi - \ln 2 + \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 2 & \ln 2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$