SESSION 2014 **Proposition de corrigé** **MP**

CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

I. EXERCICE I

I.1.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{lllllll} u_{n+1} & = & u_n & + & 3v_n & & \\ v_{n+1} & = & 3u_n & + & v_n & + & 4w_n \\ w_{n+1} & = & & & 4v_n & + & w_n \end{array} \right. \quad \text{et } (u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 1)$$

I.1.a $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice réelle symétrique donc elle est diagonalisable.

I.1.b Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 0 \\ 3 & 1-X & 4 \\ 0 & 4 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -4.4(1-X) + (1-X)((1-X)^2 - 9) \\ &= (1-X)(-16 + X^2 - 2X - 8) \quad \text{(Développement suivant la colonne 3)} \\ &= -(X-1)(X-6)(X+4) \end{aligned}$$

Il en découle que $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 6\}$.
Cherchons les sous-espaces propres : Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$X \in E_{-4}(A) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5x + 3y = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 0 \\ 4y + 5z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{5}{3}x \\ \\ z = \frac{4}{3}x \end{array} \right.$$

Donc :

$$E_{-4}(A) = \mathbb{R}(3, -5, 4)$$

De la même façon, on trouve :

$$E_1(A) = \mathbb{R}(4, 0, -3)$$

et

$$E_6(A) = \mathbb{R}(3, 5, 4)$$

Ainsi :

$$A = PDP^{-1}$$

Avec :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & 4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 8 & 0 & -6 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

I.1.c De $A = PDP^{-1}$, on déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A^n = PD^nP^{-1}$

$$A^n = \frac{1}{50}\begin{pmatrix} 9(-4)^n + 32 + 9.6^n & -15(-4)^n + 15.6^n & 12(-4)^n - 24 + 12.6^n \\ -15(-4)^n + 15.6^n & 25(-4)^n + 25.6^n & -20(-4)^n + 20.6^n \\ 12(-4)^n - 24 + 12.6^n & -20(-4)^n + 20.6^n & 16(-4)^n + 18 + 16.6^n \end{pmatrix}$$

I.2. En posant $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$. Par suite on a (récurrence immédiate) : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^nU_0$, ce qui donne :

$u_n = \frac{21}{50}(6^n + (-4)^n) + \frac{4}{25}$

$v_n = \frac{7}{10}(6^n - (-4)^n$

$w_n = \frac{14}{25}((-4)^n + 6^n) - \frac{3}{25}$

II. EXERCICE II

II.1.

II.1.a Soit $x \in E$ alors $x = x - p(x) + p(x)$ avec $x_1 = x - p(x) \in \ker p$ car $p(x_1) = p(x) - p^2(x) = 0$ et $x_2 = p(x) \in \mathrm{Im}p$. Si $x \in \ker p \cap \mathrm{Im}p$ alors il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$ et $p(x) = 0$, donc $p^2(x') = p(x') = 0$, soit $x = 0$. Ainsi : $\mathrm{Im}p \oplus \ker p = E$

II.1.b Si $p = 0$ alors rg $(p) = 0 = \mathrm{Tr}(p)$. Sinon alors rg $(p) = r > 0$ Soit alors $\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_n)$ une base de E adaptée à la somme directe ci-dessus, de sorte que $(u_1, \cdots, u_r)$ est une base de $\mathrm{Im}p$ alors la matrice de p relativement à $\mathcal{U}$ est $A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{Tr}(p) = r$.

II.1.c Non, contre-exemple $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A^2 \neq A$ car A inversible et $A \neq I_2$. Cependant, on a : rg $(A) = 2 = \mathrm{Tr}(A)$. Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A alors f n'est pas un projecteur et $\mathrm{Tr}(f) =$ rg (f).

Remarque : On peut trouver un contre-exemple pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$. Il suffit de prendre la matrice $A_n = I_n + E_{1,n}$ où $E_{1,n}$ est la matrice élémentaire dont tous les termes sont nuls sauf celui de la ligne 1 et la colonne n qui vaut 1. On a A_n est inversible et $A_n \neq I_n$ donc $A_n^2 \neq A_n$, par suite la matrice A_n n'est pas celle d'un projecteur, cependant on a $\mathrm{Tr}(A_n) =$ rg $(A_n) = n$.

II.2. Prenons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors rg $(A) = 1$ puisque elle a une unique colonne non nulle et même raison pour B. On a A est diagonale donc diagonalisable et B est triangulaire supérieur à diagonale nulle donc 0 est son unique valeur propre. la dimension du sous-espace propre associé à 0 est, par le théorème du rang : $\dim E_0(B) = 3 - 1 = 2 < 3$ donc B n'est pas diagonalisable.

II.3.

II.3.a Comme u est de rang 1 on a par le théorème du rang $\dim \ker u = n - 1$. Soit $(e_1, \cdots, e_{n-1})$ une base de $\ker u$ et $e_n \in E$ tel que $u(e_n) \neq 0$. Alors $e_n \notin \ker u$, par suite $\beta = (e_1, \cdots, e_n)$ est une famille libre, donc une base de E. Posons $u(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$ alors la matrice de u relativement à β

est :

$$\mathrm{Mat}_\beta(u) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

II.3.b Il résulte de la question précédente que $a_n = \mathrm{Tr}(u)$ et que le polynôme caractéristique de u est $\chi_u = (-1)^n X^{n-1}(X - a_n)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si l'ordre de multiplicité de 0 dans χ_u est $n-1$ qui est la dimension de $\ker u$ si et seulement si $a_n \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Tr}(u) \neq 0$.
II.3.c Supposons que $\mathrm{Tr}(u) = 1$ $(= \mathrm{rg}\,(u))$ alors $a_n = 1$, donc 1 est une valeur propre de u. Soit alors un vecteur e'_n non nul tel que $u(e'_n) = e'_n$. Alors $e'_n \notin \ker u$ et par suite $\ker u \oplus \mathbb{R}e'_n = E$. Si $x \in E$ alors $x = x' + \alpha e'_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, donc $u(x) = \alpha e'_n = u^2(x)$. Ainsi $u^2 = u$ et u est un projecteur.
II.3.d $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\mathrm{rg}\,(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 1 \neq 0$ et $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{Tr}(A)$. D'après la question qui précède, A est la matrice d'un projecteur p. On a immédiatement d'après la matrice de p :

$$\mathrm{Im} p = \mathbb{R}(1,1,1)$$

. un vecteur (x,y,z) est dans $\ker p$ si et seulement si $x + y - z = 0$, donc

$$\ker p = \mathbb{R}(1,0,1) + \mathbb{R}(0,1,1)$$

III. PROBLÈME

Questions préliminaires

III.1.
III.1.a **Théorème 1 :** Soit E un espace euclidien de dimension non nulle et u un endomorphisme symétrique de E. Alors u est diagonalisable et E admet une base orthonormale constituée de vecteurs propres de u.
Théorème 2 : Soit A une matrice carrée réelle symétrique de taille n avec $n \in \mathbb{N}^*$. Alors A est diagonalisable et il existe une matrice carrée réelle orthogonale Ω de taille n tel que la matrice ${}^t\Omega A \Omega$ est diagonale.
III.1.b La matrice $S = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ est bien symétrique mais elle n'est pas diagonalisable car on remarque $S^2 = 0$, donc 0 est la seule valeur propre de S. Or $\mathrm{rg}\,(S) = 1$ puisque S non nulle et non inversible, donc le sous-espace propre associé à 0 est une droite vectorielle.
III.2.
III.2.a Écrivons $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \varepsilon_k$ alors $s(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \varepsilon_k$. Compte tenu de l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, on a :

$$R_s(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2$$

III.2.b Soit $x \in E$ de coordonnée $x_1, \cdots, x_n$ dans β. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_n,$$

donc

$$\lambda_1 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \leq \lambda_n \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

En particulier si $x \in S(0,1)$, on a $\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1$ d'où :

$$\lambda_1 \leq R_s(x) \leq \lambda_n$$

III.3.

III.3.a Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(s)$ alors il existe un vecteur non nul x tel que $s(x) = \lambda x$, donc

$$\langle s(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2$$

Si on suppose que s est positif alors $\langle s(x), x\rangle \geq 0$, d'où $\lambda \geq 0$.
De même si on suppose s défini positif, alors $\langle s(x), x\rangle > 0$ et comme $x \neq 0$ on a $\lambda > 0$.
III.3.b Par définition de la matrice S, on a pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$s(e_j) = \sum_{k=1}^{n} s_{kj} e_k$$

Par suite, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\langle s(e_j), e_i\rangle = s_{ij}.$$

En particulier, on a : $s_{ii} = \langle s(e_i), e_i\rangle = R_s(e_i)$. D'après **III.2,b** on a alors : $\lambda_1 \leq s_{ii} \leq \lambda_n$.

Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

III.4. On a ${}^tMM - I_n = (\tau_\circ h \circ g)(M)$ avec $g(X) = (X, {}^tX)$ et $h(X,Y) = XY$ et $\tau(X) = X - I_n$ pour tout $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. g est une application linéaire de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et h est une application bilinéaire de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc elle sont continues car on est en dimension finie. τ est une translation donc elle est continue, d'où la continuité de l'application demandée.
III.5. Comm A est orthogonale , ses colonnes forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $|a_{ij}| \leq \|C_j\| = 1$.
III.6. D'après **III.5.**, on a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme :

$$\|A\| = \sup_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|$$

De plus $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé car c'est l'image réciproque de $\{0\}$ par l'application $M \mapsto {}^tMM - I_n$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui même, laquelle est continue d'prés **III.4.**. Donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
III.7.

III.7.a D'après le théorème 2 énoncé dans la question **III.1.a**, ce dessus, il existe $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = \Omega\Delta^t\Omega$, donc $\mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(A\Omega\Delta^t\Omega = \mathrm{Tr}(^t\Omega A\Omega\Delta) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$ où $B =^t \Omega A\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ puisque c'est un groupe multiplicatif et que $A, \Omega,^t \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
III.7.b L'application T est continue du compact $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$ puisque l' applications $A \mapsto AS$ continue sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ comme restriction d'une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui même, et l'application Tr est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc T est bornée et atteint ses bornes sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. En particulier, T admet un maximum t sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$
III.7.c Notons b_{ij} les coefficients de la matrice B. alors les termes diagonaux de la matrice $B\Delta$ sont : $b'_{ii} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_{ik}d_{ki} = b_{ii}\lambda_i$ de sorte que

$$T(A) = \mathrm{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_{ii}$$

Donc

$$T(A) \leq |T(A)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |b_{ii}| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Tr}(S)$$

On a tenu en compte que les les λ_i sont positifs et que $|b_{ii}| \leq 1$ d'après la question **III.5.**
Cela montre que $\mathrm{Tr}(S)$ est un majorant de T et comme il est atteint pour $A = I_n$, on a

$$t = \mathrm{Tr}(S)$$

Inégalité d'Hadamard

III.8. Puisque S est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_k, k \in [\![1, n]\!]$, on sait que $\det(S) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda_k$ et $\mathrm{Tr}(S) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$ et comme les λ_k sont positifs, l'inégalité demandée n'est autre que l'inégalité arithmetico-géométrique admise au début du problème.
III.9. $S_\alpha =^t DSD$ est symétrique positive puisque $^tS_\alpha =^t D^tSD =^t DSD = S_\alpha$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle S_\alpha X, X\rangle =^t XS_\alpha X =^t X^tDSDX = \langle S(DX), DX\rangle$$

et que S est positive. Les termes diagonaux de S_α sont $s'_{ii} = \alpha_i^2 s_{ii}$ donc :

$$\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 s_{ii}$$

III.10. Comme $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a d'après l'inégalité (*) :

$$\det(S_\alpha) \leq \left(\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(S_\alpha)\right)^n$$

Or, et compte tenu du fait que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $s_{ii} > 0$ et $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{s_{ii}}}$:

$$\det(S_\alpha) = (\det(D))^2 \det S = (\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^2) \det S = \frac{\det S}{\displaystyle\prod_{i=1}^{n} s_{ii}}$$

et

$$\mathrm{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_{ii}} s_{ii} = n$$

Tout ça donne l'inégalité :

$$\det S \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}$$

III.11. $S_\varepsilon = S + \varepsilon I_n$. La matrice S_ε est symétrique comme somme de deux matrices symétriques. elle est positive car pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\langle S_\varepsilon X, X\rangle = \langle SX, X\rangle + \varepsilon\langle X, X\rangle$$

donc $\langle SX, X\rangle \geq 0$ Ses termes diagonaux $s'_{ii} = s_1 1 + \varepsilon$ sont strictement positifs car on sait que $S_{ii} \geq \lambda_1 \geq 0$ d'après la question **III.3.b** et que $\varepsilon > 0$, donc on peut appliquer la question précédente et obtenir :

$$\det S_\varepsilon \leq \prod_{i=1}^{n} s'_{ii} = \prod_{i=1}^{n} (s_{ii} + \varepsilon)$$

Par continuité de det et de l'application $\varepsilon \mapsto \prod_{i=1}^{n} (s_{ii} + \varepsilon)$, on obtient par passage à la limite quand ε tends vers 0 et compte tenu du fait que $\det S = \prod_{k=1}^{n} \lambda_i$:

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \prod_{i=1}^{n} s_{ii}.$$

Application de l'inégalité d'Hadamard

III.12. Soit $A \in \mathcal{U}$ et $B =^t \Omega A \Omega$. Alors : $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ car B est symétrique et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $\langle BX, X\rangle =^t XBX =^t X^t\Omega A\Omega X = \langle A(\Omega X), \Omega X\rangle \geq 0$ puisque $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ainsi on $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. par ailleurs , $\det(B) = \det({}^t\Omega)\det(A)\det(\Omega) = \det(A) = 1$ car ${}^t\Omega = \Omega^{-1}$. Finalement $B \in \mathcal{U}$.
On a $\mathrm{Tr}(B\Delta) = \mathrm{Tr}({}^t\Omega A\Omega\Delta) = \mathrm{Tr}(A\Omega\Delta{}^t\Omega) = \mathrm{Tr}(AS)$.
Conclusion :

$$(***) \quad \mathrm{Tr}(AS) = \mathrm{Tr}(B\Delta)$$

III.13. Posons $\mathcal{T}_1 = \{\mathrm{Tr}(AS)/A \in \mathcal{U}\}$ et $\mathcal{T}_2 = \{\mathrm{Tr}(B\Delta)/B \in \mathcal{U}\}$ L'application $A \mapsto^t \Omega A\Omega$ de $\mathcal{U}$ vers lui même est bijective : Car pour tout $A, B \in \mathcal{U}$, on a $B =^t \Omega A\Omega \iff A = \Omega B^t\Omega$, et il est aisé de prouver comme précédemment que si $B \in \mathcal{U}$ alors $A = \Omega B^t\Omega \in \mathcal{U}$ (en posant par exemple $\Omega =^t \Omega'$ et se ramener au cas déjà fait dans **III.12.**) et compte tenu de la relation $(***)$ ci-dessus, on a $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. remarquons que $\mathcal{T}_2$ est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ car si $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, alors les termes diagonaux de $B\Delta$ sont $b'_i = b_{ii}\lambda_i$ et on sait que $b_{ii} \geq 0$ car $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\lambda_i \geq 0$ donc $\mathrm{Tr}(B\Delta) \geq 0$. Ainsi $\mathcal{T}_2$, donc $\mathcal{T}_1$ admet une borne inférieur m comme partie non vide de $\mathbb{R}_+$

III.14. On a alors $\text{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}\lambda_i$ et comme les b_{ii} et λ_i sont positifs, on peut appliquer l'inégalité arithmetico-géométrique, ce qui donne :

$$\text{Tr}(B\Delta) \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} b_{ii}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

III.15. Comme $B \in \mathcal{U}$, l'inégalité d'Hadamard donne : $\prod_{i=1}^{n} b_{ii} \geq \det(B) = 1$, donc compte tenu de l'inégalité de la question précédente, et du fait que $\det S = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ on a :

$$\text{Tr}(B\Delta) \geq n(\det S)^{\frac{1}{n}}$$

III.16. La matrice $D = \text{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$ est un élément de $\mathcal{U}$ car elle est symétrique positive de determinant

$$\det D = \prod_{i=1}^{n} \mu_i = \frac{((\det S)^{\frac{1}{n}})^n}{\prod_{i=1}^{n} \lambda_i} = 1$$

Il en résulte que $\text{Tr}(D\Delta) \geq m$ Or

$$\text{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\lambda_i = n(\det S)^{\frac{1}{n}}$$

Ainsi :

$$n(\det S)^{\frac{1}{n}} \geq m$$

Or D'après le résultat de la question **III.15** on a $n(\det S)^{\frac{1}{n}}$ est un minorant de $\mathcal{T}_2$.
Conclusion :

$$m = n(\det S)^{\frac{1}{n}}$$